

Physical &
Applied Sci.
Serials



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

Physical &
Applied Sci.
Serials

REVUE
DE
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

I

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

33112 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

114

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-UNIÈME. — ANNÉE 1903.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

1903

180097
8/5/23



QA

I

S59

t. 31-32

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1903 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	}	MM. APPELL. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA COUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ.
----------------------------------	---	---

Président.....	MM. PAINLEVÉ.
Vice-Présidents	{ BIOCHE. BLUTEL. BOREL. CARVALLO.
Secrétaires	{ BRICARD. DUPORCQ.
Vice-Secrétaires.....	{ GRÉVY. SERVANT.
Archiviste.....	RAFFY.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ BOURIET, 1904. GOURSAT, 1905. HADAMARD, 1904. LAISANT, 1905. LECORNU, 1906. LEVY (L.), 1905. MAILLET, 1904. NIEWENGLOWSKI, 1904. D'OCAGNE, 1905. PERRIN (R.), 1906. TOUCHE, 1906.

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17°).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7°).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, 121, boulevard de la Liberté, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5°).
1894. **ANDRADE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6°).
1901. **ANGIBOUST**, rue d'Assas, 104, à Paris (6°).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6°).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1896. **BAKER**, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur à Mélaoui (Tunisie).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7°).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie maritime en retraite, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9°).
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), 1910, Addison street, à Berkeley, Californie (U. S. A.).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Herzberger chaussée, 49, à Göttingen.
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. **BOREL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, 30, boulevard Saint-Germain, à Paris (5°).
1896. **BOULANGER**, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14°).
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44 (6°).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1901. **BUHL** (Adolphe), docteur ès sciences, rue de la Tombe-Issoire, 37, à Paris (14°).

Date
de
l'admission.

1893. BURKHARDT, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
1897. CABREIRA, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16^e).
1893. CALDABERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'Artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16^e).
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17^e).
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. CARVALLO, examinateur desortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5^e).
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Unionsgatan, 4, à Helsingfors.
1892. CELLÉRIER (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, rue delle Sette Sale, 16, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5^e).
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10^e).
1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8^e).
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. CLAIRIN, docteur ès sciences, professeur au Lycée, 20, boulevard Carnot, à Dijon.
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9^e).
1890. COLOT, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. COMBEBIAC, capitaine du génie, docteur ès sciences, à Limoges.
1900. COMTE (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées en congé, à Bar-le-Duc.
1896. COSSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. COSSERAT (F.), ingén. en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10^e).
1900. COTTON (Émile), maître de conférences à l'Université de Grenoble.
1877. CREMONA, sénateur, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5^e).
1885. DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1901. DELASSUS, chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue Alsace-Lorraine, 39, à Grenoble (Isère).
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
1899. DELEMER, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille (Nord).
1885. DEMARTR'S, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. DENIS (Henry), élève libre à l'Ecole d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris (6^e).
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900. DICKSTEIN, 117, Marszatkowska, Varsovie.
1902. DIEGUEZ (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3^e, à La Corogne (Espagne).

Date
de
l'admission.

1899. **DRACH** (Jules), maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard des Écoles, 31, à Lille (Nord).
1896. **DUMAS** (G.), licencié ès sciences, à Gland, canton de Vaud (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1895. **DUPORCQ** (Ernest), ingénieur des télégraphes, avenue Duquesne, 11 bis, à Paris (7^e).
1897. **DURAN-LORIGA**, command. d'artillerie, 20, plaza de Maria Pita, à la Corogne (Espagne).
1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1902. **EGOROFF** (Dimitri), privat-doctent à l'Université de Moscou, rue Saint-Honoré, 223, à Paris (1^{er}).
1901. **EMELEN** (van) (Léopold), boulevard du Château, 491, à Gand (Belgique).
1900. **ESTAVAVE**, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1900. **ESTIENNE**, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, 9, avenue de Toulouse, à Montpellier (Hérault).
1891. **FAUQUENBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1898. **FERBER**, capitaine d'artillerie, à Nice.
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (John), professeur de mathématiques, 21, Liberty Str., à Hamilton (Canada).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 31, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. **FONTANEAU**, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. **FONTENÉ**, professeur au collège Rollin, boulevard de Clichy, 6, à Paris (18^e).
1891. **FONTVILLANT** (DE), profes. à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil (16^e).
1889. **FOUCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e).
1892. **FROLOV** (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1900. **GAUDEANO** (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.
1872. **GABRIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY** (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7^e).
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, à Saint-Wast-la-Hougue (Manche).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14^e).
1896. **GREENHILL**, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

Date
de
l'admission.

1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7°).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1900. GUICHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. GUIMARVES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7°).
1873. HAVG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HADAMARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1901. HANCOCK (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. HARDEL, élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, 22, place Malesherbes, à Paris (17°).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1900. HOFFBAUER, ancien lieutenant d'art., rue du Châtelet, 22, à Fontenay-sous-Bois (Seine).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1872. HOUÏGANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris (15°).
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11°).
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Pariserstrasse, 55, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48 à Paris (7°).
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris (5°).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1890. KÖBB (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm, (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1897. LACAUCHE, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).

Date
de
l'admission.

1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).
1893. LANCELIN, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU (Edmond), privat-docent à l'Université, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.
1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, cité Martignac, 5, à Paris (7°).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Marimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°).
1896. LEBEL, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1902. LEBESGUE, docteur ès sciences, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Pougirard, 4, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 4, à Paris (15°).
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'Observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, maître de conférences à la Faculté des Sciences, faubourg de Fougères, 41, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. LE ROY, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6°).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LIND LÖF (Ernst), professeur à l'Université, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors.
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1900. LOVEFF (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GERARDVILLE, ing^r des manufactures de l'État, quai d'Orsay, 67, à Paris (15°).
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16°).
1884. MARTIN (Artemas), Columbia street, 1534, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Date
de
l'admission.

1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5°).
1901. MASSAU (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).
1894. MAUVIN, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).
1897. MEHNKE, professeur à l'École technique supérieure, Weisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7°).
1902. MERLIN (E.), rue Patenier, 36, à Namur (Belgique).
1902. MESVY (R.), enseigne de vaisseau, rue de la Rampe, 4, à Brest.
1893. MICHEL (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Perdonnet, 12, à Paris (10°).
1899. MILLER (Dr G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1902. MOLK (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. MONTCHEUIL (l'abbé DE), rue du Vieux-Raisin, 11, à Toulouse (Haute Garonne).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1898. NAUD (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6°).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, à Montreux (Suisse).
1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur de l'Académie de Paris, rue de l'Arbalète, 35 (5°).
1882. OCAGNE (M. n'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°).
1873. OVIDIO (Enrico n'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), chargé de cours à l'Université, route de Bordeaux, 26, à Poitiers.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, cité Vaneau, 9, à Paris (7°).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des chemins de fer éthiopiens, 18, rue Magdebourg, à Paris (16°).
1898. PELLETREAU (Georges), sous-inspecteur de l'exploitation des chemins de fer du Nord, 31, rue Baudin, à Paris (9°).
1900. PERCHOT, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, avenue de l'Observatoire, 1 (5°).
1874. PERCIN, général de brigade, chef du cabinet du ministre de la guerre.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris (16°).
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris (17°).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Erteleff Persoulok, 9, à Saint-Petersbourg.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6°).

Date
de
l'admission.

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1896. **PIÉROX**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6°).
1899. **PIERPONT** (James), prof. de l'Université Yale, 42, Mansfield st., New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5°).
1872. **POLIGNAC** prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. **PRUVOST**, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1872. **PUTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1896. **QUIQUET** actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9°).
1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RADAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6°).
1883. **RAFFY**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris (5°).
1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16°).
1898. **RIPERT**, commandant du génie en retraite, à Poix (Somme),
1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
1872. **ROUCHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7°).
1896. **ROI GIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique, à Tomsk (Russie).
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), profess. à la United States Navy, à Washington (États-Unis).
1896. **SEGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, Grande-Rue, 75, à Bourg-la-Reine (Seine).
1900. **SPARIE** (comte Magnus DE), château de Vallière, à St-Georges-de-Reneins (Rhône).
1881. **STARKOFF**, Maximilianovskiy pereonlok, 19, log. 12, à Saint-Petersbourg (Russie).
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1901. **STETSON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts).
1898. **STÖRMER** (Carl), charge de cours à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania.
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. **TANNENBERG** (DE), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).

Date
de
l'admission.

1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1882. TARRY (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).
1897. TARRY (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).
1899. THYBAUT (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8°).
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. TOBRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17°).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1896. TRESSE, doct. ès sciences, prof. au collège Rollin, rue Caulaincourt, 20, à Paris (18°).
1893. VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), docteur de l'Université, rue Rolyclète, 5, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard du Nord, 92, à Lyon (Rhône).
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université de Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain (5°).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16°).
1880. WALCKENAER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8°).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenskaja, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kanntkestrøde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, Ann Arbor (Michigan) (Etats-Unis).
1902. ZOUKIS (Aristide), professeur à l'École militaire des Evelpides, rue Scoufa, 6, à Athènes.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAYME (décédé). — BLOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BOBERIL (vicomte R. du), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Austin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico. — MERCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. de), à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SALTÿKOW, à Tomsk. — SÉLIVANOFF, à Saint-Pétersbourg. — SPARRÉ (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul), à Paris. — TARRY (G.), à Alger. — TCHEBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1875	BIENAYMÉ.	1891	COLLIGNON.
1876	DE LA GOURNERIE.	1892	VICAIRE.
1877	MANNHEIM.	1893	HUMBERT.
1878	DARBOUX.	1894	PICQUET.
1879	O. BONNET.	1895	GOURSAT.
1880	JORDAN.	1896	KÉNIGS.
1881	LAGUERRE.	1897	PICARD.
1882	HALPHEN.	1898	LECORNU.
1883	ROUCHÉ.	1899	GUYOU.
1884	PICARD.	1900	POINCARÉ.
1885	APPELL.	1901	D'OCAGNE.
1886	POINCARÉ.	1902	RAFFY.
1887	FOURET.	1903	PAINLEVÉ.
1888	LAISANT.		

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	Johns Hopkins University.	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Göttingen.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences, à l'Université.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.

Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	<i>American mathematical Society.</i>	États-Unis.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	Bibliothèque de la Sorbonne.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Sto kholm.....	<i>Bibliotheca Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

1

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

LA DÉVELOPPÉE MOYENNE ET LES SURFACES APPLICABLES;

Par M. DE MONTCHEUIL.

I.

Interprétation géométrique d'une forme quadratique particulière. — L'étude des propriétés relatives à la surface, lieu des centres de courbure d'une surface donnée, a permis de déterminer un certain nombre de surface applicables. On sait, par exemple, que les deux nappes de la surfaces des centres de courbure relative à une surface de M. Weingarten sont applicables sur une surface de révolution ⁽¹⁾.

A la surface, lieu des extrémités du segment focal, substituons la surface, lieu du milieu de ce segment; en d'autres termes, considérons la développée moyenne ponctuelle de la surface donnée. Nous allons voir que cette surface conduit, elle aussi, à la détermination de divers couples de surfaces applicables.

Dans tout ce qui va suivre, nous exprimerons les coordonnées cartésiennes x, y, z d'une surface donnée S , de la façon que nous allons brièvement indiquer.

Soit donnée une surface S_1 enveloppe du plan mobile défini par l'équation

$$(u + u_1)x_1 + i(u_1 - u)y_1 + (uu_1 - 1)z_1 + \xi = 0,$$

ξ étant une fonction donnée de u et de u_1 .

⁽¹⁾ J. WEINGARTEN, *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen* (*Journal de Crelle*, t. LIX, 1861, p. 382).

Cette dernière fonction conservant la même valeur, déterminons quatre nouvelles fonctions de u, u_1 au moyen du système

$$(u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + i(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0,$$

$$x - iy + u_1z + iu_1\rho + \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0,$$

$$x + iy + uz + iu\rho + \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = 0,$$

$$z + i\rho + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} = 0.$$

On vérifie que les quatre fonctions $x, y, z, -i\rho$ ainsi définies représentent les coordonnées cartésiennes de la développée moyenne S et la demi-somme des rayons de courbure relative à la surface proposée S_1 .

Géométriquement, ce système d'équations, formé d'une façon analogue à celui qui définit les coordonnées d'une surface, considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile, revient à envisager une surface S_1 comme l'enveloppe d'une sphère variable, dont le centre décrit sa développée moyenne S . D'ailleurs, en déterminant ainsi les éléments de la sphère, par le fait, le système définit S aussi bien que S_1 .

Dans ce qui va suivre, nous considérerons donc les coordonnées d'une surface S comme exprimées au moyen du système précédent, en fonction des éléments relatifs à une surface S_1 dont elle est la développée moyenne.

Ces préliminaires établis, soient les deux systèmes de quantités $x, y, z, \rho; x', y', z', \rho'$ relatifs à deux surfaces S, S' , développées moyennes respectives de deux autres surfaces S', S'_1 caractérisées par les fonctions ξ, ξ' . Nous nous proposons de calculer la forme quadratique

$$dx dx' + dy dy' + dz dz' + d\rho d\rho'.$$

Plus généralement, nous allons calculer la forme

$$(1) \quad d\theta_1 d\theta'_1 + d\theta_2 d\theta'_2 + d\theta_3 d\theta'_3 + d\theta_4 d\theta'_4$$

définie comme il suit.

Soient $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ des constantes quelconques. Déterminons

une fonction φ_α par la relation

$$(u + u_1)a_\alpha + i(u_1 - u)b_\alpha + (uu_1 - 1)c_\alpha + i(uu_1 + 1)d_\alpha + \varphi_\alpha = 0.$$

D'après le mode de représentation d'une surface, exposé tout à l'heure, la fonction φ_α peut être considérée comme déterminant une sphère immobile de centre $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$, et de rayon $-id_\alpha$.

Cela posé, nous supposons les fonctions θ_α données par des expressions de la forme

$$\theta_\alpha = \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u \partial u_1} \xi \right)$$

où l'on donne à α les valeurs successives 1, 2, 3, 4.

Les fonctions θ'_α se déduisent des précédentes par la substitution de la fonction ξ' à la fonction ξ .

On vérifie que les fonctions $\theta_\alpha, \theta'_\alpha$ sont des combinaisons linéaires respectives des quantités x, y, z, ρ d'une part; x', y', z', ρ' de l'autre; et, par suite, elles les renferment à titre de cas particuliers.

Différentiant ces fonctions, on trouve

$$d\theta_\alpha = \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \right) du + \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u \partial u_1^2} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \right) du_1.$$

Les différentielles $d\theta'_\alpha$ seront représentées par des formules analogues.

Portant ces valeurs dans la forme quadratique (1) il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} d\theta_\alpha d\theta'_\alpha &= A \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \varphi_\alpha^2 + B \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} + C \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} \right)^2 du^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \right)^2 du_1^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} du du_1, \end{aligned}$$

A, B, C désignant ici des fonctions des différentielles du, du_1 et des dérivées secondes et troisièmes de ξ et de ξ' .

Cela posé, cherchons à déterminer les constantes $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$

de telle sorte qu'on ait identiquement

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \varphi_{\alpha}^2 = 0.$$

Cette identité entraîne les suivantes

$$\sum \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u} = \sum \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u_1} = \sum \left(\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u_1} \right)^2 = 0.$$

Si donc on pose

$$\sum \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial u_1} = 2K^2 = \text{const.},$$

on obtient pour expression de la forme quadratique

$$(2) \quad \sum d\theta_{\alpha} d\theta'_{\alpha} = \frac{K^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} \right) du du_1.$$

Il reste à définir le système de relations entre les seize constantes a_{α} , b_{α} , c_{α} , d_{α} , qui donne

$$\sum \varphi_{\alpha}^2 = 0.$$

On vérifie qu'il suffit de poser

$$\begin{aligned} \sum a_{\alpha}^2 &= \sum b_{\alpha}^2 = \sum c_{\alpha}^2 = \sum d_{\alpha}^2 = K^2, \\ \sum a_{\alpha} b_{\alpha} &= \sum a_{\alpha} c_{\alpha} = \sum a_{\alpha} d_{\alpha} = \sum b_{\alpha} c_{\alpha} = \sum b_{\alpha} d_{\alpha} = \sum c_{\alpha} d_{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose en outre

$$K = 1,$$

les relations précédentes entraîneront les suivantes :

$$a_{\alpha}^2 + b_{\alpha}^2 + c_{\alpha}^2 + d_{\alpha}^2 = 1, \quad a_{\alpha} a_{\beta} + b_{\alpha} b_{\beta} + c_{\alpha} c_{\beta} + d_{\alpha} d_{\beta} = 0.$$

On sait par là que l'identité

$$\sum \varphi_{\alpha}^2 = 0$$

équivalant à un système de neuf relations entre seize constantes, analogue au système des six relations entre les neuf cosinus directeurs relatifs à trois droites rectangulaires.

Le système de relations que vérifient les constantes peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} a_\alpha^2 + b_\alpha^2 + c_\alpha^2 + d_\alpha^2 &= 1, \\ (a_\alpha - a_\beta)^2 + (b_\alpha - b_\beta)^2 + (c_\alpha - c_\beta)^2 + (d_\alpha - d_\beta)^2 &= 2, \end{aligned}$$

formules qui donnent immédiatement l'interprétation du système de quatre sphères définies par les quatre fonctions φ_α .

La première formule exprime que les quatre sphères sont de même puissance par rapport à l'origine. La seconde exprime que la distance de deux points de contact d'une tangente commune à deux sphères est constante quel que soit le couple de sphères considéré.

Les quatre sphères sont orthogonales à la sphère de rayon 1, ayant son centre à l'origine, qui sert de représentation sphérique à la surface proposée S_1 .

Si l'on pose

$$a_4 = b_4 = c_4 = d_1 = d_2 = d_3 = 0, \quad d_4 = 1,$$

on retrouve le système des neuf cosinus; alors l'une des sphères a son centre à l'origine, et les droites qui joignent ce centre à ceux des trois autres sphères forment un système orthogonal.

On remarquera que le système des quatre sphères que nous venons de définir joue, dans les questions relatives à la développée moyenne, un rôle analogue à celui que remplit le système pentasphérique de M. Darboux, dans les questions relatives aux lignes de courbure ⁽¹⁾.

Nous avons établi l'identité (2) dans l'hypothèse où les surfaces S , S' caractérisées par les fonctions ξ , ξ' avaient même représentation sphérique. Nous allons considérer cette identité comme se rapportant à des surfaces associées dans des conditions différentes.

Il est évident que ξ , ξ' étant des fonctions données de u , u_1 ; a_α , b_α , ... des constantes également données, l'identité subsistera, quelle que soit la signification géométrique donnée à ces quantités.

Cela posé, imaginons l'équation du plan tangent à une surface,

(¹) DARBOUX, *Th. des Surfaces*, t. I, p. 213.

définie successivement par les deux relations

$$\begin{aligned}(u + u_1)x_1 + i(u_1 - u)y_1 + (uu_1 - 1)z_1 + \xi &= 0, \\ (1 - uu_1)x_1 + i(1 + uu_1)y_1 + (u + u_1)z_1 + \xi &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on désigne, comme précédemment, par x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, et par $-i\rho$ la demi-somme des rayons de courbure, on vérifie que les deux relations précédentes entraînent les suivantes :

$$(3) \quad (u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + i(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0,$$

$$(4) \quad (1 - uu_1)x + i(uu_1 + 1)y + (u + u_1)z + i(u_1 - u)\rho + \xi = 0.$$

Posons

$$x' = z, \quad y' = -\rho, \quad z' = -x, \quad \rho' = y.$$

Portant ces valeurs de x, y, z, ρ dans la seconde équation, on constate qu'elle devient identique à la première.

Nous en tirons cette conséquence :

Interpréter au moyen de l'équation (4) une fonction ξ de u, u_1 interprétée d'abord au moyen de l'équation (3), revient à remplacer une relation de la forme

$$F(x, y, z, \rho),$$

par la relation

$$F(-z, \rho, x, -y).$$

Cela posé, imaginons qu'on interprète les fonctions ξ', θ_α de u, u_1 dans le premier système, et les fonctions ξ'', θ'_α dans le second; dès lors, les surfaces définies respectivement par ξ, ξ' n'auront plus même représentation sphérique. Désignons par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale de la première surface; par C, C', C'' ceux relatifs à la normale de la seconde surface. Le calcul montre qu'aux points correspondants, c'est-à-dire, pour un même système de valeurs u, u_1 , on aura les relations

$$\begin{aligned}C &= i \frac{c''}{c}, & c &= i \frac{C''}{C}, \\ C' &= \frac{1}{c'}, & c' &= \frac{1}{C'}, \\ C'' &= -i \frac{c}{c'}, & c'' &= -i \frac{C}{C'}.\end{aligned}$$

Ces formules montrent qu'aux méridiens de l'une des surfaces correspondent les parallèles de l'autre, et réciproquement.

On voit de plus qu'à un cercle de la représentation sphérique de l'une des surfaces, parallèle au plan des x, z , correspond un cercle semblable pour la seconde.

Nous avons ainsi défini la correspondance qui relie deux à deux les points des surfaces définies par les fonctions ξ et ξ' . Il nous reste à déterminer la correspondance des fonctions $\theta_\alpha, \theta'_\alpha$. Interprétées dans le même système, ces fonctions sont des combinaisons linéaires identiques des quantités x, y, z, ρ d'une part; x', y', z', ρ' de l'autre, définies précédemment. Or, nous avons vu que, lorsqu'on passe de la première interprétation à la seconde, toute fonction de la forme

$$F(x, y, z, \rho)$$

devient

$$F(-z, \rho, x, -y).$$

On voit par là qu'une fonction θ'_α ne sera autre que la combinaison θ_α où l'on aura fait l'échange indiqué.

Nous pouvons donc résumer les considérations que nous venons de faire dans la proposition suivante :

ξ, ξ' étant des fonctions données de $u, u_1, a_\alpha, b_\alpha, \dots$ des constantes également données, l'identité (2) a lieu entre quatre combinaisons linéaires des quantités x, y, z, ρ d'une part, et quatre combinaisons linéaires x', y', z', ρ' de l'autre; soit que ξ, ξ' définissent des surfaces de même représentation sphérique; soit qu'elles définissent des surfaces dont les points se correspondent de la façon que nous avons indiquée.

Dans le premier cas, les deux groupes de combinaisons seront identiques; dans le second cas, ils se déduisent l'un de l'autre, par l'échange

$$a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha; \quad -c_\alpha, d_\alpha, a_\alpha, -b_\alpha.$$

Arrêtons-nous un instant à considérer la surface de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ qui devient, à titre de cas particulier, la développée moyenne de la surface définie par ξ .

De la relation

$$\sum \varphi_{\alpha}^2 = 0$$

on tire

$$(5) \quad \sum \varphi_{\alpha} d\theta_{\alpha} = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\theta_{\alpha} = - \frac{\varphi_1 d\theta_1 + \varphi_2 d\theta_2 + \varphi_3 d\theta_3}{\varphi_4}.$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{i\varphi_1}{\varphi_4}\right)^2 + \left(\frac{i\varphi_2}{\varphi_4}\right)^2 + \left(\frac{i\varphi_3}{\varphi_4}\right)^2 = 1.$$

On peut donc considérer les quantités $\frac{i\varphi_1}{\varphi_4}$, etc. comme les cosinus directeurs d'une droite.

Si donc, par chaque point $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de la surface nous menons une droite de direction définie par ces cosinus, d'après la relation (5), cette droite sera l'élément d'une congruence normale à une famille de surfaces. On obtiendra les surfaces de cette famille en posant $-i\theta_4 = \text{const.}$

Ainsi donc, une surface ξ étant donnée, on en déduit par de simples dérivations une congruence normale à une famille de surfaces dont l'élément linéaire renferme six constantes arbitraires.

La symétrie de la relation (5) montre qu'on obtiendra des résultats analogues, quelles que soient les trois fonctions θ_{α} adoptées pour coordonnées de la surface.

Si l'on suppose θ_{β} définie à une constante près, les coordonnées de la famille de surfaces seront définies par la formule

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\varphi_{\beta} \theta_{\alpha} - \varphi_{\alpha} \theta_{\beta}}{\varphi_{\beta}},$$

où l'on donnera à β une des quatre valeurs 1, 2, 3, 4 et à α les trois autres valeurs.

II.

Méthode pour déduire de l'identité (2) des couples de surfaces applicables. — Nous remarquons tout d'abord que le problème équivalent à la détermination des surfaces se correspondant par orthogonalité des éléments linéaires.

Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3; \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ les coordonnées respectives des deux surfaces, que nous supposons se correspondre par orthogonalité des éléments linéaires.

L'identité (5) devient alors

$$d\theta_3 d\theta'_3 = \frac{K^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} \right) du du_1.$$

Remarquons d'abord qu'on ne saurait avoir

$$K^2 = 0,$$

car alors, les quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ seraient liées par une relation linéaire, ce qui est contre notre hypothèse.

On vérifie que les surfaces satisfaisant l'identité précédente sont définies par le système

$$\begin{aligned} 2\theta = \varphi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u_1} \xi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons supprimé l'indice 4 dans la première équation. Cette équation s'intègre immédiatement. Désignant par U, U_1 deux fonctions respectives de u et de u_1 ; par U', U'_1, U'', U''_1 leurs dérivées premières et secondes, on trouve

$$(6) \quad \xi = \varphi (U' + U'_1) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} U - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} U_1,$$

et la seconde équation prend la forme

$$(7) \quad U''_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0.$$

Telle est, en définitive, l'équation dont l'intégration donnera la solution du problème.

Ainsi donc, si l'on considère comme coordonnées cartésiennes de deux surfaces Σ, Σ' trois combinaisons linéaires convenablement choisies des coordonnées des développées moyennes S, S' relatives à deux surfaces S_1, S'_1 ainsi que des segments focaux de celles-ci, les surfaces Σ, Σ' se corres-

pondent par orthogonalité des éléments linéaires, toutes les fois que les surfaces S_1 , S'_1 ayant même représentation sphérique seront définies par les équations (6) et (7).

La proposition s'applique encore au cas où la correspondance entre les points des surfaces S_1 , S'_1 serait celle de méridiens à parallèles que nous avons définie plus haut.

Nous avons vu comment il faut particulariser les constantes a_α , b_α , . . . , si l'on veut que les fonctions θ_α , θ'_α représentent les coordonnées de la développée, et le segment focal correspondant.

On aura alors

$$\theta_1 = \rho = 0.$$

D'où cette conclusion

Pour que les développées moyennes S , S' relatives à deux surfaces S_1 , S'_1 de même représentation sphérique, se correspondent par orthogonalité des éléments linéaires, il faut que l'une des deux surfaces, par exemple S , soit une surface minima, et que la seconde surface S' soit la développée d'une surface S'_1 vérifiant la relation

$$U_1''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0.$$

Cette proposition établie, il est aisé de déterminer la signification géométrique de cette équation.

Remarquons, en effet, que les lignes asymptotiques de la surface minima sont données par l'équation

$$U''' du^2 + U_1''' du_1^2 = 0.$$

D'autre part, les lignes de courbure de la surface S'_1 sont définies par la relation

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} du^2 - \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} du_1^2 = 0.$$

L'équation (7) exprime donc que les lignes asymptotiques de la surface minima correspondent aux lignes de courbure de la surface dont la développée moyenne correspond à la première

par orthogonalité des éléments linéaires. Nous retrouvons ainsi un résultat signalé par M. Cosserat ⁽¹⁾.

On sait que la surface la plus générale, dont les développables de la congruence des normales découpent sur la développée moyenne un réseau conjugué, s'obtient en prenant la surface la plus générale, correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à une surface minima de même représentation sphérique que la proposée ⁽²⁾.

Cette proposition, rapprochée de celle que nous venons d'énoncer, permet de conclure que les surfaces correspondant aux surfaces minima de la façon indiquée sont précisément les surfaces données par l'équation (7).

Par tout ce que nous venons de dire, on voit l'importance du rôle géométrique que joue cette équation.

Cherchons une expression des coordonnées des surfaces découpées suivant un réseau conjugué, par les développables de la congruence des normales, à une des surfaces dont elles sont les développées moyennes.

Nous venons de voir que ces coordonnées sont définies par trois fonctions θ'_α ; les constantes a_α , b_α , ... étant convenablement choisies, et la fonction ξ' qui y figure par ses dérivées, vérifiant l'équation (7).

Soit ω une solution quelconque de cette équation.

On vérifie que les relations

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} = U'' \omega, \quad \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = -U_1'' \omega$$

sont compatibles et définissent des solutions de l'équation vérifiée par ω .

Or, on a

$$d\theta'_\alpha = \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \right) du + \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u_1^2 \partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \right) du_1.$$

D'où l'on tire, en vertu des relations précédentes,

$$(8) \quad \theta'_\alpha = \frac{1}{2} \int \left(\varphi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} \omega \right) U'' du - \frac{1}{2} \int \left(\varphi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \omega \right) U_1'' du_1.$$

⁽¹⁾ Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1893).

⁽²⁾ DARBOUX, *Th. des surfaces*, t. IV, p. 91.

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher ces formules de celles que donne M. Darboux (1).

On remarquera que les fonctions φ_α jouent un rôle analogue aux fonctions θ_α de l'éminent géomètre. De part et d'autre, nous avons un système de quatre solutions, reliées par une forme quadratique, relative à une même équation aux dérivées partielles, dont la solution générale intervient dans les expressions des coordonnées.

Seulement, tandis que les fonctions θ_α , ω de M. Darboux vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial u_1} = k \theta,$$

les fonctions φ_α , ω qui figurent dans nos formules vérifient l'équation (7).

III.

Solutions diverses de l'équation (7). — Cette équation est d'abord vérifiée par le système

$$\begin{aligned} m \xi &= \varphi_\alpha (U' + U'_1) - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} U - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} U_1 \\ m' \xi' &= \varphi_\alpha (U' - U'_1) - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} U + 2 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} U_1, \end{aligned}$$

où m, m' représentent des constantes quelconques. On a alors

$$d\theta_\alpha = d\theta'_\alpha = 0.$$

En donnant à β les trois valeurs que ne prend pas α , on aura

$$\sum d\theta_\beta d\theta'_\beta = 0,$$

et nous obtenons ainsi des surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments linéaires.

Si l'on pose

$$\theta_\alpha = \varphi = 0, \quad \theta'_\alpha = \varphi' = 0,$$

les deux surfaces sont des surfaces minima associées, surfaces

(1) DARBOUX, *Th. des surfaces*, t. IV, p. 93.

dont les propriétés concordent bien avec les résultats que nous venons d'établir.

Faisons au contraire

$$\theta_\alpha = \gamma, \quad \theta'_\alpha = \gamma'.$$

Il viendra

$$\sum d\theta_\beta d\theta'_\beta = dx dx' + dy dy' + d\rho d\rho' = 0.$$

Les surfaces définies par les fonctions ξ , ξ' sont des surfaces à développées moyennes planes.

La relation précédente montre qu'il suffira de relever sur le plan des x , z les segments $-i\rho$, $-i\rho'$ dans des directions telles que l'on ait $\rho\rho' > 0$, pour obtenir des surfaces se correspondant par orthogonalité des éléments linéaires.

Supposons toujours ξ donné par la relation (6), nous trouverons une seconde solution de l'équation (7) en posant

$$\zeta' = U' - U_1.$$

Cette équation détermine l'ensemble des surfaces qui admettent pour développée moyenne les surfaces lieux des points également distants d'un point fixe et de la proposée.

Pour déduire de cette solution des surfaces applicables, il suffit de chercher les développées moyennes des surfaces définies par les relations

$$\zeta = \frac{\xi + \xi'}{2}, \quad \zeta' = \frac{\xi - \xi'}{2},$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} - \int \frac{1+u^2}{4} U''' du + \int \frac{3-u_1^2}{4} U_1''' du_1, & \quad x'' = \int \frac{3-u^2}{4} U''' du - \int \frac{1+u_1^2}{4} U_1''' du, \\ i \int \frac{u^2-1}{4} U''' du - i \int \frac{3+u_1^2}{4} U_1''' du_1, & \quad y'' = -i \int \frac{3+u^2}{4} U''' du + i \int \frac{u_1^2-1}{4} U_1''' du, \\ \int u_1 U_1''' du_1, & \quad z'' = \int u U''' du. \end{aligned}$$

Ces deux surfaces sont des surfaces de translation, engendrées chacune au moyen d'une courbe plane quelconque et d'une courbe qui se transforme en courbe minima quand on multiplie par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sa distance au plan des $x\gamma$.

Une solution ω de l'équation (7) ayant été ainsi déterminée, on pourra en déduire d'autres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ en nombre indéfini, au moyen des formules précédemment établies

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial u^2} = \omega_{n-1} U''',$$

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial u_1^2} = \dots = \omega_{n-1} U_1''.$$

Chaque solution introduira quatre nouvelles constantes arbitraires.

Dans le cas que nous venons de traiter, nous avons considéré une surface minima quelconque, et nous en avons déduit des solutions particulières de l'équation (7) correspondante. Nous allons maintenant considérer des surfaces minima particulières, qui nous permettront de déterminer l'intégrale générale de (7).

Il nous suffit de poser

$$U = au^3, \quad U_1 = a_1 u_1^3.$$

a, a_1 désignant des constantes.

On a alors

$$\xi = - \frac{uu_1 + 3}{2} (au^2 + a_1 u_1^2).$$

Nous avons alors à résoudre l'équation

$$a_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0,$$

dont on obtient la solution générale en posant

$$\xi' = F(\alpha u + \alpha_1 u_1) + F_1(\beta u + \beta_1 u_1),$$

$\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ désignant ici des constantes liées par les relations

$$a_1 \alpha^2 + a \alpha_1^2 = 0, \quad a_1 \beta^2 + a \beta_1^2 = 0.$$

Il suffira de remplacer dans la formule (8) ω par la valeur de ξ' que nous venons de trouver pour obtenir les coordonnées des surfaces cherchées.

Si l'on fait

$$\alpha = a_1,$$

la surface minima est celle d'Enneper. On peut faire alors

$$\alpha = \beta = 1, \quad \alpha_1 = -\beta_1 = i.$$

Si l'on suppose maintenant que les points des deux surfaces définies par les fonctions ξ, ξ' se correspondent de méridiens à parallèles; nous avons vu que, les fonctions x, y, z, ρ restant les mêmes, les fonctions x', y', z', ρ' seront remplacées par les suivantes : $-z', \rho', x', -y'$.

Nous avons alors

$$dx' dz - dx d\bar{z}' + dy d\bar{z}' - dy' d\bar{z} = 0.$$

Une rotation de l'une des surfaces autour de l'axe des y nous permettra d'écrire

$$dx dx'' + dz dz'' + dy d\bar{z}' - dy' d\bar{z} = 0.$$

Il sera aisé de déduire de là des surfaces applicables, par les procédés précédemment indiqués.

Entre autres surfaces, se correspondant par orthogonalité des éléments, nous signalerons les développées moyennes des surfaces définies respectivement par les relations

$$\begin{aligned} \xi &= U' + U_1', \\ \xi' &= u_1(uU' - 2U) - u(u_1U_1' - U_1). \end{aligned}$$

On a pour les premières surfaces

$$z + i\rho = 0,$$

et pour les secondes

$$z' - i\rho' = 0.$$

La première équation définit, comme nous l'avons dit, les surfaces enveloppes d'une sphère tangente à un plan fixe, dont le centre décrit la développée moyenne. La seconde équation définit la classe des surfaces symétriques des premières par rapport au plan des xy .

Posons par exemple

$$U = cu^3, \quad U_1 = cu_1^3.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \xi &= 3c(u^2 + u_1^2), \\ \xi' &= cuu_1(u^2 - u_1^2). \end{aligned}$$

Les deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments sont alors définies par des relations de la forme

$$\begin{aligned} z &= \alpha(y^2 - x^2), \\ z' &= \beta(x' + iy')^{\frac{2}{3}} + \gamma(x' - iy')^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

α, β, γ représentant des constantes.

Le paraboloid hyperbolique défini par la première surface est la développée moyenne de la cyclide de Dupin définie par la fonction ξ .

IV.

Cas où les deux fonctions ξ, ξ' sont identiques. — Jusqu'ici nous avons considéré l'identité

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha-1} d\theta_{\alpha} d\theta'_{\alpha} - \frac{K^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} \right) du du_1,$$

comme relative à deux surfaces distinctes. Supposons maintenant que les deux surfaces, et par suite les deux fonctions ξ, ξ' qui les définissent, viennent à se confondre.

L'identité précédente prend alors la forme

$$(9) \quad \sum d\theta_{\alpha}^2 = K^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du du_1.$$

Si l'on désigne par φ la demi-somme des rayons de courbure que nous avons désignée précédemment par $-i\varphi$; et par x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, il vient

$$(10) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du du_1.$$

Nous obtenons ainsi une forme de l'élément linéaire relatif à une surface quelconque, qui permet d'établir plusieurs relations entre les éléments géométriques d'une surface.

Désignons par R, R' les rayons de courbure de la surface définie par la fonction ξ ; par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à cette surface; par $d\tau$ l'élément linéaire de la sphère de rayon 1.

Nous avons ici

$$\rho = \frac{R + R'}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = \left(\frac{R - R'}{1 + uu_1} \right)^2,$$

$$d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = \frac{4 du du_1}{(1 + uu_1)^2}.$$

On a donc

$$ds^2 = \left[d \left(\frac{R + R'}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{R - R'}{2} \right)^2 d\sigma^2.$$

Pour

$$R + R' = 0,$$

équation des surfaces minima, on aura

$$ds^2 = R^2 d\sigma^2.$$

Pour

$$R - R' = 0,$$

équation des surfaces réglées imaginaires de Monge (1), on aura

$$ds^2 = dR^2.$$

On retrouve ainsi des résultats connus.

Si l'on désigne par ds_1 , ds_2 les éléments linéaires relatifs aux deux nappes de la surface des centres, on trouve encore la relation

$$4 ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2 dR dR'.$$

Revenons à la relation (9) et désignons par γ l'angle que fait le segment de direction $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ passant par le point de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ avec l'élément linéaire en ce point.

Désignant par ds cet élément linéaire, on trouve

$$d(-i\theta_4) = ds \cos \gamma.$$

D'où

$$ds^2 \sin^2 \gamma = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du du_1.$$

Or, $ds \sin \gamma$ représente la projection de l'élément linéaire ds sur une quelconque des surfaces normales au segment précédemment défini. On voit donc que si l'on fait varier les constantes a_2 ,

(1) MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, rédigée par Liouville, 5^e édition.

$b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ la surface de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ se modifiera, la projection de son élément linéaire demeurant invariable.

Supposons maintenant que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ représentent les coordonnées de la développée moyenne et $-i\theta_4$ le segment focal correspondant, nous pourrions énoncer la proposition suivante :

La projection de l'élément linéaire de la développée moyenne sur la surface proposée est la même aux points correspondants pour toutes les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = F(uu_1);$$

F désigne ici une fonction donnée quelconque de u et de u_1 .

Si le segment se réduit à 0 comme cas particulier, on retrouve les surfaces minima associées. Pour ces surfaces, les projections des éléments linéaires se confondent avec ces éléments et l'on a par suite des surfaces applicables.

Nous venons de voir que l'on a

$$d\rho = ds \cos \gamma.$$

D'autre part, la relation (9) montre que pour les courbes de paramètres u et u_1 on a

$$ds^2 = d\rho^2.$$

D'où

$$\cos \gamma = 1.$$

Cette formule semblerait devoir autoriser à conclure que l'on a

$$\gamma = 0.$$

Mais alors, il faudrait admettre que les normales à une surface quelconque sont tangentes à sa développée moyenne, proposition évidemment fausse.

Nous devons donc chercher une explication de la valeur trouvée pour $\cos \gamma$, dans l'hypothèse de l'existence de droites isotropes, perpendiculaires aux éléments linéaires de paramètres u, u_1 relatifs à la développée moyenne et situées dans un même plan avec ces éléments et la normale à la proposée.

Soumettant cette hypothèse au calcul, nous trouvons la congruence définie par le système

$$\begin{aligned} \frac{X - \theta_1}{\varphi_1 d\theta_1 d\theta_1 + \varphi_1 ds^2} &= \frac{Y - \theta_2}{\varphi_1 d\theta_1 d\theta_2 + \varphi_2 ds^2} \\ &= \frac{Z - \theta_3}{\varphi_1 d\theta_1 d\theta_3 + \varphi_3 ds^2} = \frac{\sqrt{(X - \theta_1)^2 + (Y - \theta_2)^2 + (Z - \theta_3)^2}}{i\varphi_1 \sqrt{\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}} du du_1}, \end{aligned}$$

ds désigne ici un élément linéaire donné quelconque de la développée moyenne qui a pour coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

On voit que pour $du = 0$ ou $du_1 = 0$ les formules précédentes définissent une congruence isotrope. Alors les coordonnées de ces droites vérifient le système

$$\begin{aligned} (X - \theta_1)^2 + (Y - \theta_2)^2 + (Z - \theta_3)^2 &= 0, \\ (X - \theta_1) d\theta_1 + (Y - \theta_2) d\theta_2 + (Z - \theta_3) d\theta_3 &= 0, \end{aligned}$$

les différentielles $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3$ prenant successivement les valeurs correspondant aux courbes de paramètres u et u_1 .

Nous obtenons ainsi deux systèmes de droites, caractéristiques respectives des surfaces réglées, enveloppes du cône isotrope, dont le sommet décrit les courbes de paramètres u et u_1 .

Ces considérations nous permettent de formuler la proposition suivante :

Soit M un point quelconque de la développée moyenne S relative à une surface donnée S_1 . Considérons sur S les deux courbes correspondant aux génératrices rectilignes de la représentation sphérique de S_1 et passant par le point M; les deux plans tangents au cône isotrope de sommet M qui enveloppent respectivement ces deux courbes donneront par leur intersection la normale à S_1 .

Si S est une surface de translation, la surface S_1 sera définie par l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

(1) Voir thèse de doctorat : *Sur une classe de surfaces*, 1902.

Nous allons laisser de côté l'étude de l'identité (9), considérée dans sa forme la plus générale, et nous nous bornerons au cas où ξ est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = U' U'_1,$$

U' , U'_1 désignant les dérivées premières de deux fonctions respectives de u et de u_1 .

La relation (10) prend alors la forme

$$ds^2 = d\rho^2 + dU dU_1,$$

identité qu'on peut encore écrire

$$ds^2 = d\rho^2 + \left[d\left(\frac{U + U_1}{2}\right) \right]^2 + \left[d\left(i \frac{U_1 - U}{2}\right) \right]^2.$$

Posons

$$x' = \frac{U + U_1}{2},$$

$$y' = i \frac{U_1 - U}{2},$$

$$z' = \rho.$$

Il viendra

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

et les surfaces de coordonnées $x, y, z; x', y', z'$ seront applicables.

Ces surfaces seront donc données par le système

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left[(u + u_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], & x' = \frac{U + U_1}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \left[(u_1 - u) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], & y' = i \frac{U_1 - U}{2}, \\ z = \frac{1}{2} \left[(uu_1 - 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right], & z' = \frac{1}{2} \left[(uu_1 + 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \right. \end{cases}$$

On prendra pour ξ une solution quelconque de l'équation

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = U' U'_1.$$

Le problème est donc ramené à la résolution de cette équation.

Les surfaces définies par cette équation jouissent d'une propriété caractéristique.

De la relation

$$ds^2 = d\rho^2 + dU dU_1,$$

on tire

$$ds^2 \sin^2 \gamma = dU dU_1.$$

Cette formule montre que l'équation précédente définit les surfaces sur lesquelles les triangles infinitésimaux, projections des triangles infinitésimaux formés avec l'élément linéaire de la développée moyenne, peuvent être déplacés sans déformation.

Ces formules jouissent donc d'une propriété analogue à celle des surfaces développables.

On peut encore chercher les relations qui existent entre les surfaces de coordonnées x, y, z d'une part, x', y', z' de l'autre.

Nous venons de voir que ces surfaces sont applicables.

De plus, la relation $z' = \rho$ montre que la distance des premières à la surface définie par ξ est égale à la distance des secondes au plan des xy .

Enfin, la relation $ds^2 - d\rho^2 = dx'^2 + dy'^2 = dU dU_1$ montre que la projection de l'élément linéaire de la première sur la surface définie par ξ , est égale à la projection de l'élément linéaire sur le plan des xy .

Considérons d'abord le cas particulier où la solution de l'équation (12) est de la forme

$$\xi = 2FF_1,$$

F, F_1 désignant des fonctions respectives de u et de u_1 .

Étant donné le but que nous poursuivons, nous pouvons sans inconvénient nous donner *a priori* les fonctions F, F_1 et déterminer ensuite U, U_1 par la condition que l'équation aux dérivées partielles proposée admette cette valeur de ξ . Il suffira évidemment de poser

$$U' = 2F''F,$$

$$U'_1 = 2F'_1F_1.$$

Le couple de surfaces applicables est alors donné par le

système

$$\begin{aligned}x &= F'_1(uF' - F) + F'(u_1F'_1 - F_1), \\y &= iF'_1(F - uF') + iF'(u_1F'_1 - F_1), \\z &= (u_1F'_1 - F_1)(uF' - F) - F'F'_1; \\x' &= \int FF'' du + \int F_1F''_1 du_1, \\y' &= i \int F_1F''_1 du_1 - i \int FF'' du, \\z' &= (u_1F'_1 - F_1)(uF' - F) + F'F'_1.\end{aligned}$$

La formule

$$\xi = {}_2FF_1$$

donne la solution générale de l'équation aux dérivées partielles

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

x, y, z, ρ ayant la signification donnée précédemment. On en conclut une propriété caractéristique des surfaces trouvées.

Les surfaces de coordonnées x, y, z sont les développées moyennes des surfaces enveloppes de sphères passant par un point fixe dont le centre décrit cette développée.

Les coordonnées de ces surfaces vérifient les relations

$$\begin{aligned}z &= \frac{F'}{2(F - uF')} (x + iy) + \frac{uF' - F}{2F'} (x - iy), \\z &= \frac{F'_1}{2(F_1 - u_1F'_1)} (x - iy) + \frac{u_1F'_1 - F_1}{2F'_1} (x + iy).\end{aligned}$$

Ces formules montrent que les lignes de paramètres u, u_1 sont des courbes planes dont les plans passent par l'origine.

Les coordonnées des deux surfaces d'un couple sont liées par la relation

$$z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Des formules qui donnent x', y' , combinées avec l'équation qu'on obtient en égalant les deux valeurs de z données précédemment on déduit que les coordonnées $x, y; x', y'$ sont liées par une relation de la forme

$$\frac{y}{x} = \varphi(x', y').$$

Des deux relations que nous venons d'établir entre les deux surfaces du couple, on peut déduire la conclusion suivante :

Soit donné, sur la première surface, un réseau déterminé par les intersections de deux familles de plans, les premiers étant parallèles au plan des xy , les seconds passant par l'axe des z ; si l'on fait correspondre sur les deux surfaces les lignes de même longueur, à ce réseau de la première correspondra sur la seconde un réseau déterminé par les intersections d'une famille de sphères concentriques, et d'une famille de cylindres de génératrices rectilignes parallèles à l'axe des z .

Prenons par exemple

$$V = \sqrt{a} u^m,$$

$$F_1 = \sqrt{a} u_1^{m_1}.$$

Il vient

$$x + iy = 2am_1(m-1)u^m u_1^{m_1-1},$$

$$x - iy = 2am(m_1-1)u^{m-1}u_1^{m_1},$$

$$z = au^{m-1}u_1^{m_1-1}[(m-1)(m_1-1)uu_1 - mm_1];$$

$$x' + iy' = 2a \frac{m(m-1)}{2m-1} u^{2m-1},$$

$$x' - iy' = 2a \frac{m_1(m_1-1)}{2m_1-1} u_1^{2m_1-1},$$

$$z' = au^{m-1}u_1^{m_1-1}[(m-1)(m_1-1)uu_1 + mm_1].$$

Dans le cas particulier où les constantes m, m_1 satisfont à la condition

$$2mm_1 - m - m_1 + 1 = 0,$$

les coordonnées des deux surfaces satisfont aux relations

$$z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

D'où l'on tire

$$x^2 + y^2 + x'^2 + z'^2 = 0.$$

Pour $m = m_1$ on a des surfaces de révolution.

Parmi les couples de surfaces applicables que définissent les équations (11), il en est qui se composent de surfaces identiques. Le calcul montre que ces surfaces sont celles pour lesquelles on a une des deux relations

$$\rho + z = 0, \quad \rho - z = 0.$$

Nous connaissons la signification géométrique de ces surfaces. Elles sont définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

V.

Interprétation de l'équation $rt = \text{const.}$ — Nous allons maintenant considérer l'équation (12) dans le cas où l'on a

$$U'U'_1 = -K^2 = \text{const.},$$

et écrivant cette relation avec la notation des coordonnées cartésiennes nous aurons

$$(13) \quad rt + K^2 = 0.$$

Décrivant le premier membre par rapport à y , il vient

$$t \frac{\partial r}{\partial y} + r \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

D'où, en tenant compte de l'équation proposée

$$K^2 \frac{\partial t}{\partial y} - t^2 \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(14) \quad \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - K^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît une équation de Monge et d'Ampère.

En appliquant la méthode des caractéristiques, on trouvera une combinaison intégrable pour chaque système. D'où l'on déduit les deux relations

$$\frac{\partial q}{\partial y} = K e^{\frac{\partial r}{K}}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = K e^{\frac{\partial y}{K}}.$$

Si nous considérons maintenant q, x, y comme les coordonnées d'une surface, les relations précédentes nous montrent que

nous obtiendrons des surfaces développables. L'intégration des équations trouvées se fera donc en écrivant les formules qui définissent de pareilles surfaces.

Bornons-nous à la première équation. Il vient

$$\begin{aligned} q &= ax + Ke^{\frac{a}{K}}y + \alpha, \\ 0 &= a' \left(x + e^{\frac{a}{K}}y \right) + 1. \end{aligned}$$

La détermination de z s'achèvera par une quadrature.

Si nous procédons par rapport à x comme nous avons procédé par rapport à y , nous obtiendrons deux relations de l'équation proposée renfermant chacune une fonction arbitraire.

Revenant aux notations primitives nous voyons que ξ sera défini par le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= au + Ke^{\frac{a}{K}}u_1 + \alpha, \\ 0 &= a' \left(u + e^{\frac{a}{K}}u_1 \right) + 1. \end{aligned}$$

L'équation (13) se prête à quelques transformations intéressantes que nous allons brièvement exposer.

Pour plus d'ordre dans les calculs, posons

$$q = z_1, \quad x = x_1, \quad y = y_1.$$

L'équation (14) devient

$$q_1^2 r_1 - K^2 t_1 = 0,$$

équation de Monge et d'Ampère dont nous venons de déterminer deux solutions particulières.

Appliquons à cette équation la transformation de Legendre.

Nous remarquerons toutefois qu'il faudra exclure de cette transformation les solutions trouvées précédemment comme vérifiant la relation

$$s_1^2 - r_1 t_1 = 0.$$

On a ici

$$z_1 = z_2 - p_2 x_2 - q_2 y_2,$$

$$x_1 = p_2,$$

$$y_1 = q_2,$$

et l'on trouve

$$K^2 r_2 - y_2^2 t_2 = 0,$$

nouvelle équation de Monge et d'Ampère qui offre elle aussi une combinaison intégrable dans chaque système, combinaisons qui nous ramènent aux solutions précédentes.

Posons maintenant

$$x_3 = x_2 + K \log \frac{y_2}{C},$$

$$y_3 = x_2 - K \log \frac{y_2}{C},$$

C désignant une constante arbitraire.

On obtient l'équation de Laplace

$$4Ks_3 + p_3 - q_3 = 0.$$

Posons enfin

$$x_3 = x_4, \quad y_3 = y_4, \quad z_3 = z_4 / \sqrt[4]{K}$$

et l'on obtient l'équation de Laplace à invariants égaux

$$16K^2s_4 + z_4 = 0.$$

Nous avons pris pour point de départ des résultats exposés en dernier lieu la forme quadratique définie par la relation (9). Toutefois, remarquons-le en terminant, le rôle principal de cette formule n'est pas dans la détermination de surfaces applicables. Elle intervient plus naturellement dans la recherche d'un problème plus général qu'on peut formuler comme il suit :

Déterminer deux surfaces variables S, S_1 telles que les dimensions des projections orthogonales sur S_1 des figures infinitésimales tracées sur S soient indépendantes de la variation des surfaces.

Si l'on impose aux deux surfaces la condition de devenir identiques, on retrouve le problème des surfaces applicables.

Le problème étant ainsi posé, on voit tout de suite que la formule (9) en donne des solutions.

Si, d'abord, nous nous donnons une surface quelconque S_1 définie par la fonction ξ , les projections sur cette surface fixe des figures infinitésimales, tracées sur une surface S de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ variant par conséquent avec les constantes $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ seront indépendantes de la variation de cette surface. Nous obtenons ainsi une première solution du problème.

Nous pouvons encore nous donner une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = F(u, u_1),$$

F désignant une fonction arbitrairement choisie. A la solution générale de cette équation correspondent deux surfaces S, S_1 variant toutes les deux avec les deux fonctions arbitraires que renferme cette solution. Or, encore ici, les projections considérées, dépendant uniquement de la nature de la fonction F , sont indépendantes de la variation des fonctions arbitraires qui entrent dans la solution, et par suite de la nature des surfaces S, S_1 .

SUR LES FONCTIONS MONODROMES A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

(TROISIÈME NOTE);

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Soit $F(z)$ une fonction monodrome dans une certaine région R comprenant tous les points du plan à l'extérieur d'un cercle Γ ayant pour centre l'origine, et qui n'a dans R qu'un point critique A à l' ∞ ⁽¹⁾. F est développable dans R d'après la formule de Laurent (*fig. 1*)

$$F(z) = \varphi_0(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\varphi_0(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_l z^l + \dots,$$

$$\varphi(y) = B_1 y + \dots + B_l y^l + \dots$$

La série $\varphi_0(z)$ a un rayon de convergence infini : c'est donc une fonction entière; dans la région R , $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ reste fini et même tend vers 0 avec $\frac{1}{z}$. C'est la croissance de $\varphi_0(z)$ aux environs de $z = \infty$ qui détermine la croissance de $F(z)$ pour $z = \infty$.

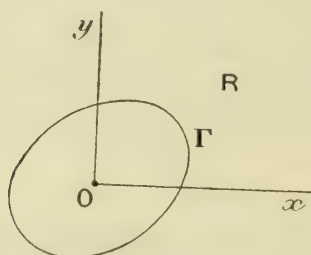
(1) Le changement de variable $z = z_1 + a$ nous ramènera au cas où l'origine est en dehors de la courbe Γ . Le changement de variables $z = \frac{1}{z_2 - b}$ au cas d'une fonction monodrome dans une région limitée comprenant un point critique unique et essentiel.

Il sera donc naturel de classer la croissance de $F(z)$ comme celle de $\varphi_0(z)$ pour $z = \infty$. Si $\varphi_0(z)$ est d'ordre fini ρ , on dira que $F(z)$ est d'ordre fini ρ aux environs de $z = \infty$, et l'on aura

$$|F(z)| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε étant donné, fini et positif) si $r = |z|$ est suffisamment grand.

Fig. 1.



Si $\varphi_0(z)$ est d'ordre infini, on dira que $F(z)$ est d'ordre infini; toute classification des ordres infinis ⁽¹⁾ des fonctions entières s'appliquera aux fonctions $F(z)$.

Nous dirons que $F(z)$ est une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$.

En appliquant à $F(z)$ des raisonnements semblables à ceux de la théorie des fonctions entières et quasi-entières ⁽²⁾, nous lui étendrons : 1° le théorème de Weierstrass sur la représentation des fonctions entières par un produit infini; 2° ceux de M. Borel sur les fonctions entières d'ordre fini à croissance régulière; 3° celui de Laguerre-Chio sur les racines de la dérivée d'une fonction entière réelle, d'ordre < 2 , et dont toutes les racines sont réelles; 4° enfin les théorèmes de MM. Picard et Borel sur la fréquence des racines des fonctions entières et méromorphes.

Nous retrouverons ainsi une démonstration du théorème bien connu de M. Picard sur les racines des équations $f(z) = a$ (a cons-

⁽¹⁾ Voir, par exemple, BOUTROUX, *Comptes rendus*, 3 mars 1902 et notre Note des *Comptes rendus*, 9 février 1903.

⁽²⁾ Voir, par exemple, BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, et notre Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 329. Les fonctions étudiées ici comprennent évidemment les fonctions quasi-entières proprement dites. La lecture de notre Note, qui sera suivie par d'autres, exige seulement la connaissance des deux travaux ci-dessus et de notre Note des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1902, page 456.

tante quelconque) aux environs d'un point singulier essentiel.

Incidentement, nous établirons ce résultat :

Étant donné un contour C quelconque, soit

$$f(z) = A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_l z^l + \dots$$

une fonction entière,

$$f_l(z) = A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_l z^l,$$

on peut toujours prendre λ assez grand pour qu'à toute racine de $f_l(z) = 0$ dans C ($\lambda \leq l$) en corresponde dans C pour $f(z)$ une et une seule qui en diffère aussi peu qu'on veut.

II.

On sait que $F(z)$ n'a dans R que des zéros isolés. Soient dans R

$$a_1, a_2, \dots,$$

les zéros de $F(z)$ rangés par ordre de modules croissants. On peut toujours former un produit canonique de facteurs primaires

$$P(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{R_n(z)}$$

convergent et ayant les mêmes zéros que $F(z)$ dans R : $P(z)$ est une fonction entière.

Considérons la fonction

$$\frac{F(z)}{P(z)} = \Phi(z).$$

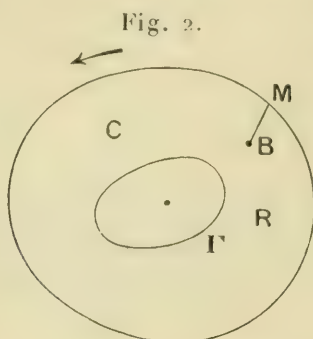
Elle n'a plus de zéros dans la région R où elle est monodrome : la fonction $\log \Phi$ n'a plus dès lors dans R que le point critique $z = \infty$. Soient

$$\Phi = \rho e^{i\psi},$$

$$\log \Phi = \log \rho + i(\psi + 2k\pi),$$

et deux points B et C de la région R. Étudions la variation de $\log \Phi$ quand on suit dans le plan des z un chemin quelconque allant de B en C et restant dans la région (*fig. 2*). Ce chemin équivaut à un chemin déterminé allant de B en C (une droite dans le cas

de la figure) et à un certain nombre de lacets ⁽¹⁾ issus de B et entourant Γ . Quand on suit un de ces lacets en partant de B avec la valeur $\log \rho + i\psi$ de $\log \Phi$, et revenant en B, $\log \Phi$ prend la nouvelle valeur $\log \rho + i(\psi + 2\lambda\pi)$. Par suite $\log \Phi - \lambda \log z$ conserve



la même valeur : c'est une fonction monodrome dans la région R ; d'après le théorème de Laurent

$$\log \Phi z^{-\lambda} = F_1(z).$$

$F_1(z)$ étant de la même forme que $F(z)$ dans R, d'où

$$\Phi = z^\lambda e^{F_1(z)}$$

et

$$F(z) = z^\lambda P(z) e^{F_1(z)}.$$

On peut remplacer évidemment $z^\lambda P(z)$ par $Q(z)$, étant entendu que $Q(z)$ pourra avoir un pôle pour $z = 0$, et

$$F(z) = Q(z) e^{F_1(z)}.$$

D'où ce théorème :

THÉORÈME I. — Soit $F(z)$ une fonction monodrome dans une région R formée de tous les points du plan des z extérieurs à un cercle Γ ayant pour centre l'origine, $F(z)$ n'ayant dans la région R qu'un point critique à l' ∞ . On a dans R

$$F(z) = Q(z) e^{F_1(z)} = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_0(z),$$

$F_1(z)$ étant de même forme que $F(z)$, $Q(z)$ une fonction de

⁽¹⁾ Nous appelons ici *lacet* un contour allant de B à un point d'un cercle de rayon R' très grand, comprenant ce cercle décrit dans le sens de la flèche, puis revenant en B.

la forme

$$\frac{\alpha_k}{z^k} + \dots + \frac{\alpha_1}{z} + Q_1(z),$$

$Q_1(z)$ et $\varphi_0(z)$ des fonctions entières, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction monodrome qui reste finie dans la région R.

Nous dirons que $F(z)$ est quasi-entière dans R pour $z = \infty$ ⁽¹⁾.

Soit encore

$$F_1(z) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + \psi_0(z)$$

dans R, $\psi_0(z)$ étant une fonction entière, et $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ restant fini dans la région

$$F(z) = Q(z) e^{\psi_0(z)} e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^k} Q_2(z) e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

COROLLAIRE I ⁽²⁾. — $F(z)$ est de la forme

$$F(z) = \frac{1}{z^k} Q_2(z) e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où k est entier positif ou nul, $Q_2(z)$ une fonction entière, $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction monodrome et finie dans la région R.

Si $F(z)$ est d'ordre fini, il en est de même de $Q_2(z)$ et réciproquement.

COROLLAIRE II. — Si $F(z)$ est d'ordre fini ρ , il en est de même de $Q_2(z)$, et réciproquement. F , Q_2 , φ_0 sont simultanément d'ordre fini ρ ou d'ordre infini.

L'ordre étant fini, la croissance de $F(z)$ pour $z = \infty$ est régulière en même temps que celle de Q_2 et φ_0 .

COROLLAIRE III. — La condition nécessaire et suffisante pour que la croissance de $F(z)$ supposé d'ordre fini pour $z = \infty$ soit

(1) Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas où ∞ est un pôle pour $F(z)$: $Q_1(z)$ est alors un polynome ainsi que $\varphi_0(z)$. $F(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines ainsi que sa dérivée.

(2) Si $F(z)$ est réel pour z réel, $Q(z)$ l'est; on peut prendre pour $F_1(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, des valeurs réelles. Il en est de même pour $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\varphi_0(z)$.

régulière pour $z = \infty$ est que la distribution des zéros soit régulière aux environs de ce point.

Les trois fonctions F , Q_2 , φ_0 sont simultanément à croissance régulière ou irrégulière pour $z = \infty$.

On conçoit maintenant que toutes les égalités rencontrées dans la théorie des fonction entières et dont on a démontré, avec ou sans restriction, la nécessité ou l'impossibilité en faisant intervenir seulement soit les ordres de grandeur des fonctions entières et de leurs dérivées pour $z = \infty$, soit plus généralement les propriétés qui sont communes aux fonctions entières et aux fonctions monodromes quasi-entières aux environs de $z = \infty$ s'étendront probablement avec les mêmes caractères à ces dernières. Ceci suffit à faire pressentir toute une catégorie de propriétés communes.

III.

THÉORÈME II. — *Soit $F(z)$ une fonction quasi-entière réelle dans R pour $z = \infty$. Supposons que $F(z)$ soit d'ordre < 2 et n'ait dans R qu'un nombre limité de racines imaginaires.*

Si $F(z)$ a une infinité de racines réelles, il en est de même de sa dérivée, et, dès que $|z|$ dépasse une limite déterminée, entre deux racines de $F(z)$, il y a une et une seule racine réelle de $F'(z)$: de plus $F'(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires.

Si la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines, il en est de même de sa dérivée.

Soit

$$\begin{aligned} F(z) &= X F_1(z) = z^\mu P(z) X e^{\psi(z)} \\ &= z^\mu e^{kz} \Pi \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n}} e^{\psi(z)}, \end{aligned}$$

X étant un polynome de degré pair qui a pour racines toutes les racines imaginaires de $F(z)$, en nombre limité, μ un entier, a_n une racine réelle de $F(z)$, $F_1(z)$, $\psi(z)$ des fonctions réelles, la dernière limitée pour $(z) = \infty$, k un nombre réel. On a

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{X'}{X} + \frac{\mu}{z} + k + \psi'(z) + \sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{z - a_n} \right).$$

1° Supposons que $F(z)$ n'ait qu'un nombre limité de racines. Multiplions les deux membres par un même facteur $X \prod (z - a_n)$. Le second membre devient

$$P_1(z) + \gamma_1(z),$$

où $P_1(z)$ est un polynome, $\gamma_1(z)$ une fonction de la forme

$$\frac{A_1''}{z} + \frac{A_2''}{z^2} + \dots$$

Les racines de $F'(z)$ annulent $P_1 + \gamma_1$. On peut toujours trouver L assez grand pour que, dès que $|z| > L$, $|\gamma_1(z)|$ soit aussi petit qu'on veut et $|P_1(z)|$ aussi grand qu'on veut. Les modules des racines de $F'(z)$ sont limités, et $F'(z)$ n'a dans R qu'un nombre limité de racines.

Quand $F(z)$ n'a dans R qu'un nombre limité de racines, il en est de même de $F'(z)$.

2° Supposons que $F(z)$ ait un nombre infini de racines. On a

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} \right) = -\frac{\mu}{z^2} + \psi''(z) - \sum \left(\frac{1}{z - a_n} \right)^2 + \frac{X''X - X'^2}{X^2}.$$

Or

$$\begin{cases} \psi(z) = A_0' + \frac{A_1'}{z} + \frac{A_2'}{z^2} + \dots, \\ \psi'(z) = -\frac{A_1'}{z^2} - \frac{2A_2'}{z^3} + \dots, \\ \psi''(z) = +\frac{2A_1'}{z^3} + \frac{2 \cdot 3 A_2'}{z^4} + \dots \end{cases}$$

Dès que $|z| \geq L$, $|\psi''(z)|$ est très petit par rapport à $\frac{1}{|z^2|}$. Si μ est positif, les mêmes raisonnements que pour les fonctions entières sont applicables; mais μ peut être négatif; nous allons donc raisonner sans nous préoccuper du signe de μ .

D'abord, pour les très grandes valeurs absolues de z réel, $\frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} \right)$ est négatif.

En effet, $X''X - X'^2$ est alors négatif: il suffira donc de montrer que

$$-\mu - \sum \frac{z^2}{(z - a_n)^2}$$

est négatif et croît indéfiniment en valeur absolue avec z .

Or, ou bien il y a à la fois une infinité de racines positives et négatives, ou bien le nombre des racines positives, par exemple, est limité.

S'il y a une infinité de racines positives, on a

$$\frac{z^2}{(z - a_n)^2} > 1$$

dès que $z > a_n$, a_n étant une quelconque de ces racines. Dès que z dépasse une certaine limite positive assez grande, $\sum \frac{z^2}{(z - a_n)^2}$ est aussi grand qu'on veut.

Un même raisonnement est applicable pour les valeurs négatives de z , s'il y a une infinité de racines négatives.

Quand ces deux circonstances ont lieu à la fois, $\frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} \right)$ est négatif pour z réel, sauf peut-être dans un intervalle fini de l'axe Ox .

Supposons maintenant, par exemple, que le nombre des racines positives seul soit limité. Pour de grandes valeurs positives de z , il y a k racines, positives et négatives, de valeurs absolues $< z$, et pour lesquelles

$$\frac{z^2}{(z - a_n)^2} > \frac{z^2}{4z^2} = \frac{1}{4},$$

k étant aussi grand qu'on veut. Dans ce cas encore $\frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} \right)$ est négatif pour z réel, sauf peut-être dans un intervalle fini de l'axe Ox .

Nous en concluons d'abord ce résultat :

Dès que $|z|$ dépasse une certaine limite finie, les racines réelles de $F'(z)$ séparent celles de $F(z)$ et réciproquement; entre deux racines réelles de $F(z)$ il y en a une et une seule de $F'(z)$.

Nous allons maintenant montrer que, si $F(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires, il en est de même de $F'(z)$.

Soit encore $z = x + yi$ une pareille racine de module très grand; on a

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{X'}{X} + \frac{F'_1(z)}{F_1(z)} \\ &= \frac{\mu(x - yi)}{|z|^2} + k + \psi'_1(z) + \sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{(x - a_n) - yi}{(x - a_n)^2 + y^2} \right) - \frac{X'}{X}, \end{aligned}$$

a_n étant réel.

$$\psi_1(z) = \frac{\Lambda_1}{z} + \frac{\Lambda_2}{z^2} + \dots,$$

$$\psi'_1(z) = -\frac{\Lambda_1}{z^2} + \frac{B_1}{z^3},$$

où B_1 est fini. Nous supposons Λ_1 réel. Le coefficient de i est de la forme

$$\frac{-\mu y}{|z^2|} + \frac{\Lambda_1}{|z^4|} 2xy - y \sum \frac{1}{(x - a_n)^2 + y^2} + y \Delta_1 + y \Delta_2,$$

$y \Delta_1$ provenant de $\frac{B_1}{z^3}$ et Δ_1 étant au plus du même ordre que $\frac{1}{|z^3|}$,
 $y \Delta_2$ de $\frac{X'}{X}$.

Considérons d'abord $y \left(-\frac{\mu}{|z|^2} - \sum \frac{1}{(x - a_n)^2 + y^2} \right)$, et soit

$$T = -\sum \frac{x^2 + y^2}{(x - a_n)^2 + y^2} - \mu.$$

Nous voulons démontrer que, quand $x^2 + y^2$ est assez grand, T est toujours négatif et croît indéfiniment avec $x^2 + y^2$. Le coefficient de y dans Δ_2 étant aussi négatif, comme nous le verrons tout à l'heure, et les autres coefficients de y étant d'ordre $\leq \frac{1}{|z^3|}$, il en résultera que le coefficient de y ne pourra s'annuler, et que y doit être nul, par suite la racine correspondante réelle.

Or on a, pour $x > 0$,

$$x^2 + y^2 \geq (x - a_n)^2 + y^2,$$

tant que $0 \leq a_n \leq 2x$. Si le nombre des racines réelles positives est illimité, et si l'on ne prend pas x limité et $\leq \xi$, $\sum \frac{x^2 + y^2}{(x - a_n)^2 + y^2}$ est aussi grand qu'on veut pour les valeurs positives de x .

De même pour x négatif et $= -x_1$, on aura

$$x_1^2 + y^2 \geq \frac{(x_1 + a_n)^2 + y^2}{4}$$

si

$$4x_1^2 \geq (x_1 + a_n)^2,$$

ou

$$x_1 \geq a_n,$$

et $\sum \frac{x^2 + y^2}{(x - a_n)^2 + y^2}$ sera encore aussi grand qu'on veut si l'on ne prend pas $x_1 \leq \xi$.

Le changement de x en $-x$ permettrait de raisonner de même dans le cas d'un nombre illimité de racines négatives.

Prenons alors $x \leq \xi$: y devra être aussi grand qu'on veut en valeur absolue. Dès que $|a_n| > 2|x|$,

$$0 < a_n^2 - 2a_n x < 2a_n^2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{(x - a_n)^2 + y^2} &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2a_n x + a_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{a_n^2 - 2a_n x}{x^2 + y^2}} \\ &> \frac{1}{1 + \frac{2a_n^2}{x^2 + y^2}} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pourvu que

$$2 > 1 + \frac{2a_n^2}{x^2 + y^2}$$

ou

$$x^2 + y^2 > 2a_n^2.$$

Si y est grand, il y a autant de valeurs qu'on veut de a_n satisfaisant à cette condition et telles que $|a_n| > 2\xi$. Donc encore

$$T = -\mu - \sum \frac{x^2 + y^2}{(x - a_n)^2 + y^2}$$

a une valeur absolue aussi grande qu'on veut, et T est négatif.

Il nous reste à vérifier que Δ_2 est négatif.

Soient $\lambda + \mu i$, $\lambda - \mu i$, deux racines imaginaires conjuguées de X . On a

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} &= \sum \left(\frac{1}{z - (\lambda + \mu i)} + \frac{1}{z - (\lambda - \mu i)} \right) \\ &= \sum \left(\frac{x - \lambda - i(y - \mu)}{(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2} + \frac{(x - \lambda) - i(y + \mu)}{(x - \lambda)^2 + (y + \mu)^2} \right) \\ &= \sum \frac{N_1 - N_2 i}{D}, \end{aligned}$$

en posant

$$D = [(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2] [(x - \lambda)^2 + (y + \mu)^2],$$

$$N_1 = (x - \lambda) [(x - \lambda)^2 + (y + \mu)^2] + (x - \lambda) [(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2],$$

$$N_2 = (y - \mu) [(x - \lambda)^2 + (y + \mu)^2] + (y + \mu) [(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2].$$

ou

$$\begin{aligned} N_2 &= 2\gamma(x-\lambda)^2 + (\gamma-\mu)(\gamma+\mu)^2 + (\gamma+\mu)(\gamma-\mu)^2 \\ &= 2\gamma[(x-\lambda)^2 + \gamma^2 - \mu^2]. \end{aligned}$$

La partie imaginaire de $\frac{X'}{X}$ est alors de la forme

$$-2\gamma i \sum \frac{(x-\lambda)^2 + \gamma^2 - \mu^2}{D},$$

où D est essentiellement positif.

Pour les valeurs de γ supérieures aux modules des racines de X , le coefficient de γi dans $\frac{X'}{X}$ est encore négatif. Pour les valeurs de γ au plus égales au module de la plus grande racine, $|z|$ étant très grand, $|x|$ est très grand et $(x-\lambda)^2 + \gamma^2 - \mu^2$ est positif : le coefficient de γi dans $\frac{X'}{X}$ est encore de même signe.

Nous pouvons donc conclure :

Si $F(z)$ a une infinité de racines réelles et un nombre limité de racines imaginaires, $F'(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Nous allons maintenant nous occuper des extensions aux fonctions considérées ici de certains théorèmes de MM. Picard, Hadamard et Borel sur la densité des racines.

THÉORÈME III. — *Soient $F(z)$ une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$, d'ordre ρ fini, $\varphi(z)$ et $\varphi_1(z)$ des fonctions quelconques de même nature, mais d'ordre $< \rho$: parmi l'ensemble des fonctions*

$$\varphi(z) F(z) - \varphi_1(z),$$

où φ et φ_1 prennent toutes les valeurs possibles, il ne peut y en avoir deux dont l'ordre réel est inférieur à ρ ,

$$\varphi F - \varphi_1, \quad \psi F - \psi_1,$$

que si $\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 = 0$.

Supposons, en effet,

$$\varphi F - \varphi_1 = z^{\lambda_1} P_1 e^{Q_1 + S_1} \quad (1),$$

$$\psi F - \psi_1 = z^{\lambda_2} P_2 e^{Q_2 + S_2},$$

avec $\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 \neq 0$; P_1, P_2 étant des produits de facteurs primaires d'ordre $< \rho$, Q_1, Q_2 des polynomes de degré ρ , S_1, S_2 des fonctions monodromes et qui restent finies dans R , ainsi que leurs dérivées. On a

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 = z^{\lambda_1} P_1 \psi e^{S_1} e^{Q_1} - z^{\lambda_2} P_2 \varphi e^{S_2} e^{Q_2}$$

ou

$$M e^{Q_1} + N e^{Q_2} = L,$$

M, N, L étant des fonctions quasi-entières dans R pour $z = \infty$, et d'ordre $< \rho$, avec $L \neq 0$.

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$(M' + MQ'_1) e^{Q_1} + (N' + NQ'_2) e^{Q_2} = L',$$

M' et N' ayant leurs ordres $< \rho$.

Si le déterminant

$$\Delta = MN' - NM' + MN(Q'_2 - Q'_1)$$

est $\neq 0$, on en tire, par exemple,

$$- \Delta e^{Q_2} = L(M' + MQ'_1) - ML'.$$

e^{Q_2} est une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$ sans 0 : les zéros de Δ dans R doivent donc tous appartenir au second membre.

Ce second membre étant d'ordre réel $< \rho$, son quotient par Δ l'est également. Ce quotient est alors d'ordre apparent $< \rho$, et la

(*) Cette exception ne peut évidemment se produire, puisque le second membre est d'ordre ρ , que pour ρ entier. On remarquera encore que $\varphi F - \varphi_1$, quand φ et φ_1 sont d'ordres $< \rho$, est à croissance régulière pour $z = \infty$, à la condition nécessaire et suffisante que F soit à croissance régulière pour $z = \infty$. Nous signalerons la possibilité d'extensions de ce théorème et du suivant aux fonctions quasi-entières d'ordre non transfini pour $z = \infty$ grâce à la classification introduite par M. Boutroux et nous. Voir encore, pour un cas particulier de ce théorème, HADAMARD, *Comptes rendus*, 1^{er} juin 1896.

relation précédente est impossible : il faut $\Delta = 0$. Alors

$$\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} = Q'_2 - Q'_1,$$

$$\log \frac{M}{N} = Q_2 - Q_1 + C,$$

$$\frac{M}{N} = e^{C+Q_2-Q_1}.$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure $Q_2 - Q_1$ serait de degré $< \rho$; par suite

$$M + Ne^{Q_2-Q_1} = Le^{-Q_1}$$

est impossible, le premier membre étant d'ordre $< \rho$, le second membre d'ordre ρ ⁽¹⁾. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Parmi les équations

$$F(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)},$$

où φ et φ_1 n'ont aucune racine commune, il y en a une au plus, telle que l'exposant de convergence de la suite de ses racines est inférieur à ρ pour $z = \infty$.

On vérifiera de la même manière le théorème suivant et son corollaire.

THÉORÈME IV. — Soit $F(z)$ une fonction monodrome quasi-entière dans R pour $z = \infty$ et telle que, pour les grandes valeurs de $|z| = r$,

$$F(z) < e^{r^m}$$

(m constante); soient de plus $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ des fonctions quasi-entières d'ordre fini dans R pour $z = \infty$, et telles que

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 \neq 0.$$

Si les deux fonctions quasi-entières dans R pour $z = \infty$ $\varphi F - \varphi_1$, $\psi F - \psi_1$ sont d'ordre réel fini, F est d'ordre fini.

⁽¹⁾ Cette démonstration est analogue à celle de M. Borel (*Lec. sur les fonctions entières*, Paris, 1900, p. 95) pour les fonctions entières.

COROLLAIRE. — *Parmi les équations*

$$F = \frac{\varphi_1}{\varphi},$$

où F est donné et d'ordre infini, il y en a au plus une telle que la suite de ses racines ait un exposant de convergence fini.

La démonstration repose sur la vérification de l'impossibilité d'une relation de la forme

$$M e^{G_1} + N e^{G_2} = L,$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions quasi-entières d'ordre fini, ainsi que L , M , N .

Nous retrouvons ainsi dans deux cas relativement particuliers, mais que l'on peut considérer comme les plus importants jusqu'à nouvel ordre, surtout en présence des résultats énoncés par MM. Boutroux et Painlevé, un théorème dû à M. Picard, et relatif aux racines d'une fonction monodrome aux environs d'un point singulier essentiel. On retrouve en même temps pour ce cas des extensions du théorème de M. Picard, analogues à celles qui sont dues à MM. Hadamard et Borel pour les fonctions entières, et à nous pour les fonctions quasi-entières. Le perfectionnement particulièrement important apporté ici au théorème de M. Picard est relatif à la détermination de l'exposant de convergence de la suite des racines (1).

(1) Soit $F(z) = \varphi(z) + \varphi_0 \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{G(z)}{z^k} e^{\psi(z)}$ une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$ et d'ordre quelconque, $G(z)$ une fonction entière, $\psi(z)$ une fonction monodrome et finie dans R ainsi que ses dérivées.

Admettons, d'après M. Borel (*Acta math.*, t. XX, p. 357, *Sur les zéros des fonctions entières*) : 1° que si $\mu(r)$ est le maximum du module de $G(z)$ pour $|z| \leq r$, $\mu_1(r)$ celui de $G'(z)$ pour $|z| \leq r$, on ait

$$(A) \quad \mu(r)^{1+\alpha} > \mu_1(r) > \mu(r)^{1-\alpha}$$

(α fini aussi petit qu'on veut); 2° que l'inverse du minimum du module d'une fonction entière est du même ordre de grandeur que son maximum, c'est-à-dire que si $e^{\nu(r)}$ est une limite supérieure de ce maximum, $e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}}$ est une limite supérieure de l'inverse du minimum, et $e^{\nu(r)^{1-\alpha_1}}$ une limite inférieure [condition (B)]; admettons plus exactement au moins que ces conditions aient lieu dans la ma-

Il convient encore de considérer les fonctions qu'on peut appeler *quasi-méromorphes* dans R pour $z = \infty$, c'est-à-dire les fonctions monodromes qui n'ont dans R d'autres points critiques à distance finie que des pôles isolés. Si l'on forme la fonction entière $\Phi(z)$ ayant pour zéros les pôles d'une pareille fonction $F(z)$, $F(z)\Phi(z)$ est quasi-entière dans R pour $z = \infty$, et $= \Psi(z)$. Donc

$$F(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}.$$

THÉOREME V. — *Une fonction quasi-méromorphe dans R pour $z = \infty$ est le quotient d'une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$ par une fonction entière, ou, plus généralement, le quotient de deux fonctions quasi-entières dans R pour $z = \infty$.*

Ceci posé, nous étendrons à ces fonctions nos théorèmes sur les fonctions quasi-méromorphes.

THÉOREME VI. — *Parmi toutes les fonctions quasi-méromorphes dans R pour $z = \infty$ de la forme $F = \varphi$ d'ordres finis ρ , où F est de la même forme donnée et d'ordre ρ , φ une quelconque des fonctions analogues, mais d'ordre $< \rho$, il y en a*

jeune partie du plan, c'est-à-dire que la somme des épaisseurs des couronnes circulaires dont le centre est à l'origine et où ces conditions n'ont pas lieu pour $|z| \leq r$ est $\leq kr$, k étant aussi petit qu'on veut pour r assez grand. Les raisonnements de M. Borel sur l'impossibilité des relations

$$\sum G_i(z) e^{H_i(z)} = 0,$$

où $i = 1, 2, \dots, l$ (l fini), G_i, H_i sont des fonctions entières, dont les ordres remplissent certaines conditions, s'étendent de suite aux cas où les G_i et les H_i sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$.

En effet, si $\mu(r)$ et $\mu_1(r)$ se rapportent à $\varphi(z)$, les quantités analogues pour $F(z)$ sont de la forme $\mu(r)(1 + \varepsilon)$, $\mu_1(r)(1 + \varepsilon_1)$ ($\varepsilon, \varepsilon_1$ aussi voisins qu'on veut de 0 pour r assez grand) : la condition (A) subsiste. De plus, l'inverse du minimum de $G(z)$ est $\leq e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}}$, si le maximum de $G(z)$ est $\leq e^{\nu(r)}$; celui de $\frac{G(z)}{z^k} e^{\frac{1}{2}(r)}$ est

$$\leq m r^{k_1} e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}} = e^{\nu(r)^{1+\alpha_1} + k_1 \log r + \log m}$$

(m constante) $\leq e^{\nu(r)^{1+2\alpha_1}}$, puisque $\nu(r)^\alpha > k_1 \log r + \log m$ dès que $G(z)$ ne se réduit pas à un polynôme.

On en conclut le théorème de M. Picard généralisé relatif aux racines des équations de la forme $F(z) = \varphi(z)$, où $F(z)$ est une fonction entière de genre infini, $\varphi(z)$ un polynôme, une fonction quelconque d'ordre fini ou une fonction entière d'ordre de grandeur assez petit par rapport à celui de $F(z)$.

une au plus d'ordres réels, tous inférieurs à ceux de Φ , deux au plus telles que les exposants de convergence des suites des modules de leurs racines soient inférieurs à ρ .

Nous appelons encore ici ordre de

$$\Gamma = \frac{\Psi}{\Phi}$$

le plus grand des ordres de Ψ et Φ .

La démonstration de la première partie du théorème est semblable à celle que nous avons donnée pour les fonctions quasi-méromorphes; il en est de même pour la deuxième partie, où l'on doit distinguer les trois mêmes cas.

Pour montrer l'importance des résultats précédents dans la théorie des équations différentielles, il nous suffira d'indiquer le résultat suivant :

THÉORÈME VII. — *Soit $F(z)$ une fonction monodrome d'ordre fini aux environs d'un point a qui est pour elle un point singulier essentiel isolé. Cette fonction ne peut être aux environs de ce point solution d'une équation différentielle linéaire rationnelle en x que si sa croissance est régulière aux environs de ce point.*

En effet, on pourra toujours, par un changement de variable qui ne changera pas la forme de l'équation différentielle, faire en sorte que le point critique essentiel devienne ∞ . On mettra ensuite la fonction donnée sous la forme

$$\varphi_0(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

comme au début du Paragraphe I, et l'on raisonnera comme nous l'avons fait dans un Mémoire antérieur ⁽¹⁾ au sujet des fonctions entières et quasi-entières. La démonstration est à peu près la même.

C. Q. F. D.

En terminant nous indiquerons dans deux Notes annexes un complément à deux de nos Mémoires antérieurs.

⁽¹⁾ *Ann. Fac. Sc. T.*, 1902, page 456.

IV.

Nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_l z^l + \dots$$

une fonction entière d'ordre fini et d'ordre apparent ρ , et

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$ de module inférieur à $\frac{1}{l^{\rho+\varepsilon}}$ correspond une racine de $f(z)$, le module de la différence des deux racines étant aussi peu qu'on veut ⁽¹⁾ pourvu que l soit assez grand.

Ce résultat peut être complété ainsi qu'il suit :

THÉORÈME. — Etant donné un contour C quelconque, on peut toujours prendre λ assez grand pour qu'à toute racine de $f(z) = 0$ dans C , avec $\lambda \leq l$, en corresponde dans C pour $f_l(z)$ une et une seule, qui en diffère aussi peu qu'on veut [les racines de $f(z)$ sont supposées distinctes].

Considérons, en effet, un contour C sur lequel ne se trouve aucun zéro de $f(z)$, et l'intégrale

$$J_l = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_l(z)}{f_l(z)} dz.$$

$|z|$ est limité sur C : dès que l est assez grand, en chaque point de ce contour, $f'(z) = f'_l(z) + \varepsilon$, $f(z) = f_l(z) + \varepsilon_1$, ε et ε_1 étant aussi petits qu'on veut. Si

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

$$|J - J_l| < \tau,$$

τ , étant aussi petit qu'on veut pourvu que l soit assez grand.

(1) *Journ. de Mathém.*, 1902, p. 343. D'après la démonstration que nous avons donnée, l'énoncé peut en effet être précisé de cette manière.

Mais J et J_l sont des entiers qui représentent respectivement le nombre de racines de J et J_l compris à l'intérieur du contour C . Dès que $\eta < 1$ il faut

$$J = J_l.$$

Supposant les racines de $f(z)$ distinctes : $f(z)$ et $f'(z)$ n'ont pas de racines communes dans C . A toute racine de $f_l(z)$ dans C en correspond une de $f(z)$; à toute racine de $f'_l(z)$ dans C en correspond une de $f'(z)$. On pourra donc toujours prendre l assez grand pour que $f_l(z)$ et $f'_l(z)$ n'y aient pas de racines communes. Dès lors à toute racine de $f_l(z)$ dans C en correspond une de $f(z)$, les modules des deux racines différant aussi peu qu'on veut. D'après $J = J_l$, il y a réciprocity.

COROLLAIRE. — *S'il y a une infinité de valeurs de $l < \lambda$ telles que $f_l(z)$ n'ait que des racines réelles dans le contour C , $f(z)$ n'y a que des racines réelles.*

Soit, en effet, $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $f(z)$ dans C : d'après le théorème précédent on ne peut assigner aucune limite inférieure à β . Donc $\beta = 0$.

V.

Dans le *Journal de Mathématiques* (1902, p. 42), nous avons établi le théorème suivant :

THÉOREME. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \dots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \dots Q_n} + \dots$$

$P_0, R_1, R_2, \dots, R_n, \dots, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ étant des polynômes entiers en x de degrés $p_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ respectivement avec $r_1 < q_1, \dots, r_n < q_n, \dots$, les zéros réels de $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ ayant leurs modules limités. Si φ_1 est solution d'une équation différentielle rationnelle en $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^k y}{dx^k}$, on doit avoir, dès que n est assez grand

$$q_{n+1} \leq (q_1 + q_2 + \dots + q_n) \varpi + r_{n+1} + \delta_1,$$

(²) Au moins quand $\frac{s_{n+1}-r_{n+1}}{s_n}$ est assez grand.

on remplace, n étant donné, η_n par η_{n+p} , si grand que soit p , pour une infinité de valeurs de p .

On posera

$$\eta_{n+p} = h_n + \eta_n;$$

η_{n+p} devra être solution de $F'_y = 0$ et l'on raisonnera dessus comme on l'a fait sur $F = 0$ et φ_1 .

On sera encore conduit aux mêmes conclusions à moins que les dérivées de F'_y par rapport à $y, \dots, y^{(k)}$ ne soient annulées par une infinité de valeurs de η_n ; et ainsi de suite ⁽¹⁾.

C. Q. F. D.

Décembre 1902.

SUR LES SURFACES DONT UN SYSTÈME DE LIGNES ASYMPTOTIQUES SE PROJETTE SUIVANT UNE FAMILLE DE COURBES DONNÉE;

Par M. A. BUHL.

On voit facilement qu'on ne peut en général considérer deux familles de courbes prises arbitrairement dans le plan comme les projections des deux systèmes d'asymptotiques d'une surface.

Par contre une famille de courbes définie par l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(xy)$$

peut toujours être considérée comme la projection d'un système d'asymptotiques d'une surface définie par l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

C'est là une équation du type parabolique, linéaire et homogène, et d'ailleurs l'équation la plus générale de cette forme

$$(3) \quad A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

peut toujours être considérée comme définissant une surface dont

⁽¹⁾ Mentionnons encore que φ_1 doit être remplacé par η_n dans la page 41 et la première moitié de la page 42 de notre Mémoire.

les asymptotiques d'un système se projettent suivant les courbes

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}.$$

Aux variables x et y on peut toujours substituer de nouvelles variables s et t telles que l'équation (3) prenne la forme

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \lambda \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

où λ est fonction de s et t (E. GOURSAT, *Leçons sur les équations du second ordre*, t. II, p. 39). Malheureusement, cette réduction n'avance pas beaucoup en général la question de l'intégration complète, sauf dans le cas où λ peut se réduire à une simple constante. L'équation (5) devient alors une équation bien connue; c'est celle de la propagation de la chaleur par conductibilité dans un espace à une dimension.

On sait qu'elle a été l'objet d'importants travaux de Fourier et d'un grand nombre de géomètres. Parmi les travaux récents on peut consulter l'article de M. P. APPELL : *Sur l'équation $r - q = 0$ et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 1892, p. 187) et les leçons sur la *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* de M. POINCARÉ (C. Naud, éditeur, 1895).

Nous prendrons l'équation (5) sous la forme définitive

$$(6) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

et nous allons rechercher comment l'on peut passer de l'équation (3) à l'équation (6) et quelles sont les conditions de possibilité d'une telle transformation.

En posant

$$X(z) = A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Y(z) = X(A) \frac{\partial z}{\partial x} + X(B) \frac{\partial z}{\partial y},$$

l'équation (3) s'écrit

$$(7) \quad X^2(z) - Y(z) = 0,$$

et l'on voit qu'elle est ainsi formée avec les opérateurs X et Y , tout comme (6) est formée avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$.

Pour qu'il existe un changement de variables transformant en ces deux derniers X et Y , il faut et il suffit que ceux-là soient permutable (S. LIE und F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 339). La condition $XY = YX$ nous donne facilement les deux équations

$$X^2(A) - Y(A) = 0, \quad X^2(B) - Y(B) = 0$$

qui, comparées avec (7), nous montrent que : *L'équation (3) peut toujours être ramenée à la forme (6) si A et B en sont des solutions.*

Quant aux formules de transformation on les trouve en égalant à des constantes *arbitraires* les deux intégrales distinctes du système complet

$$(8) \quad X(z) - \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad Y(z) + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

La condition que nous venons de trouver paraît au premier abord très restrictive, mais on peut la remplacer par d'autres, ce qui provient du fait que l'équation primitive (3) peut se mettre sous la forme (7) de plusieurs manières différentes. Par exemple, si nous avons commencé par diviser l'équation par A^2 , nous serions arrivés à cette conclusion que la constante 1 et l'expression $\frac{B}{A}$ doivent être des solutions. Comme la chose est évidemment réalisée pour la constante 1, nous voyons maintenant que *l'équation (3) se ramène à la forme (6) si $\frac{B}{A}$ en est une solution.* Même chose si $\frac{A}{B}$ est solution.

Si, au début, nous avons multiplié l'équation (3) par un facteur R^2 , nous aurions conclu que, *si l'on peut trouver un facteur R tel que RA et RB soient des solutions, l'équation se ramène encore à la forme (6).* Le problème est encore résolu dans le même sens si l'on connaît une solution S de (3) et que l'on constate que l'une des expressions $S \frac{A}{B}$ ou $S \frac{B}{A}$ est aussi une solution.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Les considérations qui précèdent nous mettent en mesure de déterminer un grand nombre de familles de courbes simples et intéressantes que l'on peut considérer comme les projections d'un système d'asymptotiques de certaines surfaces dont la connaissance ne dépend que de l'intégration de l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Nous désignerons par $Z(s, t)$ une solution de cette équation ayant tel degré de généralité que l'on voudra.

Si nous nous en tenons au premier cas de réduction étudié précédemment, et si nous observons que les expressions linéaires à coefficients constants

$$A = a + cx + dy, \quad B = b + ex + gy$$

sont manifestement des solutions de (3), nous voyons que toutes les familles de courbes comprises dans l'équation

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + ex + gy}{a + cx + dy}$$

sont les projections d'asymptotiques de surfaces que nous savons déterminer. Ces courbes sont les lignes invariantes des transformations projectives qui laissent en repos la droite de l'infini.

Pour leur étude détaillée je renvoie à l'Ouvrage de S. LIE et G. SCHEFFERS : *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (p. 68), me bornant ici à rappeler ce qui est essentiel à mon sujet. Tout d'abord on voit facilement que, pour des valeurs particulières des coefficients constants, l'équation (9) donne les familles

$$(10) \quad y = \text{const.}, \quad y^2 - 2x = \text{const.}, \quad yx^2 = \text{const.}, \quad ye^{-x} = \text{const.}$$

C'est un théorème fondamental que la transformation homographique (groupe projectif) appliquée à ces quatre familles nous donne toutes les courbes invariantes du groupe projectif le plus général.

D'ailleurs, nos transformations changent aussi les asymptotiques

d'une surface en les asymptotiques de la transformée et plus particulièrement la projection des premières en la projection des secondes.

Nous n'avons donc qu'à rechercher les surfaces admettant pour asymptotiques des familles se projetant suivant les types (10).

Premier type. — On trouve immédiatement des surfaces réglées à plan directeur et par transformation homographique des surfaces réglées quelconques. Les génératrices sont des asymptotiques qui évidemment se projettent suivant des droites.

Deuxième type. — Les courbes considérées sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}.$$

Nous avons facilement

$$A = y, \quad B = 1,$$

et ensuite

$$X(z) = y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}; \quad X(A) = 1, \quad X(B) = 0, \quad Y(z) = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Il nous faut maintenant intégrer le système complet

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Celui-ci admet les intégrales $y^2 - 2x + 2t$ et $y - s$, d'où les formules de transformation

$$s = C + y, \quad t = C' + x - \frac{y^2}{2},$$

où C et C' sont deux constantes arbitraires.

Donc la famille $y^2 - 2x = \text{const.}$ est la projection d'un système d'asymptotiques de la surface

$$(11) \quad z = Z\left(C + y, \quad C' + x - \frac{y^2}{2}\right).$$

Si par exemple nous prenons $Z(s, t) = s^3 + 6ts$, nous avons, pour $C = C' = 0$,

$$z = 6xy - 2y^3.$$

On vérifie facilement que cette surface admet des asymptotiques se projetant suivant la famille de paraboles indiquée et quant à celles de l'autre système, suivant des droites parallèles à l'axe des x ; il s'agit donc d'une surface réglée à plan directeur.

En effectuant une transformation projective plane, nous déduirons de la surface (11) de nouvelles surfaces pour lesquelles le système d'asymptotiques considéré se projettera suivant la famille de courbes déduite, par la même transformation, des paraboles précédentes. Ces dernières ont leurs diamètres parallèles fixes en direction et touchent par suite la droite de l'infini en un point fixe; nous pouvons en déduire des coniques tangentes à une droite fixe quelconque en un point fixe quelconque et admettant une direction diamétrale arbitraire (*voir* S. LIE und G. SCHEFFERS, *loc. cit.*, p. 74).

Troisième type. — La famille de courbes $yx^2 = \text{const.}$ résulte de l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha y}{x}.$$

Nous avons donc

$$A = x \quad \text{et} \quad B = -\alpha y,$$

d'où

$$\begin{aligned} X(z) &= x \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial z}{\partial y}, & X(A) &= x, \\ X(B) &= \alpha^2 y, & Y(z) &= x \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha^2 y \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pour chercher la transformation qui change les opérateurs X et Y respectivement en $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, la méthode est la même que précédemment et le système complet à intégrer n'est pas plus compliqué. On trouve finalement

$$s = C + \frac{\alpha^2 \log x - \log y}{\alpha(\alpha + 1)}; \quad t = C' + \frac{\alpha \log x + \log y}{\alpha(\alpha + 1)}.$$

L'équation $z = Z(s, t)$ représente alors les surfaces dont les asymptotiques d'un système se projettent suivant les courbes $yx^2 = \text{const.}$ Pour faire une application immédiate, soit $\alpha = 1$, $C = C' = 0$ et, en désignant par a une constante quelconque,

$$Z(s, t) = e^{2as + 4a^2 t}.$$

Nous obtenons alors la surface

$$z = x^{2a^2 + a} y^{2a^2 - a},$$

dont un système d'asymptotiques doit se projeter suivant la famille d'hyperboles équilatères $xy = \text{const.}$

Si nous cherchons directement les projections des deux systèmes d'asymptotiques de ladite surface, nous obtenons l'équation

$$(x dy + y dx) [(a + 1)y dx + (a - 1)x dy] = 0,$$

qui contient les hyperboles prévues et la seconde famille

$$x^{a+1} y^{a-1} = \text{const.}$$

Le type $yx^{\alpha} = \text{const.}$ est certainement le plus riche en cas particuliers remarquables. Les hyperboles $xy = \text{const.}$ nous donnent par une simple transformation linéaire toutes les coniques concentriques et homothétiques. Pour $\alpha = -2$, nous avons des paraboles de sommet et d'axe fixes dont le paramètre est variable et comme de telles paraboles sont aussi tangentes à la droite de l'infini en un point fixe, nous pouvons en conclure, par transformation homographique, toutes les coniques tangentes à deux droites fixes quelconques en deux points fixes quelconques.

La transformation linéaire qui change les axes de coordonnées en les droites isotropes nous change notre courbe type en

$$(x + iy)(x - iy)^{\alpha} = \text{const.},$$

ce qui est l'équation d'une famille de spirales logarithmiques homothétiques.

Enfin, toujours dans le même type, nous pouvons faire rentrer les courbes de la forme

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)^{\lambda_1} (a_2 x + b_2 y + c_2)^{\lambda_2} (a_3 x + b_3 y + c_3)^{\lambda_3} = \text{const.}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

provenant de la transformation qui change en un triangle quelconque le triangle formé par les axes de coordonnées et la droite de l'infini. Ces courbes sont les intégrales de l'équation de Jacobi $P(x dy - y dx) + Q dy + R dx = 0$, où P , Q , R sont des fonctions linéaires des variables x et y .

Quatrième type. — La famille de courbes $ye^{-x} = \text{const.}$ provient de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Nous avons immédiatement

$$A = 1, \quad B = y,$$

et ensuite

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}, \quad X(A) = 0, \quad X(B) = y, \quad Y(z) = y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

On trouve toujours de même les formules de transformation qui changent X et Y en $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$; ce sont :

$$s = C + x, \quad t = C' + \log y - x.$$

Nous bornerons à ces quelques exemples très simples la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée. On voit que les cas qui se peuvent traiter sans faire intervenir d'équation aux dérivées partielles plus compliquée que (6) sont nombreux et non des moins intéressants.

Les surfaces cherchées étant connues, on peut se demander quelles sont les projections du second système d'asymptotiques. On obtient facilement pour leur équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2s}{t} - f(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r}{t} \frac{1}{f(x, y)}.$$

Ces deux équations sont absolument équivalentes, l'égalité de leurs seconds membres résultant immédiatement de l'équation aux dérivées partielles $r + 2sf + tf^2 = 0$ des surfaces déterminées.

SUR QUELQUES CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES;

Par M. RAOUL PERRIN.

I. L'équation différentielle des coniques

$$(1) \quad 9y''^2 y^v - 45y'' y''' y^{iv} + 40y'''^3 = 0.$$

admet, comme il est aisé de le vérifier, l'intégrale première

$$(2) \quad y''^3 = k(3y''y^{iv} - 5y'''^2)^3.$$

Chaque valeur de la constante arbitraire k caractérise évidemment une famille de coniques. On voit immédiatement que la valeur $k = 0$ caractérise le système des droites du plan, la valeur $k = \infty$ celui des paraboles, puisque l'équation différentielle des paraboles est, comme on sait,

$$(3) \quad 3y''y^{iv} - 5y'''^2 = 0,$$

Mais il est intéressant de rechercher la signification générale de k au point de vue géométrique.

Pour l'obtenir, partons de l'équation générale d'une conique sous la forme

$$(4) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gx + c = 0.$$

d'où, posant pour abréger

$$\begin{cases} u = -(hx + f), & v = -\delta x^2 + 2(fh - bg)x + f^2 - bc, \\ \delta = ab - h^2, \end{cases}$$

on tire

$$(5) \quad y = \frac{1}{b}(u \pm \sqrt{v}).$$

Formant les dérivées successives de (5), et tenant compte des relations

$$u'' = v''' = 0, \quad v'' = -2\delta, \quad 2vv'' - v'^2 = 4b\Delta,$$

où Δ est le discriminant de la conique, $abc + \dots$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} y'' &= \pm \Delta v^{-\frac{3}{2}}, \\ y''' &= \mp \frac{3}{2} \Delta v^{-\frac{5}{2}} v', \\ y^{iv} &= \pm \frac{3}{4} \Delta v^{-\frac{7}{2}} (5v'^2 - 2vv''), \\ 3y''y^{iv} - 5y'''^2 &= 9\delta\Delta^2 v^{-4}. \end{aligned}$$

L'équation (2) donne alors

$$k = \frac{\Delta^2}{3^6 \delta^3}.$$

Mais on sait que si α , β sont les deux demi-axes de la conique, et ω l'angle des axes des coordonnées, on a

$$\frac{\Delta^2}{\delta^3} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\sin^2 \omega},$$

en sorte qu'on peut écrire

$$(6) \quad k = \frac{\alpha^2 \beta^2}{729 \sin^2 \omega}.$$

L'aire de l'ellipse étant $\pi\alpha\beta$, appelons par analogie aire d'une conique quelconque, et désignons par S , cette quantité $\pi\alpha\beta$; elle sera réelle et positive s'il s'agit d'une ellipse, réelle et négative s'il s'agit d'une ellipse imaginaire; imaginaire pour une hyperbole, nulle pour un système de deux droites, infinie pour une parabole. On aura alors cette valeur de k

$$k = \frac{S^2}{729 \pi^2 \sin^2 \omega},$$

et l'équation (2) deviendra

$$(7) \quad 729 \pi^2 y''^8 \sin^2 \omega = S^2 (3 y'' y^{1v} - 5 y'''^2)^3.$$

L'équation (7), intégrale première de (1), représente donc toutes les coniques du plan qui ont même aire S . S^2 étant positif ou négatif suivant que la conique est du genre ellipse ou du genre hyperbole, on en conclut immédiatement que l'expression

$$J = 3 y'' y^{1v} - 5 y'''^2,$$

formée avec les coefficients différentiels relatifs à un même point quelconque d'une conique donnée, est positive, nulle ou négative, suivant que cette conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

II. Considérons maintenant une courbe plane quelconque. La courbure en un quelconque de ses points est habituellement mesurée par l'inverse du rayon R du cercle mené par ce point et par deux autres points consécutifs infiniment voisins; ce qui revient à la définir au moyen de l'aire du cercle de courbure, aire dont l'expression est

$$(8) \quad C = \frac{\pi (1 + y'^2)^3}{y''^2},$$

(en supposant les axes rectangulaires). Mais au lieu d'un cercle, rien n'empêche de considérer une conique triosculatrice, c'est-à-dire assujettie à passer par cinq points consécutifs de la courbe. Le carré de l'aire S de cette conique sera déterminé, en fonction des valeurs des coefficients différentiels de la courbe au point dont il s'agit, par la formule (7) en y faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$; ce sera donc

$$(9) \quad S^2 = \frac{729 \pi^2 y''^8}{(3 y'' y^{iv} - 5 y'''^2)^3},$$

et l'on pourra caractériser la forme de la courbe en ses points successifs par les valeurs successives de S^2 , et dire en particulier qu'un point appartient au type elliptique, hyperbolique ou parabolique, suivant que la valeur de S^2 y est positive, négative ou infinie. Par raisons de continuité, toute branche réelle de la courbe se divisera en régions de types alternativement elliptique et hyperbolique, séparées par des points de type parabolique, en nombre fini. Quant aux points d'inflexion pour lesquels $y'' = 0$, la formule (9) montre qu'ils ne peuvent *en général* servir de transition du type elliptique au type hyperbolique, mais qu'ils se rencontrent exclusivement dans les régions de type hyperbolique : car pour y'' suffisamment voisin de zéro, S^2 prend le signe négatif de $(-5 y'''^2)^3$. Il n'en pourrait être autrement que si y''' tendait vers 0 en même temps que y'' , c'est-à-dire si le point d'inflexion était en même temps point d'ondulation, auquel cas il serait de type parabolique, puisque la relation (3) y serait satisfaite; ce serait en outre un de ces points sextactiques (où l'on peut mener à la courbe une conique *quadriosculatrice*) où l'équation (1) est satisfaite, et que l'on sait être au nombre de $3m(4m-9)$ sur la courbe générale de degré m .

D'autre part, si l'on annule $\frac{d(S^2)}{dx}$, on retombe sur l'équation (1).

On peut donc se représenter comme suit la répartition, sur les branches réelles d'une courbe quelconque, des points de type elliptique, hyperbolique, parabolique, des points sextactiques et des points d'inflexion.

En partant d'un point arbitraire appartenant par exemple au type elliptique, et marchant toujours dans un même sens déterminé sur la branche réelle, on trouvera des valeurs de S^2 crois-

sant par exemple jusqu'à un certain maximum qui correspondra à un point sextactique, puis décroissant jusqu'à un certain minimum (toujours positif) correspondant à un autre point sextactique, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, ou que S^2 passe du positif au négatif en passant par l'infini, ce qui correspondra à un point de type parabolique. Alors commencera une région de type hyperbolique où les maxima et minima de S^2 correspondront encore à des points sextactiques, sauf les maxima (algébriques) dont la valeur est 0, et qui correspondront à des points d'inflexion; ensuite viendra un point parabolique ramenant dans une région de type elliptique, et ainsi de suite. De cet aperçu résultent immédiatement, lorsqu'il n'existe pas de points exceptionnels (d'ondulation, sextactiques doubles, paraboliques doubles, etc.), les conséquences suivantes :

1° Sur chaque branche réelle complète (c'est-à-dire parcourue dans le même sens jusqu'à revenir au point de départ, en traversant, s'il y a lieu, la droite de l'infini), il existe un nombre *pair* de points de type parabolique.

2° Si ce nombre est zéro, la branche appartient tout entière à un même type, et elle contient un nombre *pair* de points sextactiques (au moins 2). Toutefois, si le type est hyperbolique, la moitié *au plus* de ces points sextactiques peut être remplacée par un nombre égal de points d'inflexion.

3° Si le nombre des points paraboliques n'est pas nul, ces points délimitent un nombre *pair* de régions appartenant alternativement aux types elliptique et hyperbolique; chacune d'elles contient un nombre *impair* $2\sigma - 1$ de points sextactiques (un au moins par conséquent), dont σ *au plus*, dans les régions du type hyperbolique, peuvent être remplacés par des points d'inflexion.

4° Toute branche complète contient au moins autant de points sextactiques que de points d'inflexion, et la différence est un nombre pair; il en est de même par conséquent pour la courbe dans son ensemble. Les formules qui donnent les nombres de points des deux catégories ($3m(4m - 9)$ et $3m(m - 2)$ respectivement) pour la courbe de degré m , montrent d'ailleurs que la différence, en ne considérant que les points réels, est un nombre pair pour l'ensemble de la courbe.

III. L'équation différentielle (3) des paraboles admet l'intégrale première évidente :

$$(10) \quad y''^5 - k' y'''^3 = 0.$$

A chaque valeur de k' correspond une famille de paraboles. Pour la caractériser géométriquement, il suffit de reprendre le calcul du Paragraphe I en y supposant $\delta = 0$; on trouve ainsi

$$k' = \frac{g\sqrt{b} - f\sqrt{a}}{27b\sqrt{b}}.$$

Mais on sait que si p est le paramètre principal de la parabole, ω l'angle des axes de coordonnées, θ l'angle que fait l'axe de la parabole avec l'axe des x , on a

$$p = \frac{2(f\sqrt{a} - g\sqrt{b}) \sin^2 \omega}{(a + b - 2\sqrt{ab} \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\sin \theta}{\sin(\omega - \theta)} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

On en conclut, tous calculs faits :

$$k' = -\frac{p \sin \omega}{54 \sin^3(\omega - \theta)},$$

et l'équation (10) devient

$$(11) \quad 54 y''^5 \sin^3(\omega - \theta) + p \sin \omega y'''^3 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des paraboles pour lesquelles la longueur $P = \frac{p \sin \omega}{\sin^3(\omega - \theta)}$ (expression qui se réduit à $\frac{p}{\cos^3 \theta}$, si les axes sont rectangulaires) a une valeur déterminée.

Si, en un point d'une courbe quelconque, on considère la parabole biosculatrice, la valeur de P afférente à cette parabole sera donnée par la formule

$$(12) \quad P = -\frac{54 y''^5}{y'''^3}$$

en y mettant pour y'' et y''' les valeurs des coefficients différentiels au point considéré, tirées de l'équation de la courbe. En marchant le long d'une branche réelle on trouvera ainsi des valeurs variables de P pouvant changer de signe en passant soit par zéro (points d'inflexion) soit par l'infini (points où la parabole

biosculatrice a son axe parallèle à l'axe des y , et que l'on pourrait appeler sommets paraboliques); et aussi pouvant passer par des maxima et des minima, où la condition (3) étant satisfaite, le point sera un de ces points de type parabolique définis ci-dessus au Paragraphe II, où la conique triosculatrice est une parabole. Comme le nombre des changements de signe de P est nécessairement *pair* pour une branche complète de la courbe (abstraction faite de l'existence de points exceptionnels), et qu'entre deux sommets paraboliques il existe au moins soit un point d'inflexion, soit un point de type parabolique, on peut affirmer que sur une branche complète il existe au moins autant de points d'inflexion et de type parabolique ensemble, que de sommets paraboliques, la différence étant un nombre pair; et que le nombre des points d'inflexion et des sommets paraboliques ensemble est pair. On en conclurait de nouveau, comme il a été établi ci-dessus, que le nombre total des points de type parabolique est pair.

IV. On peut transformer en une relation entre éléments purement géométriques la relation que fournit entre les valeurs des divers coefficients différentiels successifs correspondant à un même point quelconque d'une des courbes appartenant à une famille donnée, l'équation différentielle générale de cette famille. Il suffit de remarquer que le deuxième coefficient différentiel y'' , est lié d'une manière simple au rayon de courbure; le troisième y''' , au rayon de courbure de la développée au point correspondant, et ainsi de suite.

Désignons donc par φ l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à une courbe C en l'un quelconque M de ses points; par R et M_1 , son rayon et son centre de courbure en M ; par ρ_1 et M_2 le rayon et le centre de courbure de la première développée C_1 , de C au point M_1 ; par ρ_2 et M_3 le rayon et le centre de courbure de la développée C_2 de C_1 (ou deuxième développée de C) au point M_2 ; et ainsi de suite, en convenant de représenter par R , ρ_1 , ρ_2 , ... non pas les longueurs absolues de ces rayons de courbure, mais leurs longueurs affectées du signe convenable pour que R , ρ_1 , ρ_2 , ... soient les dérivées successives de l'arc s de la courbe C par rapport à φ . Il est aisé de voir que le sens positif

de l'accroissement de s étant choisi à volonté sur la courbe C , et celui de l'accroissement de φ étant choisi comme on le fait d'ordinaire en trigonométrie, chacune des longueurs absolues des rayons de courbure devra être considérée comme affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'un observateur parcourant la courbe correspondante dans le sens *positif* voit le centre de courbure à *sa gauche* ou à *sa droite*, le sens positif sur chaque développée étant d'ailleurs le même que sur le rayon de courbure de la développée précédente, qui lui est tangent. En d'autres termes, puisque les tangentes aux points correspondants de deux développées consécutives C_n et C_{n+1} sont à angle droit, on peut dire que le sens positif sur C_{n+1} traverse de la droite vers la gauche le sens positif sur C_n ; d'où il résulte encore que sur C_n et C_{n+2} , qui ont leurs tangentes parallèles en leurs points correspondants, les sens positifs sont opposés l'un à l'autre.

La signification géométrique des quantités $R, \rho_1, \rho_2, \dots$ étant ainsi bien définie, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle donnée d'ordre p , représentant une famille de courbes admettant p paramètres arbitraires, les coefficients différentiels $y'', y''', \dots$ par leurs expressions en $R, \rho_1, \dots$ qui sont les suivantes; pour les 4 premiers d'entre eux :

$$(13) \quad \begin{cases} y'' = \omega^{\frac{3}{2}} R^{-1}, \\ y''' = \omega^2 R^{-3} (3 R y' - \rho_1), \\ y^{IV} = \omega^{\frac{5}{2}} R^{-5} [3 R^2 (1 + 5 y'^2) - R (\rho_2 + 10 \rho_1 y') + 3 \rho_1^2], \\ y^V = \omega^3 R^{-7} [15 R^3 y' (3 + 7 y'^2) - R^2 (\rho_3 + 15 \rho_2 y') \\ \quad + (19 + 105 y'^2 \rho_1) + 55 R \rho_1^2 y' - 15 \rho_1^3]. \end{cases}$$

(Dans ces formules $\omega = 1 + y'^2$).

Le résultat de la substitution sera une équation entre $y', R, \rho_1, \dots, \rho_{p-2}$. Il peut arriver que y' disparaisse de lui-même; sinon, on formera la dérivée par rapport à φ , en utilisant les formules

$$(14) \quad \frac{dx}{d\varphi} = R \omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = R y' \omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy'}{d\varphi} = \omega, \quad \frac{d\omega}{d\varphi} = 2 y' \omega,$$

et en éliminant y' , on aura une équation entre les seules longueurs $R, \rho_1, \dots, \rho_{p-1}$. On pourra aussi éliminer x et y par le

même procédé, s'ils entraient dans l'équation dont on est parti; et l'on obtiendra, dans tous les cas, une relation entre R , ρ_1 , ..., indépendante de la position et de l'orientation de la courbe dans le plan.

Appliquons ce procédé à l'équation différentielle (3) des paraboles. En y substituant pour y'' , y''' , y^{iv} leurs expressions tirées de (13), elle devient :

$$(15) \quad R^{-6} \omega^4 (9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2) = 0,$$

et se décompose ainsi en 3 équations, savoir :

$$\frac{1}{R} = 0,$$

qui représente toutes les droites réelles du plan;

$$\omega \equiv 1 + y'^2 = 0,$$

qui représente toutes les droites isotropes; et enfin

$$(16) \quad 9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2 = 0,$$

qui est l'équation cherchée, représentant toutes les paraboles.

Les équations telles que (16) peuvent être considérées soit comme des équations intrinsèques généralisées, soit comme des équations différentielles où la variable est φ , la fonction R et ses dérivées successives ρ_1 , ρ_2 , ..., ou, si on le préfère, la fonction est l'arc s de la courbe, et ses dérivées successives sont R , ρ_1 , ... Elles se prêtent de la manière la plus simple au calcul des équations du même genre pour les courbes parallèles, les développées et les développantes de tous les ordres. Ainsi pour les courbes parallèles, tracées à une distance donnée l , il suffit de remplacer dans l'équation R par $R \pm l$. Pour les développantes d'ordre p , il suffit d'augmenter de p tous les indices des lettres ρ (R étant regardé comme équivalent à ρ_0). Pour la $p^{\text{ième}}$ développée, il suffit de différentier p fois l'équation par rapport à φ , d'éliminer R , ρ_1 , ..., ρ_{p-1} entre les $p+1$ équations ainsi obtenues, et de diminuer de p tous les indices des lettres ρ .

En opérant ainsi sur l'équation (16), on trouve pour les courbes qui sont des premières développées de paraboles, l'équa-

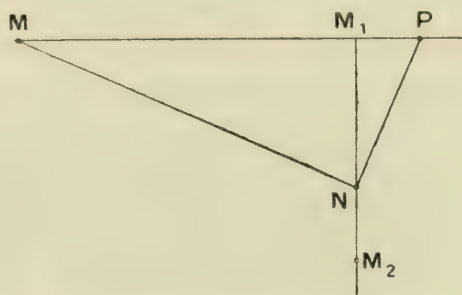
tion générale

$$(17) \quad 144 R^3 - 48 R^2 \rho_2 + R(4 \rho_2^2 + 55 \rho_1^2) - 5 \rho_1^2 \rho_2 = 0.$$

Pour obtenir l'équation différentielle ordinaire de ces courbes, il suffirait de remplacer dans (17) R, ρ_1, ρ_2 par leurs expressions en fonction de y', y'', y''', y^{iv} , savoir

$$(18) \quad \begin{cases} R = \omega^{\frac{3}{2}} y''^{-1}, \\ \rho_1 = R(3y' - \omega y''^{-2} y'''), \\ \rho_2 = R[3(1 + 4y'^2) - 8\omega y' y''^{-2} y''' + \omega^2 y''^{-4} (3y'''^{-2} y'' y^{iv})]. \end{cases}$$

L'équation (16) fournit une construction simple du rayon de



courbure de la deuxième développée d'une parabole, connaissant les rayons de courbure MM_1 de la parabole et M_1M_2 de sa première développée : il suffit de prendre $\overline{M_1N} = \frac{2}{3} \overline{M_1M_2}$, de joindre MN , d'élever NP perpendiculaire à MN jusqu'à sa rencontre avec MM_1 prolongée ; MP est le tiers du rayon demandé.

Pour obtenir l'équation générale des coniques, analogue à (16), on pourrait de même remplacer dans (1) y'', y''', y^{iv}, y^v par leurs expressions (13). Mais le calcul est beaucoup plus simple en partant de l'intégrale de (1) prise sous la forme (7) (avec $\omega = \frac{\pi}{2}$). On arrive immédiatement, en tenant compte de (15), à l'équation

$$(19) \quad 729\pi^2 R^{10} = S^2(9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2)^3,$$

qui donne déjà une relation entre l'aire S d'une conique, et les rayons de courbure de cette conique et de ses deux premières développées en 3 points correspondants quelconques. Cette relation peut se mettre sous une forme plus remarquable, en

désignant par C, C_1, C_2 , les aires des 3 cercles de courbure en un point quelconque M de la conique, et aux points correspondants M_1 et M_2 de ses deux premières développées; elle devient alors en effet

$$(20) \quad \frac{S}{C} = \left(1 + \frac{4}{9} \frac{C_1}{C} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_2}{C}} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

formule qui donne l'aire S de la conique en fonction des aires de ces 3 cercles de courbure.

Pour passer à l'équation générale des coniques, il suffit d'éliminer $\frac{S^2}{729\pi^2}$ entre l'équation (19) et sa dérivée, savoir

$$7290\pi^2 R^9 \rho_1 = 3S^2(9R^2 + 4\rho_1^2 - 3R\rho_2)^2(18R\rho_1 - 3R\rho_3 + 5\rho_1\rho_2),$$

ce qui donne

$$(21) \quad 9R^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45R\rho_1\rho_2 + 40\rho_1^3 = 0.$$

C'est l'équation demandée; elle fournit l'expression du rayon de courbure ρ_3 de la troisième développée d'une conique, quand on se donne ceux de la conique et de ses deux premières développées en des points correspondants. Elle présente, d'ailleurs, une analogie frappante avec l'équation (1) : les coefficients numériques sont les mêmes, et l'on passe de (1) à (21) en remplaçant y'', y''', y^{iv}, y^v , respectivement par $R, \rho_1, \rho_2, \rho_3 + 4\rho_1$.

Je me propose d'étudier spécialement, dans un travail ultérieur, les propriétés de ces équations différentielles intrinsèques, telles que (16), (17), (21), et de former celles qui représentent diverses familles de courbes. Pour le moment, je me bornerai à signaler la curieuse propriété que voici :

Appelons *poids* d'un terme, dans une expression telle que le premier membre de (21), la somme des produits de l'indice de chaque lettre ρ par son exposant. Pour que l'équation *finie* des courbes d'une même famille puisse s'obtenir en égalant à zéro une fonction de x et de y *symétrique* par rapport à ces deux lettres, abstraction faite des valeurs données à certaines constantes, il faut et il suffit que l'équation correspondante en $R, \rho_1, \dots, \rho_p$, où ces constantes ont toutes disparu, ne comprenne que des termes dont les poids soient tous *de même parité*.

SUR UNE PROPOSITION DE MATHIEU;

Par M. DE SÉGUIER.

Mathieu a énoncé ce principe que *dans un groupe G transitif de degré $q = 2p + 1$ (p et q étant premiers) d'ordre $< \frac{1}{2}(q!)$ et $> q(q-1)$, les diviseurs d'ordre p sont permutable à des substitutions de degré $2(p-1) = q-3$ (*J. M.*, 1873, p. 26).*

La démonstration que j'en ai donnée récemment (*J. M.*, 1902, p. 281) (1) peut être remplacée par la suivante, qui est beaucoup plus simple.

On verra toujours de la même manière que G n'a pas de diviseur d'ordre p^2 et que ses substitutions d'ordre p ont deux cycles. Soient N l'ordre du diviseur G de G qui fixe un symbole et dp l'ordre du groupe des substitutions permutable à un diviseur d'ordre p . On peut supposer que G n'a pas de substitutions paires, sans quoi on considérerait le plus petit multiple commun des substitutions paires. Alors le groupe des éléments de G permutable à un de ses diviseurs d'ordre q est d'ordre pq et G contient

$$\frac{Nq}{pq}(q-1) = 2N$$

substitutions d'ordre q .

Si $d = 1$, G contient $N \frac{p-1}{p}$ substitutions d'ordre p et G contient $2N + Nq \frac{p-1}{p}$ substitutions ($\neq 1$) d'ordre p ou q .

Il reste donc dans G , et de même dans G , $\frac{N}{p}$ substitutions. Mais cela est impossible, les conjugués de G étant premiers entre eux.

On obtient une autre démonstration simple en s'appuyant sur ce théorème de M. Frobenius que les diverses substitutions de G fixent en tout qN symboles.

(1) Les inégalités hors texte de la page 281 doivent être remplacées par

$$\frac{1}{2}qN + e_3 \geq qN \frac{p-1}{dp}, \quad d > \frac{3}{2} \frac{p-1}{p},$$

et ne donnent $d \geq 2$ que pour $p > 2$. Mais le cas $p = 2$ est obvie. On remarquera que, pour un groupe quelconque G d'ordre N , $e_1 + e_2 = \sum_i i g_i = \tau N$, τ étant le nombre des systèmes d'intransitivité de G .

Je profiterai de l'occasion pour réparer une omission. Dans le Mémoire cité j'ai développé la démonstration ⁽¹⁾ de ce théorème qu'un groupe de degré $p+1$ et d'ordre $\frac{p(p^2-1)}{2}$ deux fois transitif (il est clair qu'il le sera deux fois, s'il l'est seulement une) est nécessairement le groupe des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ où $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$ sauf si $p=7$ auquel cas il y a un autre type (C. R., avril 1901). M. Frobenius en a publié une nouvelle démonstration (S. A. B., avril 1902) dont je n'ai eu connaissance que tout récemment.

NOTE SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION;

Par M. G.-A. LAISANT.

Les questions d'interpolation se présentent dans l'application sous des apparences très variées. La plus simple d'entre elles se formule habituellement ainsi : connaissant un certain nombre de points, rapportés à un système de coordonnées cartésiennes, trouver une courbe qui passe par ces points. Parfois aussi, les points pouvant se grouper par couples, en tout ou en partie, on est amené à la recherche d'une courbe passant par des points donnés, et ayant des tangentes données en certains de ces points. Si, en particulier, les tangentes sont connues pour tous les points donnés, il s'agira, au point de vue analytique, de *déterminer une fonction qui prenne des valeurs données pour des valeurs données $a_1, a_2, \dots, a_n$ de la variable, et telle que sa dérivée prenne aussi, pour les mêmes valeurs de la variable, des valeurs données (a) .*

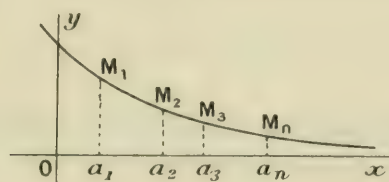
Un problème de statistique, qui a fait l'objet d'une question récente dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, conduit à cette forme nouvelle : On donne les aires d'une courbe comprises entre l'axe des x , et les ordonnées correspondant à des abscisses $a_1, a_2, \dots, a_n$ connues ; on donne en outre le moment de chacune

(1) Au dernier alinéa de la page 271 il faut faire $s=r$; mais le raisonnement n'en est que simplifié.

de ces aires par rapport à l'axe des y , et l'on demande de déterminer la courbe (fig. 1).

Analytiquement, si l'on appelle $y = f(x)$ l'équation de la courbe cherchée, cela équivaut évidemment à demander de déter-

Fig. 1.



miner la fonction f , connaissant, pour les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ attribuées à x , les deux intégrales

$$\int_0^x f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^x x f(x) dx.$$

Je me propose de montrer que cette question se ramène très aisément à la résolution du problème (a) ci-dessus.

Soit en effet

$$\int_0^x f(x) dx = F(x), \quad \int_0^x x f(x) dx = G(x),$$

et considérons la fonction

$$\int_0^x F(x) dx = S(x).$$

Nous avons

$$S'(x) = F(x) \quad \text{et} \quad S(x) = xF(x) - G(x),$$

comme on le reconnaît immédiatement en prenant les dérivées, et en constatant que, pour $x = 0$, toutes les fonctions s'annulent. Des valeurs données $F_1, F_2, \dots, F_n$ et $G_1, G_2, \dots, G_n$, qui correspondent à $a_1, a_2, \dots, a_n$, nous pouvons donc déduire

$$S_1 = a_1 F_1 - G_1, \quad \dots, \quad S_n = a_n F_n - G_n.$$

Par conséquent, pour la fonction $S(x)$, nous connaissons ses valeurs $S_1, S_2, \dots, S_n$, et les valeurs de sa dérivée $F_1, F_2, \dots, F_n$, pour les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ de la variable, c'est-à-dire que nous sommes bien ramenés au problème (a).

Cette fonction $S(x)$ étant déterminée par une formule d'interpolation quelconque, la fonction $f(x) = S''(x)$ résoudra le problème proposé.

SUR LES FONCTIONS ET VECTEURS DE POINT CONTENANT UNIQUEMENT LES DÉRIVÉES PREMIÈRES DES COMPOSANTES DE LA VITESSE;

Par M. PAUL APPELL.

1. Soient, dans un fluide en mouvement, u, v, w les projections, à l'instant t , du vecteur vitesse W au point (x, y, z) . Je me propose de compléter, sur quelques points particuliers, l'étude des fonctions et vecteurs de point dépendant uniquement des neuf dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

d'après les idées générales indiquées dans une Note des *Comptes rendus* (26 janvier 1903) et dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* de M. Jordan (1^{er} fascicule 1903). J'appellerai ces fonctions et ces vecteurs *fonctions et vecteurs de point du premier ordre*.

J'ai montré que si l'on pose

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ {}^2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & {}^2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, & {}^2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

toutes les fonctions de point du 1^{er} ordre peuvent être exprimées à l'aide de six fonctions spéciales dont la signification cinéma-

tique est simple, à savoir

$$(1) \quad \begin{cases} \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \delta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2), \\ \kappa = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \varepsilon_1 \gamma_1^2 - \varepsilon_2 \gamma_2^2 - \varepsilon_3 \gamma_3^2, \\ \Omega^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ \varphi = \varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + \gamma_1 \eta \zeta + \gamma_2 \zeta \xi + \gamma_3 \xi \eta, \\ \psi = E_1 \xi^2 + E_2 \eta^2 + E_3 \zeta^2 + \Gamma_1 \eta \zeta + \Gamma_2 \zeta \xi + \Gamma_3 \xi \eta. \end{cases}$$

Dans l'expression de ψ , on a posé pour abrégé

$$\begin{aligned} E_1 &= 4\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \gamma_1^2, & E_2 &= 4\varepsilon_3 \varepsilon_1 - \gamma_2^2, & E_3 &= 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \gamma_3^2, \\ \Gamma_1 &= 2(\gamma_2 \gamma_3 - 2\varepsilon_1 \gamma_1), & \Gamma_2 &= 2(\gamma_3 \gamma_1 - 2\varepsilon_2 \gamma_2), & \Gamma_3 &= 2(\gamma_1 \gamma_2 - 3\varepsilon_3 \gamma_3), \end{aligned}$$

de sorte que ψ est la forme adjointe de φ .

On a alors les identités élémentaires bien connues dans la théorie des formes quadratiques

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 &= -\delta, \\ 4\varepsilon_1 E_1 + \gamma_3 \Gamma_3 + \gamma_2 \Gamma_2 &= 4\kappa, \\ &\dots\dots\dots, \\ 4E_2 E_3 - \Gamma_1^2 &= 16\varepsilon_1 \kappa, \dots, \\ \Gamma_2 \Gamma_3 - 2E_1 \Gamma_1 &= 8\gamma_1 \kappa, \dots, \\ \Delta = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 - 4(E_2 E_3 + E_3 E_1 + E_1 E_2) &= -16\theta \kappa. \end{aligned}$$

2. Calculons d'abord, en fonction des invariants fondamentaux (1), la fonction de point

$$K_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)^2.$$

On peut, pour l'obtenir, faire le calcul directement, ou remarquer que le résultat se déduit du calcul de la fonction analogue

$$K = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)^2,$$

fait dans le *Mémoire du Journal de Mathématiques*, en y remplaçant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par $E_1, E_2, E_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. On trouve ainsi

$$K_1 = -4\delta\psi - 16\Omega^2\theta\kappa + 16\kappa\varphi.$$

3. La fonction

$$L = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$$

est également une fonction de point dont l'expression est

$$L = 4z\Omega^2.$$

4. Les fonctions calculées jusqu'ici sont paires en ξ, τ_1, ζ : elles s'expriment rationnellement en Ω^2, φ, ψ . Si nous considérons le jacobien des trois formes Ω^2, φ, ψ

$$I = \begin{vmatrix} \xi & \tau_1 & \zeta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

il forme une fonction de point *impaire* en ξ, τ_1, ζ . Dès lors, son carré est rationnel ; on vérifie, en effet, par la règle de multiplication des déterminants, que l'on a

$$I^2 = \begin{vmatrix} \Omega^2 & 2\varphi & 2\psi \\ 2\varphi & K & 4\Omega^2 z \\ 2\psi & 4\Omega^2 z & K_1 \end{vmatrix} ;$$

remplaçant K et K_1 par leurs valeurs connues, on a I^2 sous forme d'un polynôme entier par rapport aux fonctions fondamentales (1). La fonction I se décompose en un produit de trois facteurs linéaires en ξ, τ_1, ζ .

La signification géométrique de I est facile à trouver. La fonction I s'annule quand le tourbillon au point P est dans un des plans principaux de l'ellipsoïde des dilatations en ce point, c'est-à-dire dans un des plans principaux du cône

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \gamma_1 yz + \gamma_2 zx + \gamma_3 xy = 0.$$

3. *Vecteurs de point du premier ordre.* — Si nous appelons de même *vecteur de point du premier ordre* tout vecteur indépendant du choix des axes dont les expressions sont formées uni-

quement à l'aide des dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

il est facile de montrer que tous ces vecteurs peuvent être exprimés à l'aide de *trois vecteurs fondamentaux et des fonctions de point* (1).

On peut prendre, pour vecteurs fondamentaux, les trois suivants :

1° Le tourbillon Ω de projections

$$(\Omega) \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta;$$

2° Le vecteur Φ de projections

$$(\Phi) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta};$$

3° Le vecteur Ψ de projections

$$(\Psi) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}.$$

Soit alors un vecteur de point quelconque du premier ordre ayant pour projections

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu;$$

les trois fonctions

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta = A, \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = B, \\ \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = C, \end{array} \right.$$

étant les produits géométriques du vecteur (λ, μ, ν) par les trois vecteurs Ω , Φ , Ψ ont des significations indépendantes du choix des axes; ce sont donc des *fonctions de point du premier ordre*. Les quantités A, B, C s'expriment donc en fonction des six fonctions fondamentales (1).

En résolvant alors les équations (2) par rapport à λ , μ , ν , on obtiendra les projections du vecteur considéré en fonction des

projections des trois vecteurs fondamentaux et des six fonctions fondamentales.

6. *Dérivées totales par rapport au temps de fonctions et vecteurs de point du premier ordre.* — Nous avons montré antérieurement (*loc. cit.*) que les dérivées totales par rapport à t de fonctions et de vecteurs de point du premier ordre s'expriment par des fonctions ou vecteurs de point dépendant de la vitesse et de l'accélération, accompagnés de fonctions et vecteurs du premier ordre.

Je compléterai les formules données à cet égard dans le *Journal de mathématiques* en donnant l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$.

Si nous appelons u' , v' , w' les projections du vecteur accélération J de la particule fluide placée en $P(x, y, z)$, ces quantités sont des fonctions de t, x, y, z .

Nous poserons, pour simplifier,

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & \varepsilon'_2 &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & \varepsilon'_3 &= \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ \gamma'_1 &= \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, & \gamma'_2 &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, & \gamma'_3 &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}, \\ {}_2\xi' &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, & {}_2\eta' &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, & {}_2\zeta' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nous aurons alors, d'après les expressions de

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{dE_1}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d\Gamma_1}{dt}, \quad \dots,$$

données dans les *Comptes rendus* du 26 janvier 1903 et dans le *Journal de Mathématiques*, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau_1} \frac{d\tau_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{dt} \\ &\quad + \xi^2 \frac{dE_1}{dt} + \eta^2 \frac{dE_2}{dt} + \zeta^2 \frac{dE_3}{dt} \\ &\quad + \tau_1\zeta \frac{d\Gamma_1}{dt} + \zeta\xi \frac{d\Gamma_2}{dt} + \xi\tau_1 \frac{d\Gamma_3}{dt}. \end{aligned}$$

La première partie

$$\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{dt}$$

est égale à

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \xi' + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \eta' + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \zeta' - 2\theta\psi + 2\kappa\Omega^2;$$

la seconde partie, composée des six derniers termes, est égale à

$$\Sigma [(4\varepsilon_2\varepsilon'_3 + 4\varepsilon_3\varepsilon'_2 - 2\gamma_1\gamma'_1)\xi^2 + 2(\gamma_2\gamma'_3 + \gamma_3\gamma'_2 - 2\varepsilon_1\gamma'_1 - 2\gamma_1\varepsilon'_1)\eta\xi] \\ - \theta\psi + \kappa\Omega^2 - 4\varphi\Omega^2 + 4\theta\Omega^4.$$

On a donc enfin

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \xi' + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \eta' + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \zeta' \\ + \Sigma [(4\varepsilon_2\varepsilon'_3 + 4\varepsilon_3\varepsilon'_2 - 2\gamma_1\gamma'_1)\xi^2 + 2(\gamma_2\gamma'_3 + \gamma_3\gamma'_2 - 2\varepsilon_1\gamma'_1 - 2\gamma_1\varepsilon'_1)\eta\xi] \\ - 3\theta\psi + 3\kappa\Omega^2 - 4\varphi\Omega^2 + 4\theta\Omega^4.$$

Dans cette formule, la première et la deuxième ligne du second membre forment chacune un invariant simultané des deux vecteurs vitesse et accélération.

Je me bornerai à cette formule, en laissant de côté le calcul des dérivées géométriques des vecteurs fondamentaux Φ et Ψ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \right),$$

qui se fait aisément à l'aide des formules précédentes.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 JANVIER 1903.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil.

Communications :

M. Hadamard : *Sur une question de calcul des variations.*

M. Hadamard : *Sur une question relative à la division du cercle.*

M. Servant : *Sur les lignes de déformation nulle dans la théorie de l'Élasticité.*

M. Hadamard : *Observations sur la Communication précédente.*

SÉANCE DU 21 JANVIER 1903.

PRÉSIDENCE DE M. PAINLEVÉ.

Communications :

M. Buhl : *Sur la détermination des surfaces dont les lignes asymptotiques ont une projection orthogonale donnée sur un plan.*

M. Raffy : *Sur la transformation de Petersen et le problème des réseaux conjugués persistants.*

M. Servant : *Sur un théorème relatif aux surfaces W.*

M. Borel : *Sur la théorie du contact.*

M. Perrin : *Sur l'équation différentielle des coniques.*

MM. Kœnigs, Borel, Servant, Bricard, Painlevé : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Kœnigs : *Sur la construction du centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe entraînée dans le mouvement d'une figure plane.*

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1903.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Communications :

M. Raffy : *Sur la détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales.*

M. Buhl : *Sur les méthodes de Cauchy et Riemann pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.*

M. Borel : *Sur la définition de la hauteur des nombres d'un ensemble dénombrable.*

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1903.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Hadamard : *Sur les glissements dans les fluides.*

M. Touche : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Perrin : *Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques.*

MM. Laisant, Bricard, Hadamard : *Observations sur la Communication précédente.*

SÉANCE DU 4 MARS 1903.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Laisant : *Sur un problème d'interpolation.*

M. Bricard : *Sur quelques développements en fractions continues numériques obtenus par M. Deltour.*

M. Servant : *Sur un problème relatif à la déformation des surfaces.*

M. Raffy : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Hadamard : *Rectification à sa Communication du 18 février.*

SÉANCE DU 18 MARS 1903.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. André : *Sur les couples actifs de permutations.*

M. Fouret : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Hadamard : *Sur un résultat de M. Estanave.*

M. Hadamard : *Résolution du problème mixte posé dans l'Article : Sur l'intégrale résiduelle (1). Application à l'équation des télégraphistes.*

(1) Ce *Bulletin*, 1900, p. 69.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

DÉTERMINATION EXPLICITE DES SURFACES QUI PRÉSENTENT UN RÉSEAU DOUBLEMENT CYLINDRÉ ;

Par M. L. RAFFY.

Pour poser le problème que je vais résoudre ici, je citerai le début d'une Note que j'ai publiée il y a quatre ans ⁽¹⁾ :

« Si une surface présente un réseau conjugué (u, v) tel que les plans osculateurs, menés aux courbes $v = \text{const.}$ en tous les points de chaque ligne $u = \text{const.}$, soient parallèles à une direction fixe (U_1, U_2, U_3) , je dirai que la famille $u = \text{const.}$ est *cylindrée*. (On sait que toute famille de lignes de courbure *planes* est cylindrée.) Si la même propriété appartient aux deux familles du réseau, on dira que la surface est *doublement cylindrée* : telles sont, par exemple, les surfaces de translation et d'autres dépendant d'un plus grand nombre de fonctions arbitraires. Je reviendrai sans doute sur la théorie générale de ces surfaces, qui me paraît mériter d'être développée. »

Quelques semaines après l'apparition de cette Note, M. Guichard ⁽²⁾, qui avait retrouvé, sous le nom de *loi de parallélisme des réseaux*, une remarquable transformation, due au géomètre russe K. Peterson ⁽³⁾, donnait l'intéressante indication que voici :

« Parmi les réseaux parallèles à un réseau doublement cylindrée, il y en a un dont les deux tangentes rencontrent chacune une courbe fixe. Cette propriété permet de construire tous ces réseaux. On peut diriger les calculs de façon à n'introduire que des quadratures dans les résultats. »

⁽¹⁾ *Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXXVIII, 1899, p. 285).

⁽²⁾ *Sur quelques applications de la loi de parallélisme des réseaux et des congruences* (Ibid., p. 723).

⁽³⁾ *Recueil mathématique de Moscou*, 1866. — Voir aussi une Note de M. Stäckel *Sur la déformation des surfaces* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXXIII, 1896, p. 677) et un Mémoire du même auteur inséré dans les *Mathematische Annalen* (t. XLIX).

Ces lignes m'avaient décidé à ne pas revenir sur le problème général des surfaces doublement cylindrées. Mais mon attention ayant été rappelée récemment sur la transformation de Peterson, je reconnus que le théorème de M. Guichard ne fournit pas les réseaux doublement cylindrés dont une famille est composée de courbes de contact de cylindres circonscrits (*réseaux singuliers*). Cela tient à ce que les réseaux *singuliers* se correspondent à eux-mêmes, comme il sera prouvé plus loin (n° 16), dans la transformation considérée. J'ai ainsi été conduit à reprendre le problème par la méthode indiquée dans ma Note, et j'ai obtenu la détermination entièrement explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré, par des formules où ne figure *aucun signe de quadrature*.

J'ai comparé mes résultats relatifs aux réseaux *non singuliers* avec ceux que fournit la méthode de M. Guichard; cette méthode conduit effectivement à des quadratures portant sur des fonctions arbitraires; mais, si l'on fait disparaître les signes de quadrature, on retrouve exactement les formules obtenues au paragraphe III du présent travail.

En vue d'applications éventuelles, je détermine, dans un dernier paragraphe, toutes les surfaces qui présentent un réseau *doublement cylindré à invariants égaux*.

I. — FAMILLES CYLINDRÉES ET RÉSEAUX DOUBLEMENT CYLINDRÉS.

1. On sait que, quand les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué sur une surface (S), les coordonnées ponctuelles x, y, z de cette surface satisfont à une équation de Laplace

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Cela posé, nous énoncerons quelques lemmes qui caractérisent comme familles *cylindrées* certaines familles de courbes, communes à toutes les surfaces.

LEMME I. — *Le réseau (u, v) étant conjugué, pour que les lignes $u = \text{const.}$ soient des courbes de contact de cylindres*

circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(1) \quad B_1 = 0.$$

LEMME II. — *Le réseau (u, v) étant conjugué, si les lignes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cylindres circonscrits, les plans osculateurs menés aux courbes $v = \text{const.}$ en tous les points de chaque ligne $u = \text{const.}$ sont parallèles à un plan fixe, et réciproquement.*

LEMME III. — *Le réseau (u, v) étant conjugué, pour que les lignes $u = \text{const.}$ soient des courbes de contact de cônes circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$(2) \quad BB_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0.$$

LEMME IV. — *Le réseau (u, v) étant conjugué, si les lignes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cônes circonscrits, les plans osculateurs menés aux courbes $v = \text{const.}$ en tous les points de chaque ligne $u = \text{const.}$ passent par une droite fixe, qui est la tangente au lieu du sommet des cônes, et réciproquement.*

Il suit évidemment de ces lemmes que toute famille de courbes d'ombre, faisant partie d'un réseau conjugué, est une famille cylindrée.

2. Voici maintenant, d'après ma Note précitée, le caractère analytique général d'une famille cylindrée.

LEMME V. — *Le réseau (u, v) étant conjugué, pour que les lignes $u = \text{const.}$, supposées n'être pas des courbes de contact de cylindres circonscrits, forment une famille cylindrée, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) + B_1 \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) = 0.$$

En effet, nous avons à exprimer que le plan osculateur à la courbe de paramètre v , mené au point (x, y, z) où cette courbe rencontre une ligne de la famille $u = \text{const.}$, est parallèle, quel

que soit v , à une droite dont les coefficients directeurs $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ ne dépendent que de u . Or l'équation de ce plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{u^2} & y''_{u^2} & z''_{u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

On a donc la condition de parallélisme

$$\begin{vmatrix} a(u) & b(u) & c(u) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{u^2} & y''_{u^2} & z''_{u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

En conséquence, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions ρ et μ telles qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial v} (\rho \theta'_u + \mu \theta''_{u^2}) = 0 \quad (\theta = x, y, z),$$

ce qui peut s'écrire

$$\mu \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

Si l'on remplace θ''_{uv} par sa valeur tirée de l'équation fondamentale (E) et qu'on ordonne suivant les dérivées de θ , il vient

$$\begin{aligned} \left(\mu B + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \left(\mu B B_1 + \mu \frac{\partial B}{\partial u} + \rho B + \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ + \left(\rho B_1 + \mu B_1^2 + \mu \frac{\partial B_1}{\partial u} \right) \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Cette condition étant vérifiée par les trois coordonnées x, y, z , on reconnaît aisément qu'elle doit se réduire à une identité. On aura donc

$$(4) \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu B = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho B + \mu B B_1 + \mu \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

$$(6) \quad \rho B_1 + \mu B_1^2 + \mu \frac{\partial B_1}{\partial u} = 0.$$

Or nous supposons que les lignes $u = \text{const.}$ ne sont pas des

courbes de contact de cylindres circonscrits, c'est-à-dire (lemme I) que la fonction B_1 ne se réduit pas à zéro. Il suit de là que μ ne peut pas être pris égal à zéro, parce que ρ devrait alors être nul aussi et que la double supposition $\rho = \mu = 0$ est inacceptable. La solution $\mu = 0$ étant écartée, l'équation (4) donne

$$\mu = e^{-\int B_1 dv}.$$

On tire de l'équation (6)

$$\rho = -\mu \left(B_1 + \frac{\partial \log B_1}{\partial u} \right).$$

Substituant ces expressions de ρ et de μ dans l'équation (5) et négligeant le facteur commun μ , on trouve

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) + B_1 \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) = 0,$$

ce qui est la condition annoncée. Elle est évidemment nécessaire et suffisante, d'après la façon même dont elle a été obtenue (1).

Il est à peine besoin de faire observer que cette condition (3) est vérifiée si l'on a, en particulier,

$$(2) \quad BB_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire si les lignes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cônes circonscrits (lemme III), ce qui s'accorde bien avec le lemme IV.

3. Nous pouvons maintenant aborder la détermination des surfaces admettant un réseau (u, v) doublement cylindré. L'analyse précédente impliquant essentiellement la condition $B_1 \neq 0$, les réseaux dont fait partie une famille $u = \text{const.}$ de courbes de contact de cylindres circonscrits et qui sont caractérisés (lemme I) par l'hypothèse $B_1 = 0$, ne rentrent pas, bien que cette famille soit cylindrée (lemme II), dans la classe générale des réseaux dont

(1) Elle exprime (en vertu du lemme I) que les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à la surface (S) suivant les lignes $u = \text{const.}$ sont, sur la surface (Σ) qu'elles engendrent, des courbes de contact de cylindres circonscrits.

une famille est cylindrée. Si la seconde famille $v = \text{const.}$ d'un parcell réseau ($B_1 = 0$) est cylindrée, ce réseau sera doublement cylindrée, sans pouvoir être donné par les formules générales des réseaux doublement cylindrés que nous établirons ci-après; c'est donc un réseau doublement cylindrée *singulier*, qu'il faut rechercher à part.

II. — RÉSEAUX DOUBLEMENT CYLINDRÉS SINGULIERS.

4. Proposons-nous de déterminer toutes les surfaces qui présentent un réseau doublement cylindrée dont une famille $u = \text{const.}$ est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits. A la condition

$$(1) \quad B_1 = 0$$

il faut associer celle qui exprime que la famille $v = \text{const.}$ est cylindrée. En vertu du lemme V, nous obtiendrons cette relation en échangeant u et v , ainsi que B et B_1 dans la relation (3), ce qui donne

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) + B \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) = 0.$$

Mais il ne faut pas perdre de vue l'hypothèse $B = 0$, exclue par le lemme V et en vertu de laquelle (lemme II) la famille $v = \text{const.}$ est cylindrée. Il faut donc, avant tout, mentionner ce cas extrême $B = B_1 = 0$.

5. *Cas extrême* $B = B_1 = 0$. — Cette double hypothèse, réduisant l'équation fondamentale à $\eta''_{uv} = 0$, ne correspond qu'aux surfaces dites *surfaces de translation*

$$(I) \quad x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

qui, toutes, sont doublement cylindrées (n° 1).

6. *Cas intermédiaire*. — Supposant désormais $B \neq 0$, nous pouvons faire usage de la condition (3'), que l'hypothèse $B_1 = 0$ réduit à

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + B \right) = 0.$$

On conclut de là

$$\frac{\partial \log B}{\partial v} + B = \frac{V''}{V'},$$

en désignant par V une fonction de v seulement, par V' et V'' ses deux premières dérivées. Le résultat précédent s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V'}{B} \right) = V'.$$

Intégrant et désignant par U une fonction de u seulement, nous trouvons

$$(7) \quad B = \frac{V'}{U + V}.$$

Supposons que la fonction U se réduise à une constante : on peut alors prendre $U = 0$. L'équation fondamentale (E) devient

$$\frac{\theta''_{uv}}{\theta'_u} = B = \frac{V''}{V'}.$$

On a donc, par une première intégration,

$$x'_u = U'_1 V, \quad y'_u = U'_2 V, \quad z'_u = U'_3 V;$$

et, par une seconde intégration,

$$(II) \quad \begin{cases} x = U_1 V + V_1, \\ y = U_2 V + V_2, \\ z = U_3 V + V_3, \end{cases}$$

les U_i désignant trois fonctions arbitraires de u et les V_i trois nouvelles fonctions arbitraires de v . Ces formules, qui ne contiennent en fait que *cinq* fonctions arbitraires (au lieu de sept), représentent *toutes les surfaces qui admettent un réseau conjugué formé par une famille $u = \text{const.}$ de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille $v = \text{const.}$ de courbes de contact de cônes circonscrits*. En effet, B_1 étant nul et B indépendant de u , on a bien

$$BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

ce qui est (lemme III) la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $v = \text{const.}$ soient des courbes de contact de cônes circonscrits.

7. *Cas général.* — Revenons à la relation (7)

$$B = \frac{V'}{U + V},$$

et supposons maintenant la dérivée U' différente de zéro. L'équation fondamentale (E) s'écrit

$$\frac{\theta''_{uv}}{\theta'_v} = \frac{V'}{U + V},$$

et donne, par une intégration immédiate,

$$\theta'_u = (U + V) \varphi(u).$$

Il convient de prendre

$$\varphi(u) = \frac{d}{du} \frac{U'_i}{U'} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ce que nous sommes en droit de faire, d'après l'hypothèse actuelle $U' \neq 0$. Nous aurons donc, pour x par exemple,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (U + V) \frac{d}{du} \frac{U'_1}{U'}.$$

Intégrant par parties et désignant par V_1 une fonction arbitraire de v , nous trouvons

$$x = \frac{U'_1}{U'} (U + V) - \int U'_1 du = \frac{U'_1}{U'} (U + V) - (U_1 + V_1).$$

En conséquence, *les surfaces qui admettent un réseau doublement cylindré formé par une famille $u = \text{const.}$ de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille de lignes $v = \text{const.}$ qui ne sont ni des courbes de contact de cylindres circonscrits, ni des courbes de contact de cônes circonscrits, sont représentées par les formules*

$$(III) \quad \begin{cases} x = \frac{U'_1}{U'} (U + V) - (U_1 + V_1), \\ y = \frac{U'_2}{U'} (U + V) - (U_2 + V_2), \\ z = \frac{U'_3}{U'} (U + V) - (U_3 + V_3), \end{cases}$$

où les U sont des fonctions arbitraires de u , les V des fonctions

arbitraires de v . Elles dépendent effectivement de *six* fonctions arbitraires.

8. On peut se proposer de distinguer parmi ces surfaces celles sur lesquelles les courbes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cylindres *parallèles à un plan fixe*. Il est bien connu que, dans ce cas, les courbes $v = \text{const.}$ sont situées dans des plans parallèles au plan fixe. Les surfaces correspondantes sont donc la généralisation des surfaces moulures cylindriques de Monge, puisqu'elles présentent un réseau conjugué dont une famille est composée de sections parallèles à un plan, et l'autre de courbes de contact de cylindres circonscrits parallèles à ce plan. Pour les trouver, supposons, par exemple, les sections planes $v = \text{const.}$ parallèles au plan $z = 0$. Il suffira d'écrire que, dans les formules (III), l'expression de z est indépendante de u . On trouve ainsi les formules

$$(8) \quad \begin{cases} x = \frac{U'_1}{U'}(U + V) - (U_1 + V_1), \\ y = \frac{U'_2}{U'}(U + V) - (U_2 + V_2), \\ z = W(v), \end{cases}$$

qui ne contiennent, en fait, que *cinq* fonctions arbitraires et qu'on peut écrire plus simplement en prenant $U = u$, $W = v$. On arrive sans difficulté à un résultat tout à fait équivalent en considérant le cylindre variable

$$y - ux = \varphi(z, u),$$

et en déterminant la fonction φ de telle sorte que, sur la surface enveloppe de ce cylindre, les plans osculateurs aux courbes de contact $u = \text{const.}$, menés aux divers points de chaque section plane $z = \text{const.}$, soient parallèles à une droite.

9. *Remarque.* — On connaît trois classes de surfaces, *dépendant de fonctions arbitraires*, sur lesquelles un réseau conjugué (u, v) reste conjugué dans une série continue de déformations. Ces réseaux *persistants* sont tous des réseaux doublement cylindrés :

1° Les surfaces de Peterson et Bianchi,

$$z = X(x) + Y(y),$$

sont doublement cylindrées, comme surfaces de translation :

2° Les surfaces de Peterson,

$$x = U_1 V, \quad y = U_2 V, \quad z = V_3,$$

rentrent dans notre type (II), c'est-à-dire dans le cas intermédiaire des réseaux singuliers ;

3° Les surfaces de MM. Młodzieiowski et Goursat,

$$x = \frac{U_1'}{U'}(U + V) - U_1, \quad y = \frac{U_2'}{U'}(U + V) - U_2, \quad z = W(v),$$

rentrent dans notre type (III), c'est-à-dire dans le cas général des réseaux singuliers.

III. — RÉSEAUX DOUBLEMENT CYLINDRÉS NON SINGULIERS.

10. D'après le lemme V, pour obtenir toutes les surfaces présentant un réseau doublement cylindré *non singulier*, c'est-à-dire dont aucune des deux familles n'est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits, il faut intégrer l'équation fondamentale

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

dont les coefficients B et B₁ satisfont au système

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) + B_1 \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) = 0,$$

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) + B \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) = 0.$$

Il est naturel de former les invariants h et k de l'équation (E). On trouve ainsi :

$$h = B \left(B_1 - \frac{\partial B}{\partial u} \right), \quad k = B_1 \left(B_2 - \frac{\partial B_1}{\partial v} \right).$$

et il est visible que le système (3), (3') est vérifié quand on suppose à la fois

$$h = 0, \quad k = 0:$$

on sait qu'alors l'intégration de l'équation (E) est immédiate.

Supposons maintenant $h \neq 0$. Je dis que l'équation (E₁) fournie par l'application de la méthode de Laplace a son invariant h_1 égal à zéro. On a, en effet,

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v},$$

ou, en développant les calculs,

$$h_1 = BB_1 - 2 \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left(B_1 - \frac{\partial B}{\partial u} \right).$$

Or, l'équation (3') donne

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \left(B_1 - \frac{\partial B}{\partial u} \right) = -B.$$

Il vient, en conséquence,

$$h_1 = BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v};$$

c'est le premier membre de l'équation (3'); donc $h_1 = 0$.

A raison de la symétrie des équations (3) et (3'), on verrait de même que si k est différent de zéro, l'équation (E₋₁) a son invariant k_{-1} égal à zéro.

En conséquence, nous distinguerons trois cas : le cas extrême $h = 0, k = 0$; le cas intermédiaire $h \neq 0, k = 0$, ce qui entraîne $h_1 = 0$; le cas général, $h \neq 0, k \neq 0$, ce qui entraîne $h_1 = 0, k_{-1} = 0$.

11. *Cas extrême.* — La double hypothèse $h = k = 0$ revient, d'après le lemme III, à supposer que les deux familles du réseau sont des courbes de contact de cônes circonscrits; et, d'après le lemme IV, les surfaces qui présentent un pareil réseau sont doublement cylindrées. Des considérations géométriques simples montrent que leurs coordonnées ont des expressions de la forme

$$(IV) \quad x = \frac{U_1 + V_1}{U + V}, \quad y = \frac{U_2 + V_2}{U + V}, \quad z = \frac{U_3 + V_3}{U + V},$$

les U ne dépendant que de u , les V que de v .

On peut aussi intégrer très facilement les équations

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Il suffit de poser

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \quad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda}.$$

On trouve immédiatement

$$\lambda''_{uv} = 0, \quad \lambda = U + V, \quad B = -\frac{V'}{U + V}, \quad B_1 = -\frac{U'}{U + V},$$

et l'équation (E) devient

$$\frac{\partial^2(\lambda\theta)}{\partial u \partial v} = 0,$$

ce qui donne bien pour x, y et z les valeurs écrites plus haut.

12. Cas intermédiaire. — La condition $k = 0$ exprime (lemme III) que les lignes $u = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cônes circonscrits; mais, h étant différent de zéro, les lignes $v = \text{const.}$ ne sont pas des courbes d'ombre.

Pour intégrer les équations (3) et (3'), remarquons que, combinées par voie d'addition, elles donnent toujours

$$\frac{\partial^2 \log BB_1}{\partial u \partial v} = 2 BB_1.$$

C'est là une équation de Liouville, dont l'intégrale bien connue est

$$BB_1 = \frac{U'V'}{(U + V)^2},$$

U désignant une fonction de u seulement, dont la dérivée est U' , et V une fonction de v seulement, dont la dérivée est V' .

De cette relation, qui est valable dans tous les cas, rapprochons la condition $k = 0$, qui donne

$$BB_1 = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Il viendra

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} = \frac{U'V'}{(U + V)^2},$$

d'où résulte, par une intégration immédiate,

$$B_1 = - \frac{U'}{U+V} + f(u).$$

Pour plus de ressemblance avec ce que nous trouverons dans le cas général, nous écrirons

$$(9) \quad B_1 = - \frac{U'}{U+V} + \frac{U'_0}{U_0} = \frac{U'_0(U+V) - U'U_0}{U_0(U+V)}.$$

Or B est ici la dérivée logarithmique de B_1 par rapport à v ; nous aurons donc

$$(10) \quad B = - \frac{V'}{U+V} + \frac{V'U'_0}{U'_0(U+V) - U'U_0}.$$

Si l'on porte ces valeurs de B_1 et B dans l'équation (E), l'invariant k sera nul, ainsi que l'invariant h_1 de l'équation (E₁). Or on sait que l'hypothèse $k = 0$ réduit l'équation (E) à la forme

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - B_1 \theta \right) - B \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - B_1 \theta \right) = 0.$$

Nous aurons donc une intégrale particulière θ en posant

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} - B_1 \theta = 0,$$

d'où l'on tire, avec une nouvelle fonction arbitraire V_1 dépendant seulement de v ,

$$(11) \quad \theta = V_1 e^{\int B_1 du} = \frac{V_1 U_0}{U+V}.$$

D'autre part, si nous effectuons la transformation de Laplace

$$(12) \quad \theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial v} - B \theta,$$

nous serons conduits à l'équation (E₁), qui, ayant son invariant h_1 égal à zéro, peut s'écrire

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \log B}{\partial v} \right) - B_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \log B}{\partial v} \right) = 0,$$

et l'on sait que θ est lié à θ_1 par la relation

$$(14) \quad h\theta = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = B_1 \theta_1.$$

Nous aurons donc une intégrale particulière pour θ_1 , et conséquemment pour θ , en posant

$$(13') \quad \frac{\partial \log \theta_1}{\partial v} = \frac{\partial \log B}{\partial v},$$

ce qui donne d'abord $\theta_1 = BU_1$, puis

$$(15) \quad \theta = \frac{B}{h} U_1' - U_1,$$

U_1 désignant une fonction arbitraire de u seulement et U_1' la dérivée de U_1 .

D'après la théorie des équations de Laplace, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (E) en ajoutant les deux solutions (11) et (15), ce qui donne

$$\theta = \frac{B}{h} U_1' - U_1 + \frac{U_0 V_1}{U + V}.$$

Il n'y a plus qu'à calculer le coefficient de U_1' , dont l'expression générale est

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}}.$$

Or, si l'on substitue dans ce rapport les expressions (9) et (10) des coefficients B_1 et B , on trouve aisément

$$(10)' \quad \frac{B}{h} = \frac{\frac{U_0'}{U'} (U + V) - U_0}{\left(\frac{U_0'}{U'} \right)' (U + V)},$$

et l'on est assuré que le rapport $U_0' : U'$ ne se réduit pas à une constante, sans quoi h serait nul, contrairement à notre hypothèse actuelle.

Pour passer de l'une des coordonnées aux deux autres, on doit conserver les fonctions U , U_0 et V et remplacer par de nouvelles

fonctions arbitraires les fonctions U_1 et V_1 qu'a introduites l'intégration. On trouve ainsi :

$$(V) \quad \begin{cases} x = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V) - U_0}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)} U'_1 - U_1 + \frac{U_0 V_1}{U+V}, \\ y = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V) - U_0}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)} U'_2 - U_2 + \frac{U_0 V_2}{U+V}, \\ z = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V) - U_0}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)} U'_3 - U_3 + \frac{U_0 V_3}{U+V}. \end{cases}$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des surfaces qui présentent *un réseau doublement cylindré dont une famille ($u = \text{const.}$) est formée par des courbes de contact de cônes circonscrits*, les lignes $v = \text{const.}$ n'étant point des courbes de contact soit de cônes, soit de cylindres circonscrits.

13. De même que nous avons obtenu précédemment (n° 8) une généralisation des surfaces moulures, on peut ici généraliser la double propriété des surfaces de Joachimsthal en distinguant parmi les surfaces (V) celles pour lesquelles les cônes circonscrits suivant les lignes $u = \text{const.}$ *ont leurs sommets en ligne droite*. On sait, d'après un théorème dû à M. Kænigs, que les lignes $v = \text{const.}$ sont les sections faites dans la surface par les plans qui contiennent cette droite. Prenons cette droite pour axe des z , et exprimons que les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, menées aux divers points de chaque ligne $u = \text{const.}$, vont passer par un point $(0, 0, U_4)$ de Oz ; nous trouvons

$$\frac{x'_u}{x} = \frac{y'_u}{y} = \frac{z'_u}{z - U_4}.$$

On reconnaît immédiatement que la valeur commune de ces rapports est égale à B_1 . On a donc

$$\frac{\partial \log x}{\partial u} = \frac{\partial \log y}{\partial u} = B_1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{U_0}{U+V},$$

d'où l'on déduit

$$(16) \quad x = \frac{U_0 V_1}{U + V}, \quad y = \frac{U_0 V_2}{U + V}.$$

Rapprochant de ces équations la dernière des formules (V), on a les coordonnées de toutes les surfaces qui présentent un *réseau azimutal doublement cylindré*.

Il serait d'ailleurs facile de résoudre le problème directement, à l'aide des formules

$$y = vx, \quad z = u + x\varphi(u, v), \quad x\varphi'_u = 1 = 0,$$

qui représentent une surface quelconque, rapportée à ses sections azimutales $v = \text{const.}$ et aux courbes de contact $u = \text{const.}$ des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur l'axe Oz . La famille $u = \text{const.}$ est cylindrée, puisque les plans des courbes $v = \text{const.}$ passent par l'axe Oz . En exprimant que la famille plane est également cylindrée, on obtient une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, d'où l'on peut tirer l'expression entièrement explicite de la fonction φ .

14. *Cas général.* — Les deux invariants h et k sont différents de zéro. Il suit de là (n° 10) que l'équation (E_1) a son invariant h_1 égal à zéro et que l'invariant k_{-1} de l'équation (E_{-1}) est nul également.

Nous sommes donc en droit de reprendre toutes les déductions du n° 12 relatives à l'équation (E_1) , de sorte que l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

admet la solution particulière déjà trouvée dans le cas intermédiaire

$$(15) \quad \theta = \frac{B}{h} U'_1 - U_1.$$

Les mêmes considérations s'appliquant à l'équation (E_{-1}) ; nous aurons aussi une autre solution particulière

$$(17) \quad \theta = \frac{B_1}{k} V'_1 - V_1,$$

si V_1 est une fonction arbitraire de v et V'_1 sa dérivée. On sait que

l'intégrale générale de l'équation (E) est la somme de ces deux solutions particulières :

$$(18) \quad 0 = \frac{B}{h} U'_1 - U_1 + \frac{B_1}{k} V'_1 - V_1.$$

Tout revient donc à *déterminer les expressions les plus générales des fonctions B et B₁ qui satisfont aux équations*

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) + B_1 \left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} \right) = 0,$$

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) + B \left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} \right) = 0.$$

A cet effet nous poserons

$$(19) \quad B = \frac{\sigma''_{uv}}{2\sigma'_u}, \quad B_1 = \frac{\sigma''_{uv}}{2\sigma'_v}.$$

Les deux équations proposées se réduisent à la suivante

$$(20) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sigma''_{uv}}{\sigma'_u \sigma'_v} = \frac{1}{2} \frac{\sigma''_{uv}}{\sigma'_u \sigma'_v}.$$

C'est une équation de Liouville, dont l'intégrale est

$$(21) \quad \frac{\sigma''_{uv}}{\sigma'_u \sigma'_v} = \frac{4U'V'}{(U+V)^2},$$

ce qui s'accorde bien avec la relation générale

$$BB_1 = \frac{U'V'}{(U+V)^2},$$

remarquée à propos du cas intermédiaire (n° 12).

L'équation (21) est l'une de celles qu'a intégrées M. Goursat (*Bull. Soc. math.*, t. XXV, p. 44). On a pour les dérivées de σ les expressions suivantes

$$(22) \quad \sigma'_u = \frac{(U+V)^2}{U'} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{U_0+V_0}{U+V} \right)^2, \quad \sigma'_v = \frac{(U+V)^2}{V'} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{U_0+V_0}{U+V} \right)^2,$$

U_0 et V_0 étant deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de v .

Dès lors les formules (19) donnent par différentiation

$$(23) \quad \begin{cases} B = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\sigma'_u} = - \frac{U'}{U+V} \frac{V'(U_0+V_0) - V'_0(U+V)}{U'(U_0+V_0) - U'_0(U+V)}, \\ B_1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\sigma'_v} = - \frac{V'}{U+V} \frac{U'(U_0+V_0) - U'_0(U+V)}{V'(U_0+V_0) - V'_0(U+V)}. \end{cases}$$

Remarquons en passant que, si l'on introduit la double hypothèse

$$U_0 = \text{const.}, \quad V_0 = \text{const.}$$

dans ces formules, on retrouve les expressions de B et B_1 relatives au cas extrême (n° 11). Si l'on suppose que la seule fonction V_0 se réduise à une constante, on retrouve les expressions (9) et (10) de B_1 et de B relatives au cas intermédiaire (n° 12).

Il ne nous reste plus, pour avoir effectivement les coordonnées x, y, z comprises dans le type (18), qu'à calculer les deux rapports $B:h$ et $B_1:k$, au moyen des formules (23) ou, mieux, au moyen des formules (19), (21) et (22).

D'après les expressions générales (n° 10) des invariants h et k , nous avons

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}}, \quad \frac{B_1}{k} = \frac{1}{B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}}.$$

Il vient donc, eu égard aux formules (19),

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{\sigma'_v}}{B}}.$$

Mais on a, en vertu de ces mêmes formules et de l'équation (21),

$$\frac{B}{\sqrt{\sigma'_v}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma'_u}} \frac{\sigma''_{uv}}{2\sqrt{\sigma'_u \sigma'_v}} = \frac{\sqrt{U'V'}}{(U+V)\sqrt{\sigma'_u}}.$$

Remplaçons $\sqrt{\sigma'_u}$ par son expression (22); nous trouverons

$$\frac{\sqrt{\sigma'_v}}{B} = \frac{(U+V)^2}{U'\sqrt{V'}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{U_0+V_0}{U+V},$$

ou, en effectuant la différentiation,

$$\frac{\sqrt{2v}}{B} = \frac{1}{\sqrt{U'}} \left[\frac{U'_0}{U'} (U + V) - (U_0 + V_0) \right].$$

De là résulte immédiatement

$$(24) \quad \frac{B}{h} = \frac{\frac{U'_0}{U'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'} \right)' (U + V)},$$

formule qui se réduit à la formule analogue (10') quand on suppose $V_0 = \text{const.}$ A raison de la symétrie des calculs, nous pouvons écrire immédiatement

$$(25) \quad \frac{B_1}{k} = \frac{\frac{V'_0}{V'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'} \right)' (U + V)}.$$

Portons ces expressions (24) et (25) dans l'expression générale (18) des coordonnées x, y, z , et désignons par $U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3$, les fonctions arbitraires qui correspondent aux trois coordonnées. Nous trouverons

$$\text{VI) } \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\frac{U'_0}{U'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'} \right)' (U + V)} U'_1 + \frac{\frac{V'_0}{V'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'} \right)' (U + V)} V'_1 - (U_1 + V_1), \\ y &= \frac{\frac{U'_0}{U'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'} \right)' (U + V)} U'_2 + \frac{\frac{V'_0}{V'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'} \right)' (U + V)} V'_2 - (U_2 + V_2), \\ z &= \frac{\frac{U'_0}{U'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'} \right)' (U + V)} U'_3 + \frac{\frac{V'_0}{V'} (U + V) - (U_0 + V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'} \right)' (U + V)} V'_3 - (U_3 + V_3). \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des surfaces qui présentent *un réseau doublement cylindré, aucune des deux familles de ce réseau ne se composant de courbes de contact, soit de cylindres, soit de cônes circonscrits.* Elles dépendent en fait de *huit* (et non dix) fonctions arbitraires.

IV. — DIGRESSION SUR LA TRANSFORMATION DE PETERSON
OU TRANSFORMATION PAR RÉSEAUX PARALLÈLES.

15. A une surface (S) dont les coordonnées ponctuelles (x, y, z) sont exprimées en fonctions de deux paramètres (u, v) on veut faire correspondre une surface (S)' de coordonnées x', y', z' , de telle manière qu'à tout couple (u, v) correspondent sur les deux surfaces des points M et M' où les courbes coordonnées aient leurs tangentes respectivement parallèles. C'est en cela que consiste la transformation imaginée par Peterson en 1866. Pour la réaliser, on pose

$$(26) \quad d\theta' = P \frac{\partial \theta}{\partial u} du + Q \frac{\partial \theta}{\partial v} dv, \quad (\theta = x, y, z; \theta' = x', y', z').$$

La condition d'intégrabilité de cette expression différentielle donne

$$(P - Q) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que le réseau (u, v) doit être conjugué sur la surface (S); si donc on écrit

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

on voit, en identifiant cette équation avec la précédente, que P et Q doivent satisfaire aux deux conditions

$$(27) \quad \frac{\partial P}{\partial v} + B(P - Q) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial u} + B_1(Q - P) = 0.$$

Comme, d'autre part, on peut alors passer de (S') à (S) par la transformation

$$(26)' \quad d\theta = \frac{1}{P} \frac{\partial \theta'}{\partial u} du + \frac{1}{Q} \frac{\partial \theta'}{\partial v} dv,$$

le réseau (u, v) est conjugué aussi sur la surface (S'); d'où l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B' \frac{\partial \theta'}{\partial u} + B'_1 \frac{\partial \theta'}{\partial v}.$$

Si l'on remplace P et Q par leurs inverses dans les équations (27)

en même temps que B et B_1 par B' et B'_1 , on trouve immédiatement

$$B' = \frac{Q}{P} B, \quad B'_1 = \frac{P}{Q} B_1.$$

Il suit de là, entre autres conséquences, qu'à un réseau conjugué dont une famille $u = \text{const.}$ est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits ($B_1 = 0$), la transformation considérée fait correspondre un réseau dans lequel la famille $u = \text{const.}$ est également formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits ($B'_1 = 0$). C'est cette propriété que nous avons visée dans l'introduction du présent travail.

Le procédé qui semble le plus élégant pour traiter les équations (27) consiste à poser

$$P - Q = 2\zeta, \quad P + Q = 2\tau.$$

Il vient alors

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = -\frac{\partial \zeta}{\partial v} - 2B\zeta, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial u} + 2B_1\zeta,$$

d'où la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial \zeta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} \right) \zeta = 0.$$

Telle est l'équation dont dépend le problème dans le cas général. C'est l'*adjointe* de l'équation (E); elle a ses deux invariants *nuls*, quand le réseau (u, v) de la surface (S) est formé de deux familles de courbes d'ombre, et alors seulement, d'où l'importance particulière de ces réseaux.

16. Dans ce qui suit, nous supposerons que sur la surface (S) le réseau (u, v) est un réseau à *invariants égaux*, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$(28) \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Pour satisfaire à cette condition, nous poserons

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \quad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda};$$

d'où résulte pour l'équation (E) la forme bien connue

$$\frac{(\lambda\theta)''_{uv}}{\lambda\theta} = \frac{\lambda''_{uv}}{\lambda};$$

l'équation en ζ deviendra

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} - 2 \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \zeta = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)''_{uv}}{\frac{\zeta}{\lambda}} = \frac{\lambda''_{uv}}{\lambda};$$

On vérifie évidemment cette équation en prenant ζ proportionnel à λ^2 . D'une manière plus générale, si l'on pose

$$\zeta = \lambda^2 \theta,$$

on retrouve pour θ l'équation que vérifient les trois coordonnées (x, y, z) de la surface (S).

Sans nous arrêter aux conséquences que l'on pourrait déduire de cette remarque, revenons à la solution particulière $\zeta = \lambda^2$; elle entraîne $\tau = \text{const.}$ ⁽¹⁾. Si nous prenons $\tau = 0$, il viendra

$$P = \lambda^2, \quad Q = -\lambda^2,$$

ce qui montre que, si l'on connaît une surface (x, y, z) rapportée à un réseau conjugué (u, v) à invariants égaux, pour lequel on ait

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \quad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda},$$

les formules

$$\theta' = \int \lambda^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} du - \frac{\partial \theta}{\partial v} dv \right) \quad (\theta = x, y, z)$$

représenteront une surface (x', y', z') sur laquelle le réseau (u, v) sera un réseau conjugué à invariants égaux, et les coefficients de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les trois coordonnées x', y', z' auront respectivement pour valeurs

$$B' = -B, \quad B'_1 = -B_1.$$

⁽¹⁾ Il est aisé de voir que l'on ne peut réduire τ à une constante que si le réseau est à invariants égaux.

La réciproque de cette proposition s'établit facilement; elle nous servira dans le paragraphe qui suit.

On voit que la transformation de Peterson pour les réseaux à invariants égaux conduit à la transformation de Moutard (DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, n° 391).

V. — RÉSEAUX DOUBLEMENT CYLINDRÉS A INVARIANTS ÉGAUX.

17. A raison de l'importance spéciale des réseaux conjugués à invariants égaux, nous allons déterminer tous ceux de ces réseaux qui sont en même temps des réseaux doublement cylindrés. Nous avons donc à introduire dans nos résultats antérieurs la nouvelle condition

$$(28) \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v},$$

caractéristique des réseaux à invariants égaux.

Parmi les réseaux *singuliers*, ceux qui correspondent au cas *extrême*

$$B_1 = 0, \quad B = 0,$$

et ceux qui correspondent au cas *intermédiaire*

$$B_1 = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

sont évidemment des réseaux à invariants égaux.

Les réseaux *singuliers* qui correspondent au cas *général*

$$B_1 = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial u} \neq 0,$$

ne sont pas à invariants égaux, puisque ces deux hypothèses sont contradictoires avec la condition (28).

Parmi les réseaux *non singuliers*, ceux qui correspondent au cas *extrême*

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

sont évidemment des réseaux à invariants égaux.

En conséquence, les réseaux conjugués formés par deux

familles de courbes d'ombre (courbes de contact de cylindres ou de cônes circonscrits) *sont à invariants égaux*. Les surfaces qui présentent de tels réseaux sont définies par les formules (I), (II) et (IV).

Ceux des réseaux *non singuliers* qui correspondent au *cas intermédiaire*

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} \neq \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

ne sont pas à invariants égaux, puisque l'une de ces hypothèses est contradictoire avec la condition (28).

18. Il nous reste donc à chercher, parmi les réseaux *non singuliers* qui correspondent au *cas général*, ceux qui sont à invariants égaux. On pourrait effectuer cette recherche en partant des formules générales (23)

$$B = - \frac{U'}{U+V} \frac{V'(U_0+V_0) - V'_0(U+V)}{U'(U_0+V_0) - U'_0(U+V)},$$

$$B_1 = - \frac{V'}{U+V} \frac{U'(U_0+V_0) - U'_0(U+V)}{V'(U_0+V_0) - V'_0(U+V)},$$

dans lesquelles on introduirait la condition

$$(28) \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Mais il est plus simple de reprendre les équations *générales* des réseaux non singuliers, savoir

$$(3) \quad BB_1 + \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B_1}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$(3') \quad BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} = 0,$$

et de les intégrer à nouveau en tenant compte de l'hypothèse (28). A cet effet, nous poserons

$$(29) \quad B = \tau'_v, \quad B_1 = \tau'_u,$$

ce qui réduit les équations (3) et (3') aux suivantes

$$(30) \quad \tau'_u \tau'_v = \frac{\partial^2 \log \tau'_u}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \tau'_v}{\partial u \partial v}.$$

L'égalité des deux derniers rapports entraîne

$$\frac{\sigma'_v}{V'} = \frac{\sigma'_u}{U'},$$

les deux dénominateurs, l'un fonction de v , l'autre fonction de u , étant différents de zéro; sans quoi l'un au moins des coefficients B et B_1 serait nul, et le réseau serait *singulier*. Cette dernière relation montre que σ est une fonction de la somme $U + V$; nous écrirons donc

$$\sigma = \sigma(U + V),$$

d'où résultera

$$B = V' \sigma', \quad B_1 = U' \sigma';$$

et les équations concordantes (30) nous donneront

$$\sigma'^2 = \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} \right)'.$$

Pour intégrer cette équation, qui est du second ordre par rapport à la fonction inconnue σ' , nous poserons

$$\sigma' = \frac{1}{\omega}.$$

Il vient ainsi

$$\left(\frac{\omega'}{\omega} \right)' + \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

Il suffit de multiplier par $2\omega' : \omega$ pour obtenir l'intégrale première

$$(31) \quad \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{\omega^2} = \text{const.} = m^2.$$

Nous avons ici deux cas à distinguer, suivant que m est nul ou différent de zéro.

19. *Première hypothèse* : $m = 0$. L'équation (31) se réduit à

$$\omega' = \mp 1;$$

d'où deux solutions

$$\omega = \mp (U + V).$$

La première donne

$$B = \frac{V'}{\omega} = - \frac{V'}{U + V}, \quad B_1 = \frac{U'}{\omega} = - \frac{U'}{U + V},$$

et nous retrouvons, comme il fallait s'y attendre, les réseaux formés par *deux familles de courbes de contact de cônes circonscrits*. Les surfaces correspondantes sont représentées par les formules (IV).

La seconde solution donne

$$B = \frac{V'}{\omega} = \frac{V'}{U+V}, \quad B_1 = \frac{U'}{\omega} = \frac{U'}{U+V}.$$

Les valeurs de B et B_1 sont égales et de signes contraires aux précédentes. D'après ce qui a été vu à la fin du n° 16, les coordonnées θ' des surfaces cherchées pourront être calculées au moyen des coordonnées θ des surfaces précédentes ($\omega' = -1$) par la transformation de Peterson, particularisée de manière à conserver l'égalité des invariants,

$$\theta' = \int \lambda^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} du - \frac{\partial \theta}{\partial v} dv \right).$$

On sait (n° 11) qu'ici λ représente $U+V$ et θ le quotient de $U+V_i$ par λ ; nous prendrons

$$\theta = \frac{U_i + V_i}{U + V}.$$

Il vient alors, après un calcul facile,

$$\theta' = (U+V)(U_i - V_i) - 2 \int U' U_i du + 2 \int V' V_i dv.$$

Pour effectuer les intégrations, il suffit de poser

$$U_i = \frac{U'_1}{2U'}, \quad V_i = -\frac{V'_1}{2V'},$$

U_1 et V_1 étant deux nouvelles fonctions arbitraires. On trouve alors, en effaçant les accents des coordonnées θ' ,

$$(VII) \quad \begin{cases} x = \frac{U+V}{2} \left(\frac{U'_1}{U'} + \frac{V'_1}{V'} \right) - (U_1 + V_1), \\ y = \frac{U+V}{2} \left(\frac{U'_2}{U'} + \frac{V'_2}{V'} \right) - (U_2 + V_2), \\ z = \frac{U+V}{2} \left(\frac{U'_3}{U'} + \frac{V'_3}{V'} \right) - (U_3 + V_3). \end{cases}$$

Telles sont les formules qui définissent les surfaces pour lesquelles on a $\omega' = 1$. On les déduit des formules (VI) en faisant dans ces dernières $2V_0 = V^2$, $2U_0 = -U^2$.

20. *Seconde hypothèse* : $m \neq 0$. L'équation (31) s'écrit

$$\omega'^2 - m^2 \omega^2 = 1.$$

Son intégrale générale est

$$\omega = \frac{1}{m} \operatorname{Sh} m(U + V + c).$$

Nous avons mis en évidence, dans l'argument du sinus hyperbolique, une constante arbitraire c , que l'on pourrait évidemment faire rentrer dans la somme des deux fonctions arbitraires U et V . Mais, à raison de la remarque qui a été faite (n° 16) sur les réseaux à invariants égaux, il y a intérêt à retrouver les deux solutions où B et B_1 ont des couples de valeurs égales et de signes contraires. On les obtient en faisant d'abord $c = 0$, ce qui donne

$$\omega = \frac{\operatorname{Sh} m(U + V)}{m}, \quad B = \frac{mV'}{\operatorname{Sh} m(U + V)}, \quad B_1 = \frac{mU'}{\operatorname{Sh} m(U + V)},$$

puis $c = \frac{i\pi}{m}$, ce qui donne

$$\omega = -\frac{\operatorname{Sh} m(U + V)}{m}, \quad B = -\frac{mV'}{\operatorname{Sh} m(U + V)}, \quad B_1 = -\frac{mU'}{\operatorname{Sh} m(U + V)}.$$

On voit que les deux classes de surfaces qui se correspondent par la transformation

$$\theta' = \int \lambda^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} du - \frac{\partial \theta}{\partial v} dv \right),$$

au lieu d'être distinctes comme elles l'étaient pour $m = 0$, rentrent dans un type unique, indépendant même de la valeur de m ; ce qui nous permet de prendre $m = 1$ avec $c = 0$, d'où

$$B = \frac{V'}{\operatorname{Sh}(U + V)}, \quad B_1 = \frac{U'}{\operatorname{Sh}(U + V)}.$$

Si nous faisons dans ces formules $e^U = U_0$, $e^{-V} = V_0$, elles

deviennent

$$B = - \frac{2 U_0 V_0'}{U_0^2 - V_0^2}, \quad B_1 = \frac{2 V_0 U_0'}{U_0^2 - V_0^2}$$

et nous devons intégrer avec ces valeurs de B et B_1 l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Mais nous avons vu (n° 14) qu'à cause des relations $h_1 = k_{-1} = 0$ l'intégrale générale de cette équation était

$$\theta = \frac{U_1'}{B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}} - U_1 + \frac{V_1'}{B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}} - V_1,$$

U_1 et V_1 désignant de nouvelles fonctions arbitraires. Si l'on calcule les dénominateurs de U_1' et de V_1' , on trouve

$$B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} = \frac{U_0' (U_0 + V_0)}{U_0 (U_0 - V_0)},$$

$$B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} = - \frac{V_0' (U_0 + V_0)}{V_0 (U_0 - V_0)}.$$

Nous avons donc, pour représenter les surfaces cherchées, les équations

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0} \left(\frac{U_0}{U_0'} U_1' - \frac{V_0}{V_0'} V_1' \right) - (U_1 + V_1), \\ y = \frac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0} \left(\frac{U_0}{U_0'} U_2' - \frac{V_0}{V_0'} V_2' \right) - (U_2 + V_2), \\ z = \frac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0} \left(\frac{U_0}{U_0'} U_3' - \frac{V_0}{V_0'} V_3' \right) - (U_3 + V_3). \end{array} \right.$$

Ces dernières formules, jointes aux formules (I), (II), (IV) et (VII), font connaître *l'ensemble des surfaces qui admettent un réseau conjugué (u, v) doublement cylindré à invariants égaux*. Le problème que nous nous étions proposé est donc entièrement résolu.

MÉMOIRE SUR LES COUPLES ACTIFS DES PERMUTATIONS;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

INTRODUCTION.

1. Pour donner une idée de l'objet et des résultats du présent Mémoire, il est nécessaire de rappeler deux notions déjà anciennes, celle des *séquences* des permutations, celle des *deux espèces* de permutations; et de faire connaître une notion toute nouvelle, celle des *couples actifs* des permutations.

Les permutations, d'ailleurs, dont nous nous occupons, sont celles des n premiers nombres : ces nombres en sont les éléments.

2. Une permutation quelconque des n premiers nombres est formée évidemment de suites alternatives d'éléments croissants ou décroissants. Chacune de ces suites est une *séquence*. La permutation

$$8\ 7\ 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5\ 9$$

est ainsi formée des quatre séquences

$$871, \quad 16, \quad 642, \quad 2359;$$

et la permutation

$$7\ 8\ 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5\ 9,$$

des cinq séquences

$$78, \quad 81, \quad 16, \quad 642, \quad 2359.$$

3. Les permutations de n éléments se partagent en *deux espèces* : celles qui contiennent un nombre pair de séquences composent la première; celles qui en contiennent un nombre impair composent la seconde. La première des permutations ci-dessus (2) contient quatre séquences : elle appartient à la première espèce; la deuxième en contient cinq : elle appartient à la seconde.

4. Lorsque, dans une permutation de n éléments, on échange entre eux deux éléments quelconques, tantôt cette permutation change d'espèce, tantôt elle n'en change pas. Si elle en change, les deux éléments considérés constituent un *couple actif*; sinon,

un *couple inactif*. Dans chacune (2) des permutations précédentes, 8 et 6 forment un couple actif; 4 et 3, un couple inactif.

C'est aux couples actifs, et à eux seulement, que sont consacrés les trois Chapitres composant ce Mémoire.

5. D'abord (Chap. I), je considère les éléments d'une permutation déterminée quelconque de n éléments; je classe les couples de ces éléments; et je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un quelconque d'entre eux soit un couple actif. Je cherche le nombre total des couples actifs contenus dans cette permutation, et j'exprime ce nombre à l'aide d'une formule unique, très simple, où il n'entre, avec le nombre n des éléments, que trois paramètres distincts. J'en déduis la probabilité pour que deux éléments, pris au hasard dans la permutation considérée, forment un couple actif; et je fais connaître la valeur maxima et la valeur minima que cette probabilité peut prendre dans les permutations de n éléments.

6. Passant ensuite (Chap. II) de la considération d'une permutation déterminée, à celle de toutes les permutations de n éléments, je partage ces permutations en *trois sortes*; je nomme, pour des raisons presque géométriques, les permutations entrant dans chacune d'elles : permutations à *segments séparés*, permutations à *segments imbriqués*, permutations à *segments superposés*; et je montre que, dans ces trois sortes, les permutations sont en même nombre. Dans ces trois sortes, d'ailleurs, je ne prends provisoirement que les permutations où les deux premiers éléments, les deux derniers et les $n - 4$ intermédiaires se suivent dans l'ordre des grandeurs croissantes : ce sont les *permutations ordonnées*; et je donne des formules indiquant les calculs à effectuer pour obtenir les nombres φ_n , γ_n , ψ_n des couples actifs contenus respectivement dans les permutations ordonnées des trois sortes. Ces formules présentent chacune une superposition de quatre $\sum$; mais elles ne sont, toutes les trois, que des cas particuliers d'une formule unique; et, en effectuant sur cette dernière les calculs indiqués, j'obtiens, pour φ_n , γ_n , ψ_n en fonction de n , des expressions très courtes, d'une remarquable simplicité.

7. Enfin (Chap. III), ne me bornant plus aux permutations

ordonnées, je considère toutes les permutations de n éléments; je fais connaître, en fonction de n , le *nombre total* des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations à segments séparés, dans l'ensemble des permutations à segments imbriqués, dans l'ensemble des permutations à segments superposés; et j'en déduis, pour chacun de ces ensembles, le *nombre moyen* des couples actifs contenus dans une permutation. Faisant abstraction des trois sortes de permutations, je considère le système complet des permutations de n éléments; je détermine, en fonction de n , le *nombre total* des couples actifs qu'il contient; le *nombre moyen* de ceux que contient une permutation quelconque; et le rapport de ce nombre moyen au nombre n des éléments. Tous ces résultats me permettent alors de résoudre plusieurs questions de probabilités, dont voici la dernière : *Quelle est la probabilité d'obtenir un couple actif en prenant deux éléments quelconques dans une permutation quelconque de n éléments ?*

8. Le présent Mémoire est fondé tout entier, comme je l'ai déjà dit, sur la notion des séquences, qui est due à Bienaymé ⁽¹⁾; sur celle des deux espèces de permutations que j'ai fait connaître en 1891 ⁽²⁾; sur celle, enfin, des couples actifs que je viens de définir ici même (4). Comme on devait s'y attendre, il existe certaines relations ou analogies entre la théorie des couples actifs et la théorie des séquences; la plus remarquable est sans doute celle-ci : *Dans le système complet des permutations de n éléments, lorsque n croît au delà de toute limite, le nombre moyen des couples actifs et le double du nombre moyen des séquences sont deux infiniment grands équivalents, c'est-à-dire deux infiniment grands dont le rapport tend vers l'unité.*

9. Ce résultat est nouveau, comme le sont, d'ailleurs, tous ceux qu'on va lire. J'ai exposé les principaux d'entre eux dans une courte Note, présentée à l'Académie des Sciences le 2 février 1903. Ce qui m'a permis de les obtenir tous, malgré la grande difficulté du sujet, c'est l'idée que j'ai eue de partager en trois sortes les permutations de n éléments. Bien que cette classi-

⁽¹⁾ *Académie des Sciences*, séance du 6 septembre 1875.

⁽²⁾ *Société philomathique de Paris*, séance du 27 juin 1891.

fication soit tout à fait conforme à la nature des choses, je n'y suis parvenu qu'après de longs tâtonnements et pour ainsi dire en dernier lieu. Mais, dans le présent Mémoire, j'ai tout ordonné de façon qu'elle y apparût dès le commencement et s'y présentât comme d'elle-même. J'espère que le Mémoire tout entier, grâce à ce mode d'exposition, sera rendu très lisible et très clair.

CHAPITRE PREMIER.

DES COUPLES ACTIFS D'UNE PERMUTATION DÉTERMINÉE.

I. — *Échange de deux éléments.*

10. Lorsque, dans une permutation des n premiers nombres, on échange entre eux deux éléments ou nombres déterminés, quelconques d'ailleurs, tantôt cette permutation change d'espèce, tantôt elle n'en change pas. Nous allons chercher, dans tous les cas possibles, à quels couples d'éléments échangés correspondent ces différents résultats.

11. Pour répondre à cette question, nous supposerons n égal et supérieur à 4 ; puis nous remarquerons :

D'abord, que, dans toute permutation, les séquences, prises dans l'ordre où elles se succèdent, sont alternativement *ascendantes* et *descendantes*, ou réciproquement ;

Ensuite, que, si la première et la dernière séquences de la permutation sont l'une ascendante et l'autre descendante, ou réciproquement, cette permutation présente un nombre pair de séquences ;

Enfin, qu'elle en présente un nombre impair lorsque ces séquences extrêmes sont toutes deux ascendantes ou toutes deux descendantes.

12. Il suit immédiatement de là que les cas où la permutation changera d'espèce seront ceux où l'une des séquences extrêmes changera de sens, l'autre n'en changeant pas ; que les cas où la permutation ne changera pas d'espèce seront ceux où les séquences extrêmes changeront toutes les deux de sens, ou bien n'en changeront ni l'une ni l'autre.

13. Mais le sens de la première séquence est déterminé par les

deux premiers éléments de la permutation, et le sens de la dernière séquence par les deux derniers éléments. Ce sont donc, dans la question qui nous occupe, ces deux couples d'éléments extrêmes qui jouent le rôle prépondérant.

14. Pour cette raison, nous partagerons les éléments de la permutation en trois groupes : les 2 éléments *initiaux*, les 2 éléments *terminaux*, les $n - 4$ éléments *intermédiaires*.

D'ailleurs, comme nous supposons le nombre total n des éléments égal ou supérieur à 4, il est clair que les éléments initiaux et les éléments terminaux sont toujours absolument distincts.

15. Cela étant, prenons, pour les échanger entre eux, deux des n éléments de la permutation. Nous pouvons le faire de quatre manières essentiellement différentes, car nous pouvons prendre :

- 1° Deux éléments intermédiaires;
- 2° Les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux;
- 3° Un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal;
- 4° Enfin, un élément initial avec un élément terminal.

Il nous suffit évidemment, pour répondre à la question que nous nous sommes posée, de trouver, dans chacun de ces quatre cas, si la permutation change d'espèce ou si elle n'en change pas.

16. Supposons qu'on échange entre eux deux éléments intermédiaires.

Les éléments initiaux, non plus que les éléments terminaux, ne subissent aucune variation; la première et la dernière séquence ne changent ni l'une ni l'autre de sens; par suite, la permutation ne change pas d'espèce. Donc :

THÉORÈME. — *Quand on échange entre eux deux éléments intermédiaires quelconques, la permutation ne change jamais d'espèce.*

17. Supposons qu'on échange entre eux les deux éléments initiaux.

La première séquence changeant de sens et la dernière n'en changeant pas, la permutation change d'espèce.

Il en est évidemment de même quand on échange entre eux les deux éléments terminaux. Donc :

THÉORÈME. — *Quand on échange entre eux les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux, la permutation change toujours d'espèce.*

18. Supposons qu'on échange un élément intermédiaire avec l'un, par exemple, des deux éléments initiaux.

Il est clair que la dernière séquence garde son sens; et, par suite, que si les valeurs numériques des deux éléments échangés comprennent entre elles la valeur numérique de l'élément initial resté fixe, la première séquence changeant de sens, la permutation change d'espèce. Il est clair aussi que, si cette condition n'est point remplie, la première séquence ne changeant pas de sens, la permutation ne change pas non plus d'espèce.

On trouverait un résultat analogue si l'on échangeait un élément intermédiaire avec l'un des deux éléments terminaux.

Mais les éléments de nos permutations sont les n premiers nombres. Pour abréger, au lieu de dire que les valeurs numériques de deux éléments comprennent ou ne comprennent pas entre elles la valeur numérique d'un autre, disons simplement que ces deux premiers éléments comprennent ou ne comprennent pas cet autre. Nous pouvons alors résumer de la manière suivante tout ce qui se rapporte à notre troisième cas :

THÉORÈME. — *Lorsqu'on échange un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal, la permutation change ou ne change pas d'espèce suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément initial ou terminal resté fixe.*

19. Supposons enfin qu'on échange un élément initial avec un élément terminal.

Suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément initial resté fixe, la première séquence change ou ne change pas de sens.

De même, suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément terminal resté fixe, la dernière séquence change ou ne change pas de sens.

Si donc nous appelons *extrêmes fixes* l'élément initial et l'élément terminal non déplacés, nous pouvons résumer ainsi tout ce qui se rapporte à notre quatrième et dernier cas :

THÉORÈME. — *Quand on échange un élément initial avec un élément terminal, la permutation change d'espèce si les éléments échangés comprennent entre eux un seul des extrêmes fixes; elle ne change pas d'espèce si les éléments échangés comprennent entre eux les deux extrêmes fixes, ou ne les comprennent ni l'un ni l'autre.*

20. Il est bien évident que les théorèmes qui précèdent, pris ensemble, constituent une solution complète de la question que nous nous étions posée, pour tous les cas où n est égal ou supérieur à 4.

Dans les cas simples où n est égal soit à 2, soit à 3, l'examen direct des permutations conduit à ces deux propositions :

1° *Une permutation de deux éléments ne change jamais d'espèce quand on échange ses deux éléments entre eux;*

2° *Une permutation de trois éléments ne change d'espèce, par l'échange de deux de ses éléments, que quand les deux éléments échangés remplissent cette double condition : d'être juxtaposés dans la permutation et de ne pas contenir entre eux l'élément resté fixe.*

II. — Nombre des couples actifs d'une permutation.

21. D'après ce qui précède, étant donnés une permutation des n premiers nombres et, dans cette permutation, deux éléments quelconques que l'on échange entre eux, nous savons reconnaître si, par l'échange de ces deux éléments, cette permutation change ou ne change pas d'espèce; en d'autres termes, et pour employer les locutions définies plus haut (4), nous savons reconnaître si c'est un couple actif ou un couple inactif que constituent ces deux éléments.

Nous prenons à présent une permutation quelconque des n premiers nombres; nous considérons tous les couples que l'on peut former avec les n éléments de cette permutation; nous cherchons

enfin, parmi tous ces couples, combien il y en a d'actifs, combien il y en a d'inactifs.

22. Mais, avant tout, nous ferons remarquer que le nombre total des couples d'éléments qu'on peut prendre dans cette permutation est égal au nombre des combinaisons simples de n objets 2 à 2, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Si donc nous désignons par γ le nombre des couples actifs, par δ le nombre des couples inactifs, nous avons

$$\gamma + \delta = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que, pour répondre à la question que nous nous sommes posée, il suffit de déterminer l'un seulement des nombres γ et δ .

Nous allons chercher le nombre γ des couples actifs.

23. Pour calculer ce nombre γ , nous supposons le nombre n des éléments de la permutation égal ou supérieur à 4; nous partagerons encore ces n éléments en trois groupes : les 2 éléments initiaux, les 2 éléments terminaux, les $n-4$ éléments intermédiaires; nous déterminerons ensuite combien on rencontre de couples actifs quand on échange entre eux, de toutes les manières possibles :

- 1° Deux éléments intermédiaires;
- 2° Les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux;
- 3° Un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal;
- 4° Un élément initial avec un élément terminal.

24. Quand on échange entre eux deux éléments intermédiaires, la permutation ne change jamais d'espèce (16). Dans ce genre d'échanges, on ne rencontre donc aucun couple actif.

25. Quand on échange entre eux soit les deux éléments initiaux, soit les deux éléments terminaux, la permutation (17) change toujours d'espèce.

L'échange des deux éléments initiaux correspond donc à un couple actif; l'échange des deux éléments terminaux correspond

aussi à un pareil couple. De là, deux couples actifs répondant à ce genre d'échanges.

26. Lorsqu'on échange un élément intermédiaire avec un élément initial, par exemple, la permutation ne change d'espèce (18) que quand les deux éléments échangés comprennent entre eux l'élément initial resté fixe. Il s'ensuit qu'un élément intermédiaire, échangé successivement avec le premier puis avec le second des éléments initiaux, ne donne de couple actif que s'il n'est pas compris entre ces deux éléments initiaux; et que, quand cette condition est remplie, il ne donne qu'un seul couple actif. Le nombre des couples actifs qu'on rencontre en échangeant, de toutes les manières possibles, un élément intermédiaire avec un élément initial est donc juste égal au nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux.

On verrait de même que le nombre des couples actifs qu'on rencontre en échangeant, de toutes les manières possibles, un élément intermédiaire avec un élément terminal est juste égal au nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux.

Cela posé, appelons α la différence, prise en valeur absolue, des deux éléments initiaux; β la différence, prise en valeur absolue aussi, des deux éléments terminaux; i le nombre des éléments initiaux non compris entre les deux éléments terminaux, et j le nombre des éléments terminaux non compris entre les deux éléments initiaux.

Pour obtenir les éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux, il nous suffit évidemment d'écrire la suite des n premiers nombres; d'y barrer les deux éléments initiaux, puis les $\alpha - 1$ éléments que ces éléments initiaux comprennent entre eux, et enfin les j éléments terminaux qu'ils ne comprennent point. Le nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux est donc

$$n - 2 - (\alpha - 1) - j,$$

c'est-à-dire

$$(n - 1) - \alpha - j.$$

Pour obtenir les éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux, il nous suffit de même d'écrire la suite

des n premiers nombres; d'y barrer les deux éléments terminaux; puis les $\beta - 1$ éléments que ces éléments terminaux comprennent entre eux; et enfin les i éléments initiaux qu'ils ne comprennent point. Le nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux est donc

$$n - 2 - (\beta - 1) - i,$$

c'est-à-dire

$$(n - 1) - \beta - i.$$

Il suit de tout cela que, en faisant tous les échanges possibles d'un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal, on rencontre un nombre de couples actifs égal à

$$2(n - 1) - (\alpha + \beta) - (j + i).$$

27. Lorsqu'on échange un élément initial avec un élément terminal, la permutation ne change d'espèce (19) que quand les deux éléments échangés comprennent entre eux un et un seul des deux extrêmes restés fixes. Par suite, le nombre des couples actifs qu'on rencontre en ce genre d'échanges dépend uniquement des valeurs de i et de j .

Il y a évidemment trois cas à distinguer, et trois seulement : celui où i et j sont l'un et l'autre égaux à 2; celui où ils sont l'un et l'autre égaux à 1; celui où ils sont égaux l'un à 0 et l'autre à 2. Un examen direct, d'une facilité extrême, donne pour ces trois cas les résultats suivants :

1° Lorsque i et j sont l'un et l'autre égaux à 2, il y a deux couples actifs;

2° Lorsque i et j sont l'un et l'autre égaux à 1, il n'y a aucun couple actif;

3° Enfin, lorsque i et j sont égaux l'un à 0, l'autre à 2, il y a encore deux couples actifs.

28. Connaissant le nombre des couples actifs qu'on rencontre dans chaque genre d'échanges de deux éléments, nous sommes en état d'écrire le nombre total des couples actifs que présente une permutation déterminée quelconque des n premiers nombres. Nous n'avons évidemment, pour obtenir ce nombre total, qu'à ajouter les nombres de couples actifs qui correspondent à chaque genre d'échanges.

En effectuant cette addition, et simplifiant légèrement les résultats qu'elle donne, nous arrivons aux trois propositions suivantes :

1° Si i et j sont l'un et l'autre égaux à 2, le nombre total des couples actifs est

$$2(n-1) - (\alpha + \beta) + (4 - i - j);$$

2° Si i et j sont l'un et l'autre égaux à 1, le nombre total des couples actifs est

$$2(n-1) - (\alpha + \beta) + (2 - i - j);$$

3° Enfin, si i et j sont égaux l'un à 0, l'autre à 2, le nombre total des couples actifs est

$$2(n-1) - (\alpha + \beta) + (4 - i - j).$$

29. Les trois résultats que nous venons d'obtenir consistent chacun en une somme algébrique de trois termes, dont les deux premiers sont toujours les mêmes, mais dont le troisième affecte deux formes différentes. Pour ramener ces trois résultats à une seule forme, il suffirait donc d'y ramener leur troisième terme. On y parvient par la considération de la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres i et j .

Soit, en effet, ε cette différence, prise en valeur absolue.

1° Lorsque i et j sont l'un et l'autre égaux à 2, la différence ε est nulle, et l'on a

$$4 - i - j = \varepsilon;$$

2° Lorsque i et j sont l'un et l'autre égaux à 1, la différence ε est encore nulle, et l'on a

$$2 - i - j = \varepsilon;$$

3° Enfin, lorsque i et j sont égaux l'un à 0 et l'autre à 2, la différence ε est égale à 2, et l'on a

$$4 - i - j = \varepsilon.$$

Par conséquent, le troisième terme des sommes considérées est toujours égal à ε ; par conséquent, en conservant aux lettres α ,

β , ε les significations que nous leur avons attribuées, nous pouvons énoncer ce théorème unique :

THÉORÈME. — *Dans une permutation déterminée quelconque des n premiers nombres, n étant égal ou supérieur à 4, le nombre total γ des couples actifs est donné par la formule*

$$\gamma = 2(n-1) - (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

30. Les trois lettres α , β , ε qui entrent dans cette formule représentent les valeurs absolues de trois différences, c'est-à-dire de trois quantités affectées tantôt du signe $+$, tantôt du signe $-$. La formule ne subsiste que parce qu'on y fait abstraction de ces signes. C'est là, ce nous semble, un fait remarquable et contraire à ce qui arrive d'ordinaire en algèbre, où les formules ne sont le plus souvent générales que lorsque l'on y prend avec leurs signes respectifs toutes les quantités qui y figurent.

31. Notre formule (29) suppose, d'ailleurs, essentiellement que, dans la permutation considérée, les éléments initiaux et les éléments terminaux soient distincts, c'est-à-dire que le nombre n des éléments soit égal ou supérieur à 4. Il est aisé de voir :

1° *Que, si n est égal à 2, il n'y a aucun couple actif;*

2° *Que, si n est égal à 3, le nombre des couples actifs est juste égal à la différence, prise en valeur absolue, du premier et du dernier élément de la permutation.*

32. D'après ce que nous avons vu (22) sur la somme $\gamma + \delta$, il est inutile que nous fassions une étude spéciale du nombre total δ des couples inactifs : nous avons, quelle que soit la valeur de n ,

$$\delta = \frac{n(n-1)}{2} - \gamma;$$

et, par conséquent, toutes les fois que n est au moins égal à 4,

$$\delta = \frac{(n-1)(n-4)}{3} + (\alpha + \beta) - \varepsilon.$$

III. — Question de probabilité.

33. Considérons une permutation déterminée quelconque des

n premiers nombres, et cherchons la probabilité pour qu'elle change d'espèce lorsque l'on y échange entre eux deux éléments pris au hasard.

D'après la définition même de la probabilité d'un événement, il nous suffit, pour résoudre ce problème, de calculer le nombre des cas possibles et le nombre des cas favorables, puis de diviser ce dernier nombre par le précédent.

34. Grâce aux calculs, déjà effectués, du nombre γ des couples actifs et du nombre δ des couples inactifs, la détermination de la probabilité cherchée π ne présente aucune difficulté.

Évidemment, en effet, un cas est favorable lorsque les deux éléments échangés forment un couple actif; défavorable, lorsqu'ils forment un couple inactif. Il s'ensuit que le nombre des cas favorables est égal à γ ; celui des cas défavorables, à δ ; celui des cas possibles, à $\gamma + \delta$; et, par conséquent, que la probabilité cherchée π est donnée par la formule

$$\pi = \frac{\gamma}{\gamma + \delta}.$$

35. Or, nous avons établi, d'une part (22), pour toutes les valeurs de n , l'égalité

$$\gamma + \delta = \frac{n(n-1)}{2};$$

de l'autre (20), pour les valeurs de n égales ou supérieures à 4, l'égalité

$$\gamma = 2(n-1) - (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Donc, si l'on suppose n égal ou supérieur à 4, en conservant aux trois lettres α , β , ε les significations qu'on leur a données précédemment (26 et 29), on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La probabilité π pour qu'une permutation déterminée des n premiers nombres change d'espèce lorsque l'on y échange entre eux deux éléments pris au hasard est donnée par la formule*

$$\pi = \frac{4(n-1) - 2(\alpha + \beta) + 2\varepsilon}{n(n-1)}.$$

36. Appliquons ce théorème aux trois permutations des neuf premiers nombres

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 4 & 7 & 1 & 8 & 3 & 9 & 5 & 6, \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 9 & 7 & 8 & 2 & 4, \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 9. \end{array}$$

Dans la première,

$$n = 9, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \varepsilon = 0;$$

la probabilité est égale à $\frac{13}{36}$.

Dans la deuxième,

$$n = 9, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \varepsilon = 0;$$

la probabilité est $\frac{1}{3}$.

Dans la troisième,

$$n = 9, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 8, \quad \varepsilon = 2;$$

la probabilité est $\frac{1}{4}$.

37. On voit sur ces exemples, comme sur la formule (35), qu'il correspond, aux diverses permutations des n premiers nombres, des probabilités qui peuvent avoir des valeurs très différentes. On est conduit par là à se demander quelles sont, pour ces permutations des n premiers nombres, la valeur maxima et la valeur minima que puisse prendre la probabilité cherchée.

Or, si l'on considère l'expression de cette probabilité, on constate que son dénominateur, ne dépendant que de n , est le même pour toutes les permutations considérées. Il suffit donc d'étudier le numérateur. Et comme ce numérateur à son tour peut s'écrire

$$4(n-1) - 2(\alpha + \beta - \varepsilon),$$

il est évidemment d'autant plus grand ou plus petit que le trinome $\alpha + \beta - \varepsilon$ est, au contraire, plus petit ou plus grand.

Ainsi, la recherche du maximum ou du minimum de la probabilité π est ramenée à celle du minimum ou du maximum du trinome $\alpha + \beta - \varepsilon$.

Il suit immédiatement de l'examen direct des valeurs simulta-

nément possibles de α , β , ε : que ce trinôme est toujours positif; que la plus petite valeur qu'il puisse prendre est 2; et que la plus grande est $2n - 4$. Il s'ensuit aussi que le maximum et le minimum de la probabilité π sont donnés respectivement par les expressions

$$\frac{4(n-2)}{n(n-1)}, \quad \frac{4}{n(n-1)},$$

dont la première vaut $n - 2$ fois la seconde.

38. Dans le cas particulier où n est égal à 9, on trouve, pour le maximum et le minimum respectifs,

$$\frac{7}{18} \quad \text{et} \quad \frac{1}{18}.$$

Les probabilités qu'on a obtenues dans les exemples précédents tombent toutes les trois entre ces valeurs limites. On peut donner des exemples où la probabilité ait pour valeur soit le maximum soit le minimum qu'on vient de calculer.

Considérons, en effet, ces deux nouvelles permutations des neuf premiers nombres

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 8, \\ 1 & 8 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 9 & 2. \end{array}$$

Dans la première,

$$n = 9, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \varepsilon = 0;$$

la probabilité atteint $\frac{7}{18}$, c'est-à-dire la valeur maxima. Dans la seconde,

$$n = 9, \quad \alpha = 7, \quad \beta = 7, \quad \varepsilon = 0;$$

la probabilité se réduit à $\frac{1}{18}$, c'est-à-dire à la valeur minima.

39. Revenons à la formule (35) qui nous a donné la probabilité cherchée π : elle ne suppose connus que les quatre nombres n , α , β , ε . La probabilité que nous étudions est donc absolument déterminée dès que l'on connaît le nombre des éléments de la permutation considérée, ses deux éléments initiaux et ses deux éléments terminaux. C'est là un résultat qui nous semble remarquable. Peut-être pouvait-on le prévoir après ce que nous avons dit (13) sur le rôle prépondérant que jouent, dans les questions

d'espèces, les deux éléments initiaux et les deux éléments terminaux.

40. Quoi qu'il en soit, le théorème qui précède (35) résout complètement la question de probabilité que nous nous étions posée (33), sauf dans le cas où n est égal à 2, et dans celui où il est égal à 3.

Dans chacun de ces cas, nos raisonnements sont en défaut et nos notations perdent leur sens. Mais il suffit, soit de se rappeler ce que nous avons dit (31) sur les permutations de deux et sur celles de trois éléments, soit de procéder à un examen direct de ces permutations pour arriver très facilement aux deux résultats suivants :

1° *En toute permutation des 2 premiers nombres, la probabilité cherchée est nulle;*

2° *En toute permutation des 3 premiers nombres, cette probabilité est égale au tiers de la différence, prise en valeur absolue, du premier et du dernier élément de la permutation.*

CHAPITRE II.

DES COUPLES ACTIFS DANS L'ENSEMBLE DES PERMUTATIONS ORDONNÉES.

I. — *Les trois sortes de permutations.*

41. Pour simplifier l'étude des couples actifs dans les permutations des n premiers nombres, n étant au moins égal à 4, rappelons-nous que le nombre γ des couples actifs d'une quelconque de ces permutations dépend seulement des valeurs qu'y présentent α , β et ϵ . *A fortiori*, ce nombre γ est-il déterminé lorsque l'on connaît, dans cette permutation, les deux éléments initiaux et les deux éléments terminaux ?

Nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, par a le plus petit des éléments initiaux et par A le plus grand; par b le plus petit des éléments terminaux et par B le plus grand.

42. Les permutations, très nombreuses, où les éléments initiaux et les éléments terminaux ont les mêmes valeurs détermi-

nées a et A , b et B , contiennent chacune le même nombre de couples actifs. Mais combien existe-t-il de ces permutations ?

On les obtient évidemment toutes en écrivant, dans tous les ordres possibles, d'abord les deux éléments initiaux a et A , ensuite les $n - 4$ éléments intermédiaires; enfin les deux éléments terminaux b et B . Le nombre total de ces permutations est donc $2!(n - 4)!2!$, c'est-à-dire $(n - 4)!4$.

Pour savoir combien ces permutations, toutes ensemble, contiennent de couples actifs, il nous suffira donc de multiplier par $(n - 4)!4$ le nombre des couples actifs contenus dans l'une quelconque de ces permutations.

43. Nous sommes ainsi ramenés à étudier, à la place des permutations considérées, les *quaternes* formés par leurs éléments extrêmes a , A , b , B . La première chose à faire, c'est de trouver le nombre de ces quaternes; la seconde, de les classer.

44. Un quaterne quelconque n'est autre chose qu'un système de quatre nombres pris parmi les n premiers; mais, à un même système de quatre nombres, correspondent toujours six quaternes différents.

Supposons, en effet, ces quatre nombres mis, à la suite les uns des autres, dans l'ordre croissant; et, au-dessous de chacun d'eux, écrivons celle des lettres a , A , b , B qui répond au rôle qu'il joue dans la permutation. Après les avoir ainsi écrites, de toutes les manières possibles, ces quatre lettres nous présenteront six dispositions différentes, ni plus ni moins, qui sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} aAbB, \quad abAB, \quad abBA, \\ bBaA, \quad baBA, \quad baAB; \end{array}$$

et, à ces six dispositions, correspondront six quaternes différents.

Le nombre total des quaternes est donc égal au sextuple du nombre des combinaisons simples de n éléments 4 à 4, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{4} n(n - 1)(n - 2)(n - 3).$$

On peut vérifier en passant que le produit du nombre des qua-

ternes par celui des permutations correspondant à l'un quelconque d'entre eux est bien égal à $n!$, c'est-à-dire au nombre total des permutations de n éléments.

43. Pour classer les quaternes que nous venons d'énumérer (44), considérons les six quaternes qui correspondent à un même groupe de quatre nombres. Ils répondent, nous venons de le voir (44), à ces six dispositions

$$\begin{array}{l} aAbB, \quad abAB, \quad abBA, \\ bBaA, \quad baBA, \quad baAB, \end{array}$$

lesquelles, à la manière dont nous les avons écrites, se partagent évidemment en trois couples.

Dans chacun des quaternes $aAbB$, $bBaA$ du premier couple, i et j sont l'un et l'autre égaux à 2; donc ε est égal à zéro.

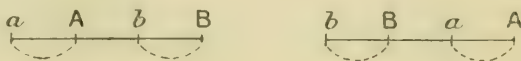
Dans chacun des quaternes $abAB$, $baBA$ du deuxième couple, i et j sont l'un et l'autre égaux à 1; donc ε est encore égal à zéro.

Dans chacun des quaternes $abBA$, $baAB$ du troisième couple, i et j sont égaux l'un à 0, l'autre à 2; et, par conséquent, ε est égal à 2.

Ces trois couples correspondent donc aux trois cas que nous avons distingués déjà (29); les quaternes, pris tous ensemble, peuvent donc se partager en trois sortes, caractérisées chacune par le système correspondant des valeurs de i , j et ε .

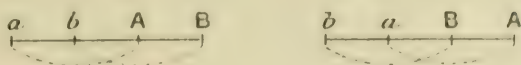
46. Ces trois sortes de quaternes peuvent être caractérisés d'une façon encore plus nette, et pour ainsi dire géométrique. Considérons, en effet, les quatre nombres a , A , b , B ; écrivons-les sur une même droite dans leur ordre de grandeurs croissantes; puis, marquons par un trait le segment aA , et, par un autre, le segment bB .

Les deux quaternes $aAbB$, $bBaA$ du premier nous donnent ainsi les deux figures



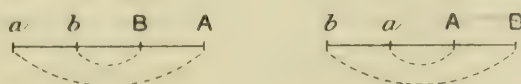
où les segments aA , bB sont *séparés*.

Les deux quaternes $abAB$, $baBA$ du deuxième couple nous donnent de même les deux figures



où les segments aA , bB empiètent l'un sur l'autre, c'est-à-dire sont *imbriqués*.

Les deux quaternes $abBA$, $baAB$ du troisième couple nous donnent enfin les deux figures



où les segments aA , bB sont placés l'un sur l'autre, c'est-à-dire *superposés*.

Nous pouvons donc dire que nos quaternes se partagent en trois sortes :

- 1° Les quaternes à *segments séparés*;
- 2° Les quaternes à *segments imbriqués*;
- 3° Les quaternes à *segments superposés*.

47. Étendant aux permutations des n premiers nombres ce que nous venons de dire (46) relativement aux quaternes qui leur correspondent, nous dirons que ces permutations sont à segments séparés, imbriqués, superposés, suivant que leurs quaternes sont eux-mêmes à segments séparés, imbriqués, superposés. Nous partagerons donc ces permutations en trois sortes :

- 1° Les permutations à *segments séparés*;
- 2° Les permutations à *segments imbriqués*;
- 3° Les permutations à *segments superposés*.

48. Considérons un système quelconque de quatre nombres pris parmi les n premiers nombres entiers. Ce système nous fournit, comme on l'a vu (46), deux quaternes à segments séparés, deux à segments imbriqués, deux à segments superposés. Or, le nombre des systèmes de quatre éléments, pris parmi les n premiers nombres entiers, est le nombre C_n^4 des combinaisons simples de n objets 4 à 4. Donc, il y a $2C_n^4$ quaternes à segments

séparés, $2C_n^4$ à segments imbriqués et $2C_n^4$ à segments superposés.

Pour obtenir le nombre des permutations de n éléments à segments soit séparés, soit imbriqués, soit superposés, il nous suffit donc de multiplier dans chaque cas $(n - 4)! \cdot 4$ par $2C_n^4$. Le produit est donc toujours égal à $(n - 4)! \cdot 4 \cdot 2C_n^4$, c'est-à-dire à $\frac{1}{3} n!$. De là ce théorème :

THÉORÈME. — *Si l'on partage les permutations de n éléments en trois sortes : permutations à segments séparés, permutations à segments imbriqués, permutations à segments superposés; dans chacune de ces trois sortes, il y a le même nombre de permutations.*

49. Tout ce qui précède évidemment suppose n égal ou supérieur à 4. Si n était égal soit à 2, soit à 3, la permutation ne présenterait plus de quaterne : on n'aurait plus à considérer ni figure, ni segments.

II. — Premières expressions des nombres φ_n , χ_n , ψ_n .

50. Toutes les permutations répondant à un même quaterne présentent, avons-nous dit (42), le même nombre de couples actifs. Dans les recherches relatives au nombre de ces couples, il nous suffira donc de considérer l'une quelconque de ces permutations.

Pour préciser et faciliter le langage, nous considérerons uniquement celle de ces permutations où se trouvent placés, dans l'ordre des grandeurs croissantes : 1° les deux éléments initiaux; 2° les $n - 4$ éléments intermédiaires; 3° les deux éléments terminaux. Cette permutation unique sera pour nous une *permutation ordonnée*.

Évidemment, dans l'ensemble de toutes les permutations de n éléments, les permutations ordonnées et les quaternes se correspondent chacune à chacun : ils sont en même nombre.

51. D'après ce que nous avons dit précédemment (42), pour savoir combien il y a de couples actifs dans l'ensemble des permutations répondant à un même quaterne, il nous suffit de multi-

plier par $(n-4)!4$ le nombre des couples actifs contenus dans la permutation ordonnée correspondant à ce quaterne. Et comme ce facteur $(n-4)!4$ est le même pour tous les quaternes (42), il nous suffit, pour trouver le nombre des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations de chaque sorte, de déterminer, pour chacune de ces sortes, le nombre des couples actifs contenus dans ses seules permutations ordonnées.

C'est ce que nous allons faire dans le présent paragraphe, en supposant le nombre des éléments égal à n , et en désignant par φ_n , χ_n , ψ_n les nombres des couples actifs contenus respectivement d'abord dans les permutations ordonnées à segments séparés, ensuite dans les permutations ordonnées à segments imbriqués, enfin dans les permutations ordonnées à segments superposés.

§2. En toute permutation ordonnée à segments séparés, le nombre ε est nul (43); et, par conséquent, le nombre des couples actifs est égal, à

$$2(n-1) - \alpha - \beta,$$

c'est-à-dire, si l'on remplace α et β par les différences (26) qu'ils représentent, à

$$2(n-1) - (A - a) - (B - b).$$

Pour obtenir le nombre φ_n des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées de n éléments à segments séparés, nous avons donc à faire la somme de toutes les valeurs numériques que prend cette expression, lorsque l'on y remplace les lettres dont elle se compose successivement par tous les systèmes de valeurs correspondant aux différents quaternes à segments séparés, c'est-à-dire aux différents quaternes de la forme $aAbB$ et aux différents quaternes de la forme $bBaA$.

Dans les systèmes de valeurs correspondant à la forme $aAbB$, on peut donner à a toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n-3$; ensuite à A toutes les valeurs $a+1, a+2, a+3, \dots, n-2$; ensuite à b toutes les valeurs $A+1, A+2, A+3, \dots, n-1$; enfin à B toutes les valeurs $b+1, b+2, b+3, \dots, n$. Le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées de n éléments, à segments séparés, dont le quaterne a la forme $aAbB$,

est donc

$$\sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{A=a+1}^{A=n-2} \sum_{b=A+1}^{b=n-1} \sum_{B=b+1}^{B=n} [2(n-1) - (A-a) - (B-b)].$$

En raisonnant de même sur les permutations ordonnées de n éléments, à segments séparés, dont le quaterne a la forme $bBaA$, on trouverait que le nombre des couples actifs qu'elles contiennent est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3} \sum_{B=b+1}^{B=n-2} \sum_{a=B+1}^{a=n-1} \sum_{A=a+1}^{A=n} [2(n-1) - (A-a) - (B-b)].$$

Mais cette expression et la précédente ne diffèrent l'une de l'autre que par l'échange des lettres a et b , A et B . Donc, évidemment, si l'on effectuait les calculs indiqués, on arriverait à la même fonction de n ; donc ces deux expressions sont équivalentes; donc le nombre φ_n défini plus haut (§1) est le double de l'une quelconque des deux, de la première, par exemple; et l'on peut écrire

$$\varphi_n = 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{A=a+1}^{A=n-2} \sum_{b=A+1}^{b=n-1} \sum_{B=b+1}^{B=n} [2(n-1) + a - A + b - B],$$

en plaçant, dans le crochet, les nombres a, A, b, B dans l'ordre des grandeurs croissantes.

§3. En toute permutation ordonnée de n éléments, à segments imbriqués, le nombre ε est encore nul (§5). Par conséquent, le nombre des couples actifs est égal à

$$2(n-1) - \alpha - \beta,$$

c'est-à-dire à

$$2(n-1) - (A-a) - (B-b).$$

Ces permutations correspondent aux différents quaternes à segments imbriqués, c'est-à-dire aux quaternes de la forme $abAB$ et à ceux de la forme $baBA$. Pour obtenir le nombre des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations ordonnées de n éléments, à segments imbriqués, il nous faut donc faire la somme de toutes les valeurs numériques de l'expression précédente qui correspondent aux quaternes de ces deux formes. En suivant la

méthode employée précédemment (§2), on trouve que le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments imbriqués, dont le quaterne a la forme $abAB$, est égal à

$$\sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{A=b+1}^{A=n-1} \sum_{B=A+1}^{B=n} [2(n-1) - (A-a) - (B-b)];$$

et que, pour celles dont le quaterne a la forme $baBA$, ce nombre des couples actifs est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3} \sum_{a=b+1}^{a=n-2} \sum_{B=a+1}^{B=n-1} \sum_{A=B+1}^{A=n} [2(n-1) - (A-a) - (B-b)].$$

Il suffit de comparer ces deux expressions pour reconnaître qu'elles sont équivalentes. Le nombre γ_n des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments imbriqués, de n éléments est donc le double de l'une quelconque des deux. Nous pouvons donc écrire

$$\gamma_n = 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{A=b+1}^{A=n-1} \sum_{B=A+1}^{B=n} [2(n-1) + a + b - A - B],$$

en plaçant, dans le crochet, les nombres a, b, A, B dans l'ordre des valeurs croissantes.

54. Considérons enfin les permutations de n éléments, ordonnées et à segments superposés. Dans chacune d'elles, ε est égal à 2; et le nombre des couples actifs est, par conséquent, égal à

$$2n - \alpha - \beta,$$

c'est-à-dire à

$$2n - (A - a) - (B - b).$$

Or, ces permutations ordonnées correspondent aux quaternes à éléments superposés, c'est-à-dire à tous les quaternes de l'une ou de l'autre des deux formes $abBA, baAB$.

Il nous faut donc, pour obtenir le nombre ψ_n des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments superposés, calculer la somme de toutes les valeurs de l'expression précédente qui correspondent aux quaternes de ces deux formes.

En appliquant encore le même procédé que pour les permutations ordonnées à segments séparés (§2), on trouve que le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments superposés, dont le quaterne a la forme $abBA$, est égal à

$$\sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{B=b+1}^{B=n-1} \sum_{A=B+1}^{A=n} [2n - (A - a) - (B - b)];$$

et que le nombre des couples actifs contenus dans celles dont le quaterne a la forme $baAB$ est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3} \sum_{a=b+1}^{a=n-2} \sum_{A=a+1}^{A=n-1} \sum_{B=A+1}^{B=n} [2n - (A - a) - (B - b)].$$

Ces deux expressions, évidemment, sont équivalentes. Le nombre ψ_n des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations ordonnées, à segments superposés, de n éléments, est donc le double de l'une quelconque des deux. Nous pouvons donc écrire

$$\psi_n = 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{B=b+1}^{B=n-1} \sum_{A=B+1}^{A=n} [2n + a + b - B - A],$$

en disposant toujours, dans le crochet, les nombres a, b, B, A dans l'ordre des grandeurs croissantes.

III. — Expressions finales des nombres $\varphi_n, \gamma_n, \psi_n$.

§5. Le calcul des expressions que nous venons de trouver pour $\varphi_n, \gamma_n, \psi_n$ ne laisse pas que d'être long et pénible. Pour arriver à l'abrégé et à le faciliter, rapprochons ces trois expressions. Nous obtenons ce Tableau

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{A=a+1}^{A=n-2} \sum_{b=A+1}^{b=n-1} \sum_{B=b+1}^{B=n} [2(n-1) + a - A + b - B], \\ \gamma_n &= 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{A=b+1}^{A=n-1} \sum_{B=A+1}^{B=n} [2(n-1) + a + b - A - B], \\ \psi_n &= 2 \sum_{a=1}^{a=n-3} \sum_{b=a+1}^{b=n-2} \sum_{B=b+1}^{B=n-1} \sum_{A=B+1}^{A=n} [2n + a + b - B - A]; \end{aligned}$$

et nous voyons immédiatement que $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ ne sont autres choses que des cas particuliers de la quantité ω_n définie par l'égalité

$$\omega_n = 2 \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} (d + ev + fx + gy + hz),$$

dans laquelle v, x, y, z représentent des entiers variables, et d, e, f, g, h des coefficients constants.

Pour tirer, en effet, de cette dernière expression, chacune des trois expressions précédentes, il suffit, sans changer les noms des entiers variables, noms qui n'influent nullement sur les résultats du calcul, de donner des valeurs numériques convenables aux cinq coefficients constants.

§6. Nous sommes donc ramenés à nous occuper de ω_n seulement. Or, cette expression, à son tour, est évidemment la somme des cinq expressions qui correspondent respectivement aux cinq termes de son polynome entre parenthèses. Nous avons donc

$$\omega_n = D_n + E_n + F_n + G_n + H_n,$$

si nous posons

$$D_n = 2d \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} 1,$$

$$E_n = 2e \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} v,$$

$$F_n = 2f \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} x,$$

$$G_n = 2g \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} y,$$

$$H_n = 2h \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} z;$$

et nous n'avons plus qu'à déterminer, en fonction de n , les expressions des cinq nombres D_n, E_n, F_n, G_n, H_n .

§7. Pour opérer ces déterminations, le procédé le plus simple

consiste à effectuer, dans chaque cas, les calculs indiqués, en s'aidant des propriétés des nombres figurés, c'est-à-dire des nombres composant le triangle de Pascal. On arrive, par ce moyen, à ces cinq résultats :

$$D_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} {}_2d,$$

$$E_n = 1 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} {}_2e,$$

$$F_n = 2 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} {}_2f,$$

$$G_n = 3 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} {}_2g,$$

$$H_n = 4 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} {}_2h.$$

Ces résultats présentent cette particularité remarquable : le premier contient en facteur le nombre des combinaisons simples de n objets 4 à 4; et chacun des suivants, celui des combinaisons simples, 5 à 5, de $n+1$ objets.

§8. Quoi qu'il en soit, il nous suffit de faire la somme de ces cinq résultats pour obtenir l'expression de ϖ_n en fonction de n . En effectuant ce calcul, nous trouvons immédiatement

$$\varpi_n = 2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \left[d + \frac{n+1}{5} (e + 2f + 3g + 4h) \right];$$

et cette égalité constitue la formule générale qui va nous donner, en fonction de n , les expressions des trois nombres φ_n , χ_n , ψ_n .

§9. Pour en déduire φ_n , il faut, dans le crochet que nous présente ϖ_n , donner aux coefficients

$$d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h,$$

les valeurs respectives

$$2(n-1), \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1.$$

Pour en déduire χ_n , il y faut donner, aux mêmes coefficients, les valeurs respectives

$$2(n-1), \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1.$$

Enfin, pour en déduire ψ_n , il y faut donner, aux mêmes coefficients encore, les valeurs respectives

$$2n, \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1.$$

En effectuant ces diverses substitutions, on arrive, après quelques réductions simples, à ces trois résultats :

$$\varphi_n = \frac{4n-6}{30} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\chi_n = \frac{3n-7}{30} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\psi_n = \frac{3n-2}{30} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Ces trois résultats sont analogues, mais différents. Il n'existe même qu'un seul nombre, supérieur à 3, qui, mis à la place de n , rende deux d'entre eux numériquement égaux : c'est le nombre 4, qui rend φ_n et ψ_n égaux chacun à 8.

CHAPITRE III.

DES COUPLES ACTIFS DANS L'ENSEMBLE COMPLET DES PERMUTATIONS.

I. — *Nombre des couples actifs dans chaque sorte de permutations.*

60. Dans le Chapitre qui précède (Chap. II), nous avons considéré les permutations ordonnées de n éléments; désigné par φ_n , χ_n , ψ_n les nombres des couples actifs contenus respectivement dans celles de ces permutations ordonnées qui sont à segments séparés, à segments imbriqués, à segments superposés; déterminé enfin, en fonction de n , les expressions de ces trois nombres.

Partant de ces trois expressions, nous allons calculer maintenant les *nombres totaux* des couples actifs contenus, non plus dans les seules permutations ordonnées, mais dans toutes les permutations de chaque sorte. Nous calculerons ensuite, pour chacune de ces sortes, le *nombre moyen* des couples actifs contenus dans une permutation.

61. D'après ce que nous avons vu précédemment (§1), quand on sait le nombre des couples actifs contenus dans toutes les permutations ordonnées d'une sorte quelconque, il suffit de multi-

plier ce nombre par $(n - 4)!4$ pour obtenir le *nombre total* des couples actifs contenus dans toutes les permutations de cette sorte. Si donc nous désignons par Φ_n , X_n , Ψ_n les nombres totaux des couples actifs contenus respectivement dans les permutations de n éléments à segments séparés, à segments imbriqués, à segments superposés, nous avons immédiatement

$$\Phi_n = (n - 4)!4\varphi_n,$$

$$X_n = (n - 4)!4\chi_n,$$

$$\Psi_n = (n - 4)!4\psi_n.$$

En effectuant les calculs indiqués, nous arrivons à ces trois théorèmes :

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments à segments séparés, le nombre total Φ_n des couples actifs est donné par la formule*

$$\Phi_n = \frac{2}{15} n! (4n - 6).$$

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments à segments imbriqués, le nombre total X_n des couples actifs est donné par la formule*

$$X_n = \frac{2}{15} n! (3n - 7).$$

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments à segments superposés, le nombre total Ψ_n des couples actifs est donné par la formule*

$$\Psi_n = \frac{2}{15} n! (3n - 2).$$

62. Tels sont, pour les trois sortes de permutations, les nombres totaux des couples actifs. De même que les nombres φ_n , χ_n , ψ_n , ces nombres totaux Φ_n , X_n , Ψ_n ne diffèrent entre eux que par les binomes $4n - 6$, $3n - 7$, $3n - 2$ qui en terminent les expressions : ils sont proportionnels à ces binomes.

D'ailleurs, d'après tout ce qui précède, les formules (61) qui les donnent ne sont valables, et même n'ont de sens, que quand n est égal ou supérieur à 4. Lorsque n est précisément égal à 4, les nombres totaux Φ_n et Ψ_n sont égaux entre eux et supérieurs à X_n .

Lorsque n est supérieur à 4, on a toujours cette double inégalité

$$\Phi_n > \Psi_n > X_n,$$

et l'on voit ainsi que, quand n dépasse 4, c'est toujours dans les permutations à segments séparés qu'on rencontre le plus de couples actifs, dans les permutations à segments imbriqués qu'on en rencontre le moins.

63. Connaissant pour chaque sorte de permutations le nombre total des couples actifs, nous n'aurons, pour obtenir le *nombre moyen* correspondant, qu'à diviser ce nombre total des couples actifs par le nombre des permutations de cette sorte. Or, nous l'avons fait remarquer (48), ce nombre des permutations a la même valeur $\frac{1}{3} n!$ dans les trois sortes de permutations.

En divisant par $\frac{1}{3} n!$, nous arrivons à ces trois théorèmes :

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments à segments séparés, le nombre moyen K_n des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$K_n = \frac{2}{5}(4n - 6).$$

THÉORÈME. — *Dans les permutations à segments imbriqués, le nombre moyen L_n des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$L_n = \frac{2}{5}(3n - 7).$$

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments à segments superposés, le nombre moyen M_n des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$M_n = \frac{2}{5}(3n - 2).$$

64. Ces nombres moyens, on le voit, sont, comme les nombres totaux (61), proportionnels aux binomes considérés déjà, c'est-à-dire aux trois binomes

$$4n - 6, \quad 3n - 7, \quad 3n - 2.$$

Si l'on désigne par k_n , l_n , m_n les rapports respectifs des nombres moyens K_n , L_n , M_n au nombre n des éléments de chaque permutation, on trouve les trois égalités

$$k_n = \frac{2}{5} \left(4 - \frac{6}{n} \right),$$

$$l_n = \frac{2}{5} \left(3 - \frac{7}{n} \right),$$

$$m_n = \frac{2}{5} \left(8 - \frac{2}{n} \right);$$

et l'on voit que ces rapports, lorsque n croît indéfiniment, ont pour limites respectives

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{6}{5},$$

c'est-à-dire trois fractions plus grandes que 1, dont les deux dernières sont égales entre elles.

II. — *Nombre des couples actifs dans l'ensemble complet des permutations.*

65. Nous allons considérer maintenant l'*ensemble complet des permutations* de n éléments, sans plus avoir aucun égard aux trois sortes en lesquelles nous les avons partagées. Nous déterminerons le *nombre total* des couples actifs contenus dans cet ensemble; puis nous en déduirons, pour une permutation, le *nombre moyen* de ces couples.

66. Si nous désignons par Θ_n le *nombre total* des couples actifs contenus dans toutes ces permutations, nous avons évidemment

$$\Theta_n = \Phi_n + X_n + \Psi_n.$$

Or, dans cette égalité, les trois termes placés au second membre nous sont connus (61). Nous n'avons donc, pour obtenir Θ_n en fonction de n , qu'à remplacer ces trois termes par leurs expressions respectives, puis à effectuer l'addition indiquée. En opérant ainsi, nous arrivons à ce résultat :

THÉORÈME. — *Dans l'ensemble complet des permutations de n éléments, le nombre total Θ_n des couples actifs est donné*

par la formule

$$\Theta_n = \frac{2}{3} n! (2n - 3).$$

67. Cette formule, on le voit, est un peu plus simple que celles (61) qui nous ont donné Φ_n, X_n, Ψ_n . Il est évident, d'après la façon même dont nous l'avons obtenue, qu'elle suppose encore n égal ou supérieur à 4, et qu'elle ne subsiste ni pour la valeur 2, ni pour la valeur 3.

A l'aide d'un examen direct, on peut constater que, dans les permutations de deux éléments, il n'y a aucun couple actif; et que, dans les permutations de trois éléments, il y a huit de ces couples.

Quoi qu'il en soit, on voit sur son expression même (66) que ce nombre total Θ_n croît en même temps que l'entier n , d'une manière extrêmement rapide.

68. Pour obtenir le *nombre moyen* T_n des couples actifs d'une permutation de n éléments, nous n'avons qu'à diviser le nombre total Θ_n de ces couples par le nombre total $n!$ de ces permutations. Nous arrivons par là à ce théorème :

THÉORÈME. — *Dans les permutations de n éléments, le nombre moyen T_n des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$T_n = \frac{2}{3} (2n - 3).$$

Et cette formule suppose toujours que n soit au moins égal à 4.

Au reste, d'après ce que nous avons vu plus haut (31), lorsque n est égal à 2, ce nombre moyen est nul; lorsque n est égal à 3, ce nombre moyen est égal à $\frac{4}{3}$.

69. Désignons par t_n le rapport du nombre moyen T_n des couples actifs d'une permutation au nombre n des éléments de cette permutation. Nous avons immédiatement

$$t_n = \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{n} \right);$$

et nous voyons que, quand n croît indéfiniment, ce rapport tend vers la limite $\frac{4}{3}$.

Ce résultat nous en rappelle aussitôt un autre, fort analogue, relatif aux séquences. Nous voulons parler du célèbre théorème de Bienaymé (1) d'après lequel, lorsque n croît indéfiniment, le rapport du nombre moyen des séquences d'une permutation de n éléments au nombre n des éléments de cette permutation tend vers la limite $\frac{2}{3}$.

Pour le rapport relatif aux couples actifs, la limite est donc juste le *double* de ce qu'elle est pour le rapport relatif aux séquences.

70. Ce n'est point là le seul rapprochement qu'on puisse faire entre la théorie des couples actifs et la théorie des séquences. L'un des plus intéressants est celui qui consiste à comparer le nombre moyen des séquences au nombre moyen des couples actifs.

Désignons comme précédemment (68) par T_n le nombre moyen des couples actifs dans les permutations de n éléments, et appelons S_n le nombre moyen des séquences dans les mêmes permutations. D'après ce que nous venons de voir (68)

$$T_n = \frac{2}{3} (2n - 3);$$

d'après ce que j'ai démontré autrefois (2)

$$S_n = \frac{1}{3} (2n - 1).$$

Cela étant, si nous retranchons le premier de ces nombres moyens du double du second, nous trouvons

$$2S_n - T_n = \frac{4}{3}.$$

Par conséquent :

(1) *Académie des Sciences*, séance du 6 septembre 1875.

(2) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, avril 1884.

THÉOREME. — *Dans les permutations de n éléments, l'excès du double du nombre moyen des séquences sur le nombre moyen des couples actifs est indépendant de n et égal à $\frac{4}{3}$.*

De même, si nous divisons T_n par $2 S_n$, nous trouvons

$$\frac{T_n}{2 S_n} = \frac{2n-3}{2n-1};$$

et comme, dans cette égalité, lorsque n croît indéfiniment, le rapport qui figure au second membre tend vers l'unité, nous pouvons énoncer cette nouvelle proposition :

THÉOREME. — *Dans les permutations de n éléments, lorsque n croît au delà de toute limite, le double du nombre moyens des séquences et le nombre moyen même des couples actifs sont deux infiniment grands équivalents, c'est-à-dire deux infiniment grands dont le rapport tend vers l'unité.*

III. — Nouveaux problèmes de probabilité.

71. Dans ce dernier paragraphe, nous allons nous poser différents problèmes de probabilité, relativement aux couples actifs des permutations de n éléments. Nous résoudrons tous ces problèmes en nous aidant des résultats que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents. D'ailleurs, nous supposerons toujours que n soit égal ou supérieur à 4.

72. PROBLÈME I. — *Dans le système des permutations de n éléments, à segments séparés, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment le nombre total Φ_n des couples actifs contenus dans le système des permutations de n éléments, à segments séparés. Il est donc (61) égal à

$$\frac{2}{15} n!(4n-6).$$

Dans chacune des permutations considérées, le nombre des couples quelconques n'est autre chose que le nombre des combi-

naisons simples de n objets 2 à 2, c'est-à-dire que $\frac{1}{2} n(n-1)$. Le nombre des permutations de n éléments, à segments séparés, n'est autre chose (48) que $\frac{1}{3} n!$. Donc le nombre des cas possibles est égal à

$$\frac{1}{6} n! n(n-1).$$

En divisant le nombre des cas favorables par celui des cas possibles, nous obtenons la probabilité cherchée. Si nous la désignons par ξ_n , nous trouvons, toutes réductions faites,

$$\xi_n = \frac{4}{5} \frac{4n-6}{n(n-1)}.$$

73. PROBLÈME II. — *Dans le système des permutations de n éléments, à segments imbriqués, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment égal à X_n , c'est-à-dire (61) à

$$\frac{2}{15} n! (3n-7).$$

Le nombre des cas possibles est le même que dans le problème précédent (72); il est donc

$$\frac{1}{6} n! n(n-1).$$

La probabilité cherchée τ_n , qui est le quotient du premier de ces nombres par le second, nous est donc donnée par la formule

$$\tau_n = \frac{4}{5} \frac{3n-7}{n(n-1)}.$$

74. PROBLÈME III. — *Dans le système des permutations de n éléments, à segments superposés, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment égal à Ψ_n , c'est-à-dire (61) à

$$\frac{2}{15} n! (3n - 2).$$

Le nombre des cas possibles est toujours

$$\frac{1}{6} n! n (n - 1).$$

La probabilité cherchée ζ_n nous est donc donnée par la formule

$$\zeta_n = \frac{4}{5} \frac{3n - 2}{n(n - 1)}.$$

75. Sur les expressions que l'on vient de trouver pour ξ_n , τ_n , ζ_n , on voit immédiatement que, lorsque n croît au delà de toute limite, ces probabilités tendent toutes les trois vers zéro.

On peut voir aussi très facilement qu'elles décroissent toutes lorsque l'entier n va en augmentant à partir de 4. Pour cette première valeur de n , ces probabilités ont donc chacune leur valeur maxima. Le calcul nous donne

$$\begin{array}{lll} \xi_4 = \frac{2}{3}, & \tau_4 = \frac{1}{3}, & \zeta_4 = \frac{2}{3}, \\ \xi_5 = \frac{14}{25}, & \tau_5 = \frac{8}{25}, & \zeta_5 = \frac{13}{25}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

76. PROBLÈME IV. — *Dans l'ensemble complet des permutations de n éléments, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif ?*

Le nombre des cas favorables est évidemment le nombre total Θ_n des couples actifs contenus dans l'ensemble complet des permutations de n éléments. Or, nous l'avons vu (66), ce nombre Θ_n est égal à

$$\frac{2}{3} n! (2n - 3).$$

Dans chacune de ces permutations, on peut prendre autant de

couples d'éléments qu'il y a de combinaisons simples de n objets 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{1}{2} n(n-1)$. Le nombre total de ces permutations est $n!$. Donc le nombre des cas possibles est égal à

$$\frac{1}{2} n! n(n-1).$$

La probabilité cherchée τ_n nous est donc donnée par la formule

$$\tau_n = \frac{4}{3} \frac{2n-3}{n(n-1)}.$$

77. Cette expression de τ_n nous montre immédiatement que, si n croît au delà de toute limite, τ_n tend vers zéro.

Elle nous permet aussi de démontrer aisément que, si n croît constamment à partir de 4, cette probabilité τ_n va constamment en diminuant. Sa valeur maxima se présente donc lorsque n est égal à 4; elle est elle-même égale à $\frac{5}{9}$.

Au reste, toutes ces propriétés de la probabilité τ_n se déduiraient facilement de celles des probabilités ξ_n , η_n , ζ_n . Cette probabilité-là est, en effet, liée à celles-ci par l'identité

$$\tau_n = \frac{\xi_n + \eta_n + \zeta_n}{3},$$

laquelle se vérifie sans peine à l'aide du calcul, mais peut aussi s'établir *a priori* par un raisonnement très simple.

SUR L'HYPOTHERMITIEN;

Par M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans le présent Travail, je me propose de continuer et de généraliser les recherches commencées dans mon Mémoire *Sur l'Hermitien* ⁽¹⁾ (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1902) et, partiellement, dans ma Note *Sur les groupes*

⁽¹⁾ J'y renverrai par une indication comme celle-ci, par exemple (*loc. cit.*, 12°).

linéaires réels et orthogonaux (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902).

Les méthodes, les notations, la terminologie, employées dans ces publications seront conservées.

Une matrice p -aire hermitienne

$$\Lambda = [a_{jk}] \quad (j, k = 1, 2, \dots, p)$$

a été définie par une double propriété :

I. $\Lambda = \bar{\Lambda}'$, c'est-à-dire $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

II. L'expression réelle $X = \Lambda(x, \bar{x})$ est toujours $X > 0$.

Le déterminant $|\Lambda|$ est alors $\neq 0$.

Supposons $X \geq 0$. Alors l'hermitienne devient, par définition, *hypohermitienne*; $|\Lambda| = 0$, et il faut envisager le rang q de Λ . Si, dans $|\Lambda|$, tous les $(p - q - 1)^{\text{ièmes}}$ mineurs s'évanouissent, tandis qu'un au moins des $(p - q)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à q^2 éléments, est $\neq 0$, alors q sera le rang (PASCAL, *Déterminanten*, p. 192, édition de Teubner, 1900).

Les hypohermitiennes $\mathbf{A}$ partagent presque toutes les propriétés des hermitiennes. Voici l'énumération des principales :

I.

Toute $\mathbf{A}$ est canonisable et possède au moins une canonisante unitaire.

II.

A toute $\mathbf{A}$ correspond une et une seule hypohermitienne

$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathbf{A}}$, telle que $\mathbf{B}^m = \mathbf{A}$, $m =$ entier positif. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont le même rang.

III.

Toute $\mathbf{A}$ peut être engendrée par le procédé $\mathbf{A} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}'$, où $\mathbf{a}$ est une matrice p -aire de rang égal à celui de $\mathbf{A}$. Pour $\mathbf{A}$ donné, $\mathbf{a}$ est obtenue par la formule

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{unitaire } p\text{-aire arbitraire.}$$

Tous les résultats précédents subsistent quand $\mathbf{A}$ devient une

hyposhermitienne réelle $\mathfrak{A}$. Seulement, au lieu des unitaires, interviennent des substitutions W orthogonales réelles.

IV.

Toute $\mathfrak{A}$ est symétrique. Pour qu'une matrice p -aire réelle et symétrique $\mathfrak{A}$ soit hyposhermitienne, il faut et il suffit que la forme quadratique $\mathfrak{A}(t, t)$ soit ≥ 0 pour toutes les valeurs réelles des t .

V.

Toute $\mathfrak{A}$ est canonisable et possède au moins une canonisante réelle et orthogonale.

VI.

A toute $\mathfrak{A}$ correspond une et une seule hyposhermitienne réelle $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}}$, telle que $\mathfrak{B}^m = \mathfrak{A}$; $m =$ entier positif. $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ont le même rang q .

VII.

Toute $\mathfrak{A}$ peut être engendrée par le procédé $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ où $\mathfrak{Q}$ est une matrice p -aire, de rang q , réelle. Pour $\mathfrak{A}$ donnée, $\mathfrak{Q}$ s'obtient par la formule

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} W, \quad W = \text{arbitraire.}$$

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus* (9 mars 1903).

Dans un autre travail, je montre quel rôle important jouent les hyposhermitiennes réelles $\mathfrak{A}$ dans la Géométrie : 1° des systèmes de sphères, 2° des substitutions linéaires, orthogonales et réelles. Ce travail, intitulé : *Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale, en un produit d'inversions*, est paru dans les *Annales de l'Université de Lyon* (1903). Un résumé en a été inséré aux *Comptes rendus* (18 mai 1903).

HYPOHERMITIENNES COMPLEXES.

1° Soit

$$\mathfrak{A} = [a_{jk}] \quad (j, k = 1, 2, \dots, p)$$

une matrice p -aire de rang q . Autrement dit, dans le détermi-

nant $|\Lambda|$, tous les $(p - q - 1)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à $(q + 1)^2$ éléments, sont nuls, tandis qu'un au moins des $(p - q)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à q^2 éléments, est différent de zéro.

Assujétissons Λ à une double condition.

D'abord faisons $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, c'est-à-dire $\Lambda = \bar{\Lambda}'$. Alors l'expression

$$X = \Lambda(x, \bar{x})$$

sera réelle, car

$$\bar{X} = \overline{\Lambda(x, \bar{x})} = \bar{\Lambda}(\bar{x}, x) = \bar{\Lambda}'(x, \bar{x}) = X.$$

En second lieu, pour tout point x , X sera positif ou nul, mais jamais négatif, $X \geq 0$.

On exprimera cette double propriété en disant que l'expression X est un *hypohermitien* et que la matrice Λ est une *hypohermitienne*.

L'hermitien, $X > 0$, est un cas particulier de l'hypohermitien, $X \geq 0$.

2° Effectuons le changement de variables $x = R[z]$, $|R| \neq 0$, c'est-à-dire posons

$$x_j = \sum_k r_{jk} z_k, \quad R = [r_{jk}];$$

X devient

$$X = \Lambda(R[z], \bar{R}[\bar{z}]) = \bar{R}' \Lambda R(z, \bar{z}) = Z.$$

Z est encore un hypohermitien, puisque

$$(\bar{R}' \Lambda R)' = \bar{R}' \Lambda R, \quad \text{car} \quad \bar{\Lambda}' = \Lambda.$$

D'ailleurs, pour tout x , $X \geq 0$, et $Z \geq 0$ pour tout z .

A et $B = \bar{R}' \Lambda R$ ont le même rang q . En effet, dans $|\Lambda|$ et $|B|$, les mineurs de même ordre forment deux systèmes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de même degré; on passe de l'un à l'autre par une collinéation $\mathcal{R}$. $|\mathcal{R}|$ est une certaine expression monome en $|R|$ et $|\bar{R}|$ et, par conséquent, $|\mathcal{R}| \neq 0$. Tout cela résulte de propriétés bien connues des déterminants, qu'on trouvera, par exemple, dans le Traité déjà cité de M. Pascal, pages 83 et suivantes. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ne peuvent avoir tous leurs termes nuls pour l'un sans que tous les termes de l'autre système le soient aussi. A et B ont donc même rang q .

3° Soient $A, B, \dots$ diverses hypohermitiennes; $A_1, B_1, \dots$ ce qu'elles deviennent par le changement R de variables :

$$A_1 = \bar{R}' A R, \quad B_1 = \bar{R}' B R, \quad \dots;$$

si l'on veut que

$$A_1 B_1 = \bar{R}' A B R,$$

il suffira de prendre R unitaire, $R \bar{R}' = E$. C'est ce que l'on fera constamment, quand on aura à traiter des produits de matrices, hypohermitiennes ou non. Autrement dit : *les changements de variables seront TOUJOURS unitaires.*

4° La matrice-unité E est hermitienne; la matrice $\bar{C}' C$ sera hypohermitienne, quelle que soit la matrice C , p -aire, mais de rang quelconque. En effet, d'abord

$$(\bar{C}' C)' = \bar{C}' C.$$

Nommons en second lieu, $\mathfrak{C}$ ce que devient, pour $x = C[z]$, l'hermitien $E(x, \bar{x})$. Il viendra :

$$\mathfrak{C} = E(C[z], \bar{C}[\bar{z}]) = \bar{C}' C(z, \bar{z}),$$

Alors : $\mathfrak{C} > 0$, si $C[z] \neq 0$, et $\mathfrak{C} = 0$, si $C[z] = 0$, pour $|C| = 0$. Mais, pour aucun z , $\mathfrak{C} < 0$.

Nous verrons plus loin si toute hypohermitienne peut être obtenue par ce procédé.

5° *L'équation caractéristique* $\mathfrak{Q}$

$$|\rho E - A| = 0$$

de l'hypohermitienne A n'a que des racines réelles et non négatives.

Soit ρ une racine de $\mathfrak{Q}$. Il y aura au moins un point x tel que

$$\rho x_j = \sum_k a_{jk} x_k = \frac{\partial X}{\partial \bar{x}_j}.$$

Alors

$$X = \sum_j \bar{x}_j \frac{\partial X}{\partial \bar{x}_j} = \rho \sum_j x_j \bar{x}_j = \rho \sum_j |x_j|^2 = \rho.$$

Or $X \geq 0$ et $\rho \geq 0$.

C. Q. F. D.

Pour que A devienne hermitienne, il faut et il suffit (*loc. cit.*, 19°) que $|A| \neq 0$. Donc les hermitiennes sont celles, parmi les hypohermitiennes, pour lesquelles le rang q est égal à l'ordre p .

6° THÉORÈME. — Toute hypohermitienne est canonisable et admet au moins une canonisante unitaire.

La démonstration est sensiblement la même qu'au 22° de mon travail *Sur l'Hermitien*.

Si $p = 1$, l'hypohermitienne A est canonique forcément et admet la canonisante unitaire unité.

Je dis que si le théorème est vrai pour $p - 1$, il est vrai aussi pour p .

Soit ρ une racine, nulle ou non, de l'équation caractéristique $\mathcal{O}$. Nommons ω un point tel que (ω_j étant les coordonnées de ω)

$$\rho \omega_j = \sum_k a_{jk} \omega_k.$$

L'intervention d'une unitaire convenable permettra de faire

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 = \dots = \omega_{p-1}, & 1 &= \omega_p, \\ a_{jp} &= 0, & a_{pp} &= \rho \quad (j = 1, 2, \dots, p-1). \end{aligned}$$

En vertu de $\bar{A}' = A$ (1°) ou $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, il viendra

$$a_{pj} = 0 \quad \text{et} \quad A(x, y) = a(x, y) + \rho x_p y_p,$$

a étant une matrice $(p-1)$ -aire, obtenue en supprimant dans A les $p^{\text{ièmes}}$ ligne et colonne; a est hypohermitienne, car $a(x, \bar{x})$ n'est pas autre chose que $X = A(x, \bar{x})$, quand on fait

$$x_p = \bar{x}_p = 0.$$

Nommons R une canonisante unitaire $(p-1)$ -aire de a . R existe par hypothèse. L'unitaire p -aire $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{R}(x, y) = R(x, y) + x_p y_p$$

sera évidemment une canonisante pour A .

C. Q. F. D.

7° Soient R une canonisante unitaire et A_0 la forme canonique

correspondante de l'hypohermitienne A. On aura, q étant le rang de A,

$$A = R^{-1}A_0R = \bar{R}'A_0R; \quad A_0(x, y) = \sum_r K_r x_r y_r, \\ r = 1, 2, \dots, q; \quad K_r = \text{quantité positive (5°)}.$$

Réciproquement : si, dans une matrice canonique de rang q ,

$$A_0 = \sum_r K_r x_r y_r,$$

les coefficients K sont positifs, la transformée

$$A = R^{-1}A_0R = \bar{R}'A_0R,$$

par une unitaire quelconque R, sera évidemment une hypohermitienne de rang q .

En effet, A_0 est, pour $K_r > 0$, une hypohermitienne, et aussi A, en vertu de 2°.

En particulier sera hypohermitienne, pour un exposant réel quelconque σ , la canonique T_0 , telle que

$$T_0(x, y) = \sum_r x_r y_r K_r^\sigma,$$

K_r^σ étant la puissance d'exposant σ , calculée arithmétiquement. K_r^σ sera un nombre unique et positif, même si σ est incommensurable.

La matrice $T = R^{-1}T_0R$ sera hypohermitienne.

Faisons $\sigma =$ l'entier positif m ; $T_0 = A_0^m$, $T = A^m$ est hypohermitienne.

Faisons $\sigma = \frac{1}{m}$, m entier positif; on aura

$$T_0^m = A_0 \quad \text{et} \quad T^m = A.$$

On va voir que T est la seule hypohermitienne dont la puissance $m^{\text{ième}}$ reproduise A, de sorte qu'on pourra écrire sans ambiguïté

$$T = A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}.$$

8° LEMME. — Soit l'hypohermitienne a, telle que $a^n = 0$,

$n =$ entier positif: on a

$$a = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de canoniser a .

9° THÉOREME. — Soient une hypohermitienne A et un entier positif m . Il y aura toujours une et une seule hypohermitienne B , telle que $B^m = A$. A et B ont le même rang q .

D'abord l'hypothèse $B = A^m$ entraîne

$$BA = A^m A = A^{m+1} = AA^m = AB.$$

A et B sont échangeables.

Prenons A canonique et écrivons

$$A(x, y) = \sum_j l_j x_j y_j.$$

Mettons en évidence les coefficients l_j égaux en posant

$$l_1 = l_2 = \dots = l_{\alpha_1} = K_1, \quad l_{\alpha_1+1} = \dots = l_{\alpha_1+\alpha_2} = K_2, \quad \dots, \\ q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots; \quad l_j = 0, \quad \text{pour } j > q.$$

Les K sont des nombres positifs tous distincts.

Posons ensuite

$$E_1(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_1} x_s y_s, \\ E_2(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_2} x_{\alpha_1+s} y_{\alpha_1+s}, \\ E_3(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_3} x_{\alpha_1+\alpha_2+s} y_{\alpha_1+\alpha_2+s}, \\ \dots\dots\dots,$$

de façon qu'il vienne

$$A(x, y) = K_1 E_1 + K_2 E_2 + K_3 E_3 + \dots$$

Quant à la matrice hypohermitienne B , elle devra être supposée quelconque :

$$B = [b_{jk} | \quad (j, k = 1, 2, \dots, p).$$

La condition $AB = BA$ donne

$$l_j b_{jk} = b_{jk} l_k, \quad b_{jk} (l_j - l_k) = 0, \\ d'où \quad b_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad l_j - l_k = 0.$$

Par conséquent,

$$B(x, y) = \mathfrak{B}_1(x_1, \dots, x_{\alpha_1}; y_1, \dots, y_{\alpha_1}) \\ + \mathfrak{B}_2(x_{\alpha_1+1}, \dots, x_{\alpha_1+\alpha_2}; y_{\alpha_1+1}, \dots, y_{\alpha_1+\alpha_2}) + \dots \\ + \Omega(x_{q+1}, \dots, x_p; y_{q+1}, \dots, y_p).$$

Faisant $B^m = A$, on aura

$$\mathfrak{B}_1^m = K_1 E_1, \quad \mathfrak{B}_2^m = K_2 E_2, \quad \dots, \quad \Omega^m = 0.$$

Chacune des matrices $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \Omega$ [α_1 -aire, α_2 -aire, ..., $(p - q)$ -aire] est hypohermitienne, car $\mathfrak{B}_1(x, \bar{x})$, par exemple, est ce que devient $B(x, \bar{x})$ pour

$$x_{\alpha_1+1} = \dots = x_p = 0.$$

Alors (8°) la matrice $(p - q)$ -aire s'évanouit, $\Omega = 0$. Les hypohermitiennes $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ ont leurs $|\mathfrak{B}_1|, |\mathfrak{B}_2|, \dots$ égaux à

$$\frac{\alpha_1}{K_1^m}, \quad \frac{\alpha_2}{K_2^m}, \quad \dots,$$

respectivement, c'est-à-dire $\neq 0$. Ainsi $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ sont des hermitiennes et (*loc. cit.*, 24° et 25°)

$$\mathfrak{B}_1 = K_1^{\frac{1}{m}} E_1, \quad \mathfrak{B}_2 = K_2^{\frac{1}{m}} E_2, \quad \dots$$

Ainsi B est unique; c'est la matrice T déjà construite au 7°. C. Q. F. D.

On écrira $B = A^{\frac{1}{m}}$ ou $\sqrt[m]{A} =$ racine $m^{\text{ième}}$ de A .

En résumé, les hypohermitiennes se comportent comme les hermitiennes (*loc. cit.*, 25°).

10° Je vais revenir maintenant au procédé signalé au 4° pour la génération des hypohermitiennes et résoudre le problème que voici :

Soit une hypohermitienne p -aire $\mathfrak{A}$ de rang q ; construire les matrices p -aires A de rang q' , telles que $\mathfrak{A} = A\bar{A}'$.

11° LEMME AUXILIAIRE. — Soient, entre p variables x_j , $j = 1, 2, \dots, p$, des équations distinctes au nombre de q'

$$(\Gamma) \quad C_r = \sum_j c_{rj} x_j = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, q').$$

Moyennant un changement unitaire de variables x_j , Γ peut toujours être remplacé par un système équivalent

$$(\Gamma_0) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{q'} = 0.$$

Les q' équations Γ sont équivalentes à l'équation unique ($|C_r|$ = module de C_r),

$$0 = \Lambda(x, \bar{x}) = \sum_r C_r \bar{C}_r = \sum_r |C_r|^2 = \sum_{rjk} \bar{x}_j x_k c_{rk} \bar{c}_{rj} = \sum_{jk} \bar{x}_j x_k \lambda_{jk};$$

$$\lambda_{jk} = \sum_r c_{rk} \bar{c}_{rj}.$$

La matrice p -aire $\Lambda = [\lambda_{jk}]$ est hypohermitienne. En effet, d'abord

$$\bar{\lambda}_{jk} = \sum_r \bar{c}_{rk} c_{rj} = \lambda_{kj} \quad \text{et} \quad \bar{\Lambda}' = \Lambda.$$

Puis, en vertu de sa formation même, l'expression réelle $\Lambda(x, \bar{x})$ ne peut devenir négative.

Transformons les x par une canonisante unitaire de l'hypohermitienne Λ . Cela revient à faire :

$$\begin{aligned} \lambda_{jk} &= 0 & \text{pour} & \quad j \neq k; \\ \lambda_{jj} &= 0 & \text{pour} & \quad j > q'; \\ \lambda_{jj} &= l_j & \text{pour} & \quad r = j \leq q', \quad \text{avec} \quad l_j \text{ positif} \quad (6^\circ \text{ et } 7^\circ). \end{aligned}$$

Alors

$$\Lambda(x, \bar{x}) = \sum_r l_r x_r \bar{x}_r = \sum_r l_r |x_r|^2 = 0.$$

Le système Γ est équivalent, puisque les q' coefficients l_r sont positifs, aux q' équations $l_r |x_r| = 0$, c'est-à-dire aux q' équations $x_r = 0$.
C. Q. F. D.

Γ est identiquement satisfait pour $x_1 = \dots = x_{q'} = 0$, ce qui

entraîne

$$c_{rj} = 0 \quad \text{pour} \quad j > q'.$$

12° Revenons maintenant au problème du 10° et aux matrices $\mathfrak{A}$ et A .

Si $A = [a_{jk}]$, avec le rang q' , les p équations

$$0 = \sum_k a_{jk} x_k$$

se réduisent à q' distinctes. En vertu du lemme du 11°, il sera licite de supposer que ces q' équations sont $x_1 = \dots = x_{q'} = 0$, ce qui fera (11° *in fine*) $a_{jk} = 0$, pour $k > q'$. La matrice A aura ses $p - q'$ dernières colonnes composées de zéros. C'est ce qu'on indiquera par la notation

$$\begin{array}{c|cc} q' & \dots & 0 \\ p - q' & \dots & 0 \end{array} \Bigg| = A.$$

$\underbrace{\quad}_{q'} \quad \underbrace{\quad}_{p - q'}$

Posons, ce qui n'est ni plus ni moins général, $A = DB$, où la matrice p -aire D a son $|D| \neq 0$. Il est évident que la p -aire B a encore ses $p - q'$ dernières colonnes composées de zéros. A et B ont même rang q' (2°).

13° La relation $\mathfrak{A} = A\bar{A}'$ devient

$$\mathfrak{A} = DB\bar{B}'\bar{D}' = D\mathfrak{B}\bar{D}'$$

où $\mathfrak{B}$ est l'*hypohermitienne* (4°) $B\bar{B}'$.

Prenons pour D une canonisante unitaire de $\mathfrak{A}$, dont $\mathfrak{A}_0$ sera la forme canonique correspondante,

$$\mathfrak{A}_0(x, y) = l_1^2 x_1 y_1 + \dots + l_q^2 x_q y_q, \quad l_1, \dots, l_q = \text{réels.}$$

Il viendra

$$\mathfrak{A} = D\mathfrak{A}_0 D^{-1} = D\mathfrak{B}\bar{D}',$$

car $D\bar{D}' = E$ par unitarité. De là on conclut que

$$\mathfrak{B} = B\bar{B}' = \mathfrak{A}_0.$$

Si $B = [b_{jk}]$, il viendra, en identifiant BB' avec $\mathfrak{A}_0$,

$$\sum_{\alpha} b_{j\alpha} \bar{b}_{k\alpha} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

$$\sum_{\alpha} b_{j\alpha} \bar{b}_{j\alpha} = \sum_{\alpha} |b_{j\alpha}|^2 = 0 \quad \text{pour} \quad j > q.$$

Alors $b_{j\alpha} = 0$ pour $j > q$. La matrice B a ses $p - q$ dernières lignes composées de zéros, et le rang q' de B ne peut dépasser le rang q de $\mathfrak{A}$, $q' \leq q$.

14° Faisons d'abord $q' < q$. On pourra alors écrire, avec une notation analogue à celle du 12°,

$$B = \begin{array}{c|ccc} & q' & & & \\ & \mathfrak{W} & 0 & 0 & \\ & \mathfrak{Q} & 0 & 0 & \\ & p - q & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{q'} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{q - q'} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p - q}$

où :

$\mathfrak{W}$ est une matrice q' -aire;

$\mathfrak{Q}$ est un Tableau composé de $q - q'$ lignes et de q' colonnes, etc.

Il viendra de même

$$\bar{B}' = \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{W}}' & \bar{\mathfrak{Q}}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}_0 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

où :

$\bar{\mathfrak{W}}'$ est la matrice transposée, imaginaire conjuguée, de la matrice q' -aire $\mathfrak{W}$;

$\bar{\mathfrak{Q}}'$ est le Tableau transposé (les lignes écrites comme colonnes et réciproquement) du Tableau $\mathfrak{Q}$, tandis que les éléments du Tableau $\bar{\mathfrak{Q}}'$, à $q - q'$ lignes et q' colonnes, sont les imaginaires conjugués du Tableau $\mathfrak{Q}$;

a et $\mathfrak{A}$ sont des matrices, q' -aire et $(q - q')$ -aire respectivement, telles que (13°)

$$a(x, y) = \sum_{s=1}^{s=q'} l_s^2 x_s y_s \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}(x, y) = \sum_{s=q'+1}^{s=q} .$$

Un Tableau, tel que $\mathfrak{Q}$, est une matrice où plusieurs lignes,

ou plusieurs colonnes sont composées de zéros. On peut donc, sans théorie supplémentaire, parler de la multiplication des Tableaux, soit entre eux, soit avec des matrices. Il est évident que si un produit de deux facteurs, où l'un est un Tableau et l'autre une matrice à déterminant $\neq 0$, est nul, le Tableau est nul, c'est-à-dire formé exclusivement de zéros.

Sous le bénéfice de ces explications, un calcul simple donne

$$BB' = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{B}'} & \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{Q}'} & 0 \\ \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{B}'} & \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathfrak{A}_0 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et, en identifiant,

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{B}'}, & \text{d'où} & \quad |\mathfrak{B}| \neq 0, & \text{car} & \quad |a| \neq 0; \\ \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{Q}'} &= 0, & \text{d'où} & \quad \overline{\mathfrak{Q}'} = 0 & \text{et} & \quad \mathfrak{Q}' = 0, & \text{car} & \quad |\mathfrak{B}| \neq 0; \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}'} = 0, & & & \text{ce qui est absurde, car} & \quad |\mathfrak{A}| \neq 0. \end{aligned}$$

L'hypothèse $q' = q$ est ainsi forcée.

15° Supposons donc $q' = q$; cela revient à $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A} = 0$; il reste, pour l'identification, à faire $a = \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{B}'}$; a est une hermitienne q -aire; on a ainsi

$$E = a^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{B}'} a^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{B} \right) \left(a^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{B} \right)',$$

$a^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{B}$ = l'unitaire q -aire u ,

$$\mathfrak{B} = a^{\frac{1}{2}} u.$$

Je dis que l'on peut toujours trouver une unitaire p -aire U , telle que $BU^{-1} = \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}}$.

En effet, en vertu de ce qui précède,

$$B = \begin{vmatrix} \overbrace{a^{\frac{1}{2}} u}^q & \overbrace{0}^{p-q} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \\ p-q \end{vmatrix}, \quad \text{tandis que} \quad \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

il suffit de prendre U telle que

$$U(x, y) = u(x_1, \dots, x_q; y_1, \dots, y_q) + x_{q+1}y_{q+1} + \dots + x_p y_p.$$

D'ailleurs, toute matrice

$$B = \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}} U, \quad U = \text{unitaire quelconque,}$$

fournit l'hypohermitienne $\mathfrak{A}_0$ par le procédé $B\bar{B}'$.

16° De la canonique $\mathfrak{A}_0$ revenons à l'hypohermitienne générale $\mathfrak{A}$. On a la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour $\mathfrak{A}$ donnée, la formule générale des matrices B , telles que $\mathfrak{A} = B\bar{B}'$, est $B = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} U$.*

Si, ce qui n'est ni plus ni moins général, on pose $B = \bar{P}'$, la formule devient

$$\overline{(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} U)}' = U^{-1} \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$$

et coïncide avec celle des hermitiennes (*loc. cit.*, 28°, formule $P = U\sqrt{H}$).

17° Dans la présente analyse, je me suis préoccupé surtout d'établir l'existence et d'étudier les propriétés de l'hypohermitienne $\mathfrak{A}$, d'une canonisante U unitaire de $\mathfrak{A}$, de la formation $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}}$.

Comment construira-t-on effectivement $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ et U ?

Si l'on possède la forme canonique $\mathfrak{A}_0$ ainsi que U , le raisonnement du 9° donne immédiatement $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ sous forme canonique, puis grâce à U sous forme non canonique.

Comment se procurer, pour $\mathfrak{A}$ donnée, la canonique $\mathfrak{A}_0$?

Les coefficients de $\mathfrak{A}_0$ sont immédiatement donnés par la résolution de l'équation caractéristique $\mathfrak{Q}$. Le nombre des racines nulles de $\mathfrak{Q}$ fait connaître le rang q .

Quant à la canonisante unitaire U , elle se laisse calculer de proche en proche (pour les ordres p , $p - 1$, $p - 2$, ...) par le procédé du 6°, dès qu'on sait résoudre le problème suivant :

Construire une unitaire U , qui amène un point donné sur un autre point donné, savoir, dans l'espèce, sur le point

$$x_1 = \dots = x_{p-1} = 0, \quad x_p = 1.$$

Or ce problème est traité d'une façon complète au Chapitre I du Mémoire : *Sur l'Hermitien*.

Bref, pour une hypohermitienne donnée $\mathfrak{A}$, les formations

$$U, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$$

doivent être considérées comme connues.

Hypohermitiennes réelles.

18° Si l'hypohermitienne $A = [a_{jk}]$ est réelle, $a_{jk} = \bar{a}_{jk}$, on a $\bar{A}' = A' = A$ et A est *symétrique*.

THÉORÈME. — *Pour qu'une matrice réelle et symétrique A soit hypohermitienne, il faut et il suffit que la forme quadratique à variables réelles*

$$f(t) = \sum_{jk} a_{jk} t_j t_k = A(t, t), \quad a_{jk} = a_{kj}$$

ne devienne jamais négative.

La condition est nécessaire, car $X = A(x, \bar{x}) \geq 0$ (1°) pour tout x et, en particulier, pour $x = \bar{x} = t$.

Réciproquement, posons $x = u + iv$, u et v étant réels. On aura, à cause de la symétrie de A ,

$$A(x, \bar{x}) = A(u + iv, u - iv) = A(u, u) + A(v, v)$$

et

$$X = A(x, \bar{x}) \geq 0,$$

puisque $A(u, u)$ et $A(v, v) \geq 0$.

Je n'insisterai pas davantage sur la théorie, aujourd'hui bien connue, des formes quadratiques $f(t)$. Si le rang de A est q , $f(t)$ sera la somme de q carrés positifs, etc., etc.

Pour une matrice U réelle, $\bar{U} = U$, la condition d'unitarité $U\bar{U}' = E$ devient celle d'orthogonalité, $UU' = E$. Toutes les propositions précédentes, concernant les hypohermitiennes, subsistent à condition de remplacer les unitaires U par des substitutions W réelles et orthogonales. $\mathfrak{A}$ désignera une hypohermitienne réelle.

19° THÉORÈME. — *Toute $\mathfrak{A}$ est canonisable et admet au moins une canonisante W .*

La démonstration du 6° subsiste, car, ρ et a_{jk} étant réelles, les quantités ω_j seront réelles aussi; l'intervention d'une W met A sous la forme

$$A(x, y) = a(x, y) + \rho x_p y_p, \quad a = \text{réelle}, \quad \dots$$

20° THÉORÈME. — *Pour toute $\mathfrak{A}$ il existe une et une seule hypohermitienne réelle $\mathfrak{B}$, telle que $\mathfrak{B}^m = \mathfrak{A}$, $m =$ entier positif.*

La démonstration du 9° subsiste. La forme canonique $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$ ne contient pas d'imaginaires et la construction de $\mathfrak{B}$ ne saurait en introduire. $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}}$.

21° THÉORÈME. — *Toute $\mathfrak{A}$ peut être obtenue par le procédé*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}';$$

pour $\mathfrak{A}$ donnée, la matrice réelle $\mathfrak{Q}$ s'obtient par la formule
 $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} W$, $W =$ arbitraire.

Toute l'analyse précédente (10° à 16°) subsiste sans sortir du réel.

Dans le lemme du 11°, on envisagera l'hypohermitienne réelle $\mathfrak{L}$ telle que

$$\mathfrak{L}(x, x) = \sum_r C_r^2, \quad \overline{C_r} = C_r, \quad \dots$$

22° Le calcul effectif, pour une hypohermitienne réelle donnée $\mathfrak{A}$, des formations

$$\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}, \quad \mathfrak{A}_0 \text{ ou forme canonique,}$$

W ou canonisante réelle et orthogonale, se fait par les procédés du 17° et ne présente aucune difficulté.

Les matrices réelles $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$, $\mathfrak{A}_0$, W doivent être considérées comme connues, dès que $\mathfrak{A}$ est donnée.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES MOUVEMENTS DUS A UNE FORCE CENTRALE;

Par M. C.-A. LAISANT.

Reprenant une question que j'avais traitée il y a fort longtemps, et ayant remarqué qu'elle se prêtait à une généralisation assez étendue, j'ai donné récemment, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, une courte Note contenant une propriété des orbites fermées décrites sous l'action de forces centrales.

Depuis la publication de cette Note, j'ai remarqué que la propriété est applicable à un arc quelconque de la trajectoire (fermée ou non). Voici l'énoncé de la proposition ainsi généralisée :

Soit M_0M un arc de la trajectoire d'un point matériel sollicité par une force centrale, S étant le centre des forces; considérons le centre de gravité G de l'arc de courbe M_0M , la densité en chaque point étant inversement proportionnelle à la vitesse; soit en outre O le centre de gravité du secteur SM_0M ; on a $SG = \frac{3}{2}SO$, les trois points S, O, G étant en ligne droite.

Quant à la démonstration, elle peut être présentée sous une forme qui la rend presque intuitive.

Si nous représentons en effet par M le vecteur variable SM , on peut exprimer SG par la formule

$$SG = \frac{\int M dt}{t},$$

l'intégration étant faite dans les limites convenables, et l'instant origine étant celui où le mobile se trouve en M_0 .

De même, en appelant σ l'aire variable du secteur, son centre de gravité aura pour expression

$$SO = \frac{2}{3} \frac{\int M d\sigma}{\sigma}.$$

Mais, puisqu'il s'agit d'une force centrale, en vertu de la loi des aires, on a $\sigma = kt$, $d\sigma = k dt$, et par conséquent $SO = \frac{2}{3}SG$ ou $SG = \frac{3}{2}SO$.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'APPROXIMATION DES NOMBRES RÉELS PAR LES NOMBRES QUADRATIQUES;

Par M. ÉMILE BOREL.

Les nombres quadratiques sont les nombres de la forme

$$\frac{a \pm \sqrt{b}}{c},$$

a , b , c désignant des nombres entiers dont les deux derniers peuvent être supposés positifs. Pour rechercher les nombres quadratiques différant peu d'un nombre donné x , il revient au même de rechercher les nombres de la forme $a \pm \sqrt{b}$ qui diffèrent peu de cx . Si l'on se borne d'abord aux nombres de la forme $a + \sqrt{b}$, on voit que, a désignant un entier positif ou négatif, les nombres $\sqrt{b}$ et cx écrits dans le système décimal ont des parties décimales très peu différentes.

On est ainsi conduit à ranger les nombres tels que $\sqrt{b}$, c'est-à-dire *les racines carrées des nombres entiers*, d'après l'ordre de grandeur de leur partie décimale. Ce travail ne présente aucune difficulté et est même très rapide, si l'on fait usage d'une Table de racines carrées; j'ai utilisé celle de Barlow.

Je publie ici, sans commentaires, la liste des racines des 500 premiers nombres (les carrés parfaits exclus), rangés par ordre de grandeur des parties décimales; la disposition même que j'ai adoptée suggérera des remarques qu'il est inutile d'énoncer. Signalons cependant l'existence de lacunes au voisinage des fractions irréductibles *simples*, lacunes d'autant plus étendues que ces fractions sont plus simples.

Parmi les applications d'une telle Table, on peut citer la recherche très aisée de quadratures approchées du cercle et de rectifications approchées de la circonférence. Si l'on cherche à insérer dans la Table les multiples de π , on trouve que 8π y est très voisin de $\sqrt{229}$;

on a

$$8\pi = 25,132\,741\,228\dots$$

$$\sqrt{229} = 15,132\,746\,0\dots$$

On obtient

$$\frac{10 + \sqrt{229}}{8} = 3,141\,593\,2\dots$$

$$\pi = 3,141\,592\,6\dots$$

L'erreur commise en prenant pour π la valeur $\frac{10 + \sqrt{229}}{8}$ est donc environ d'un demi-millionième. Si l'on remarque que l'on a

$$229 = 225 + 4 = 15^2 + 2^2,$$

on obtient aisément une construction géométrique très simple de la valeur approchée considérée, qui peut s'écrire

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 1}.$$

Je me propose de revenir sur la question d'approximation des nombres réels par des nombres quadratiques; je me contente de signaler ici, en terminant, une difficulté qui se présente lorsqu'on veut définir les nombres quadratiques, *en général*, difficulté analogue à celle qui résulte de la double définition des courbes algébriques, en coordonnées ponctuelles et tangentielles et qui se présente dans bien d'autres questions.

Comme nous l'avons dit, tous les nombres quadratiques sont définis par la formule

$$(1) \quad x = \frac{a \pm \sqrt{b}}{c},$$

où a , b , c sont des entiers; le nombre x vérifie l'équation du second degré,

$$(2) \quad c^2x^2 - 2acx + a^2 - b = 0.$$

Il est clair que si a , b , c sont quelconques, les coefficients de cette équation n'auront pas, *en général*, de facteur commun; si on les désigne par A , B , C , on voit que le nombre x défini par la formule (1) vérifie une équation de la forme

$$(3) \quad Ax^2 + Bx + C = 0.$$

dont les coefficients A, B, C sont d'un ordre de grandeur qui est le *carré* de l'ordre de grandeur de $a, \sqrt{b}, c$.

Si, inversement, on se donne l'équation (3), on en déduit

$$(4) \quad x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{a' \pm \sqrt{b'}}{c'},$$

c'est-à-dire une expression analogue à (1), mais dans laquelle $a', \sqrt{b'}$ et c' sont de l'ordre de grandeur de A, B, C. Dans le cas où l'équation (3) est identique à l'équation (2), l'expression (4) ne devient identique à (1) qu'après la suppression du facteur $2c$ commun au numérateur et au dénominateur; mais si A, B, C sont quelconques il n'y a pas, *en général*, de facteur commun au numérateur et au dénominateur de l'expression (4).

Il est clair qu'il n'y a là aucun paradoxe, mais simplement la nécessité de définir nettement, dans chaque recherche particulière, ce que l'on entend par une irrationnelle quadratique *générale*; on peut la considérer comme définie par la formule (1) et regarder comme *cas particulier* le cas où, dans l'équation (2), les coefficients ont des facteurs communs; ou, au contraire, la regarder comme définie par l'équation (3) et regarder comme *cas particulier* le cas où la formule (4) peut se simplifier par la suppression d'un facteur commun à A et B, figurant au carré dans $B^2 - 4AC$.

$$\sqrt{485} = 22,0227155$$

$$\sqrt{442} = 21,0237960$$

$$\sqrt{401} = 20,0249844$$

$$\sqrt{362} = 19,0262976$$

$$\sqrt{325} = 18,0277564$$

$$\sqrt{290} = 17,0293864$$

$$\sqrt{257} = 16,0312195$$

$$\sqrt{226} = 15,0332964$$

$$\sqrt{197} = 14,0356688$$

$$\sqrt{170} = 13,0384048$$

040 à 079.

$$\sqrt{45} = 12,0415946$$

$$\sqrt{22} = 11,0453610$$

$$\sqrt{01} = 10,0498756$$

$$\sqrt{2} = 9,0553851$$

$$\sqrt{5} = 8,0622577$$

$$\sqrt{0} = 7,0710678$$

$$\sqrt{486} = 22,0454077$$

$$\sqrt{443} = 21,0475652$$

$$\sqrt{402} = 20,0499377$$

$$\sqrt{353} = 19,0525589$$

$$\sqrt{326} = 18,0554701$$

$$\sqrt{291} = 17,0587221$$

$$\sqrt{258} = 16,0623784$$

$$\sqrt{227} = 15,0665192$$

$$\sqrt{487} = 22,0680765$$

$$\sqrt{198} = 14,0712473$$

$$\sqrt{444} = 21,0713075$$

$$\sqrt{403} = 20,0748599$$

$$\sqrt{171} = 13,0766968$$

$$\sqrt{364} = 19,0787840$$

080 à 119.

$$\sqrt{37} = 6,0827625$$

$$\sqrt{146} = 12,0830460$$

$$\sqrt{327} = 18,083141$$

$$\sqrt{292} = 17,088007$$

$$\sqrt{488} = 22,0907220$$

$$\sqrt{123} = 11,0905365$$

$$\sqrt{259} = 16,093470$$

$$\sqrt{445} = 21,0950231$$

$$\sqrt{26} = 5,0990195$$

$$\sqrt{102} = 10,0995049$$

$$\sqrt{228} = 15,0995689$$

$$\sqrt{404} = 20,099750$$

$$\sqrt{365} = 19,1049732$$

$$\sqrt{199} = 14,1067360$$

$$\sqrt{83} = 9,1104336$$

$$\sqrt{328} = 18,1107703$$

$$\sqrt{489} = 22,113340$$

$$\sqrt{172} = 13,1148770$$

$$\sqrt{293} = 17,117240$$

$$\sqrt{446} = 21,118710$$

120 à 159.

$$\overline{17} = 4,1231056$$

$$\overline{36} = 8,1240384$$

$$\sqrt{147} = 12,1243557$$

$$\sqrt{260} = 16,1245155$$

$$\sqrt{405} = 20,1246118$$

$$\overline{366} = 19,1311265$$

$$\overline{229} = 15,1327460$$

$$\overline{124} = 11,1355287$$

$$\sqrt{490} = 22,1359436$$

$$\sqrt{329} = 18,1383571$$

$$\overline{51} = 7,1414284$$

$$\overline{200} = 14,1421356$$

$$\sqrt{447} = 21,1423745$$

$$\sqrt{294} = 17,1464282$$

$$\overline{103} = 10,1488916$$

$$\sqrt{406} = 20,1494417$$

$$\overline{173} = 13,1529464$$

$$\overline{261} = 16,1554944$$

$$\overline{367} = 19,1572441$$

$$\overline{491} = 22,1585198$$

160 à 199.

$$\sqrt{10} = 3,1622777$$

$$\sqrt{38} = 6,1644140$$

$$\sqrt{84} = 9,1651514$$

$$\sqrt{448} = 21,1660105$$

$$\sqrt{148} = 12,1655251$$

$$\sqrt{230} = 15,1657509$$

$$\sqrt{330} = 18,1659021$$

$$\sqrt{407} = 20,1742410$$

$$\sqrt{295} = 17,1755640$$

$$\sqrt{201} = 14,1774469$$

$$\sqrt{125} = 11,1803399$$

$$\sqrt{492} = 22,1810730$$

$$\sqrt{368} = 19,1833261$$

$$\sqrt{63} = 8,1853528$$

$$\sqrt{262} = 16,1864141$$

$$\sqrt{149} = 12,1896201$$

$$\sqrt{174} = 13,1909060$$

$$\sqrt{331} = 18,1934054$$

$$\sqrt{27} = 5,1961524$$

$$\sqrt{104} = 10,1980390$$

$$\sqrt{408} = 20,1990099$$

$$\sqrt{231} = 15,1986842$$

$$\sqrt{493} = 22,2036033$$

$$\sqrt{296} = 17,2046505$$

$$\sqrt{149} = 12,2065556$$

$$\sqrt{369} = 19,2093727$$

$$\sqrt{202} = 14,2126704$$

$$\sqrt{450} = 21,2132034$$

$$\sqrt{52} = 7,2111026$$

$$\sqrt{263} = 16,2172747$$

$$\sqrt{332} = 18,2208672$$

$$\sqrt{85} = 9,2195445$$

$$\sqrt{409} = 20,2237484$$

$$\sqrt{126} = 11,2249722$$

$$\sqrt{494} = 22,2261108$$

$$\sqrt{175} = 13,2287566$$

$$\sqrt{232} = 15,2315462$$

$$\sqrt{297} = 17,2336879$$

$$\sqrt{370} = 19,2353841$$

$$\sqrt{451} = 21,2367606$$

$$\sqrt{5} = 2,2360680$$

240 à 279.

$$\sqrt{18} = 4,2426407$$

$$\sqrt{39} = 6,2449980$$

$$\sqrt{68} = 8,2462113$$

$$\sqrt{150} = 12,2474487$$

$$\sqrt{264} = 16,2480768$$

$$\sqrt{105} = 10,2468508$$

$$\sqrt{203} = 14,2478068$$

$$\sqrt{333} = 18,2482876$$

$$\sqrt{410} = 20,2484567$$

$$\sqrt{495} = 22,2485955$$

$$\sqrt{452} = 21,2602916$$

$$\sqrt{371} = 19,2613603$$

$$\sqrt{298} = 17,2626765$$

$$\sqrt{233} = 15,2643375$$

$$\sqrt{176} = 13,2664992$$

$$\sqrt{127} = 11,2694277$$

$$\sqrt{496} = 22,2710575$$

$$\sqrt{86} = 9,2736185$$

$$\sqrt{411} = 20,2731349$$

$$\sqrt{334} = 18,2756669$$

$$\sqrt{265} = 16,2788206$$

280 à 319.

$$\sqrt{53} = 7,2801099$$

$$\sqrt{204} = 14,2828569$$

$$\sqrt{453} = 21,2837967$$

$$\sqrt{372} = 19,2873015$$

$$\sqrt{151} = 12,2882057$$

$$\sqrt{299} = 17,2916165$$

$$\sqrt{28} = 5,2915026$$

$$\sqrt{497} = 22,2934968$$

$$\sqrt{106} = 10,2956301$$

$$\sqrt{234} = 15,2970585$$

$$\sqrt{412} = 20,2977831$$

$$\sqrt{335} = 18,3030052$$

$$\sqrt{177} = 13,3041347$$

$$\sqrt{69} = 8,3066239$$

$$\sqrt{454} = 21,3072758$$

$$\sqrt{266} = 16,3095064$$

$$\sqrt{373} = 19,3132079$$

$$\sqrt{128} = 11,3137085$$

$$\sqrt{498} = 22,3159136$$

$$\sqrt{205} = 14,3178211$$

$$\sqrt{11} = 3,3166248$$

320 à 359.

$$\sqrt{300} = 17,3205081$$

$$\sqrt{413} = 20,3224014$$

$$\sqrt{40} = 6,3245553$$

$$\sqrt{87} = 9,3273791$$

$$\sqrt{152} = 12,3288280$$

$$\sqrt{235} = 15,3297097$$

$$\sqrt{336} = 18,3303028$$

$$\sqrt{455} = 21,3307290$$

$$\sqrt{199} = 14,28383079$$

$$\sqrt{374} = 19,3390796$$

$$\sqrt{267} = 16,3401346$$

$$\sqrt{178} = 13,3410641$$

$$\sqrt{107} = 10,3440804$$

$$\sqrt{414} = 20,3469899$$

$$\sqrt{54} = 7,3484692$$

$$\sqrt{301} = 17,3498516$$

$$\sqrt{206} = 14,3527001$$

$$\sqrt{456} = 21,3541565$$

$$\sqrt{129} = 11,3578167$$

$$\sqrt{337} = 18,3575598$$

$$\sqrt{19} = 4,3588989$$

360 à 399.

$$\sqrt{500} = 22,3606798$$

$$\sqrt{236} = 15,3622915$$

$$\sqrt{375} = 19,3649167$$

$$\sqrt{70} = 8,3666003$$

$$\sqrt{153} = 12,3693169$$

$$\sqrt{268} = 16,3707055$$

$$\sqrt{415} = 20,3715488$$

$$\sqrt{457} = 21,3775583$$

$$\sqrt{302} = 17,3781472$$

$$\sqrt{179} = 13,3790882$$

$$\sqrt{88} = 9,3808315$$

$$\sqrt{338} = 18,3847763$$

$$\sqrt{29} = 5,3851648$$

$$\sqrt{207} = 14,3874946$$

$$\sqrt{376} = 19,3927194$$

$$\sqrt{108} = 10,3923048$$

$$\sqrt{237} = 15,3948043$$

$$\sqrt{416} = 20,3960781$$

400 à 439.

$$\sqrt{458} = 21,4009346$$

$$\sqrt{430} = 11,4017543$$

$$\sqrt{269} = 16,4012195$$

$$\sqrt{41} = 6,4031242$$

$$\sqrt{303} = 17,4068952$$

$$\sqrt{154} = 12,4096736$$

$$\sqrt{339} = 18,4119526$$

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

$$\sqrt{377} = 19,4164878$$

$$\sqrt{180} = 13,4164079$$

$$\sqrt{51} = 7,4161985$$

$$\sqrt{417} = 20,4205779$$

$$\sqrt{208} = 13,4222051$$

$$\sqrt{49} = 21,4242853$$

$$\sqrt{71} = 8,4261498$$

$$\sqrt{238} = 15,4272486$$

$$\sqrt{270} = 16,4316767$$

$$\sqrt{89} = 9,4339811$$

$$\sqrt{304} = 17,4355958$$

$$\sqrt{340} = 18,4390889$$

440 à 479.

$$\sqrt{109} = 10,4403056$$

$$\sqrt{378} = 19,4422221$$

$$\sqrt{418} = 20,4450483$$

$$\sqrt{131} = 11,4455231$$

$$\sqrt{460} = 21,4476106$$

$$\sqrt{155} = 12,4498996$$

$$\sqrt{6} = 2,4494897$$

$$\sqrt{181} = 13,4536240$$

$$\sqrt{209} = 14,4568323$$

$$\sqrt{239} = 15,4596248$$

$$\sqrt{221} = 16,4620776$$

$$\sqrt{305} = 17,4642492$$

$$\sqrt{341} = 18,4661853$$

$$\sqrt{379} = 19,4679223$$

$$\sqrt{419} = 20,4694895$$

$$\sqrt{461} = 21,4709106$$

$$\sqrt{12} = 3,4641016$$

$$\sqrt{20} = 4,4721360$$

$$\sqrt{30} = 5,4772256$$

480 à 519.

$$\sqrt{42} = 6,4807407$$

$$\sqrt{56} = 7,4833148$$

$$\sqrt{72} = 8,4852814$$

$$\sqrt{90} = 9,4868330$$

$$\sqrt{110} = 10,4880885$$

$$\sqrt{132} = 11,4891253$$

$$\sqrt{182} = 13,4907376$$

$$\sqrt{210} = 14,4913767$$

$$\sqrt{272} = 16,4924225$$

$$\sqrt{342} = 18,4932420$$

$$\sqrt{462} = 21,4941853$$

$$\sqrt{156} = 12,4899960$$

$$\sqrt{240} = 15,4919334$$

$$\sqrt{307} = 17,4928557$$

$$\sqrt{380} = 19,4935887$$

$$\sqrt{420} = 20,4939015$$

$$\sqrt{463} = 21,5174348$$

$$\sqrt{421} = 20,5182845$$

$$\sqrt{381} = 19,5192213$$

520 à 559.

$$\sqrt{343} = 18,5202592$$

$$\sqrt{307} = 17,5214155$$

$$\sqrt{273} = 16,5227116$$

$$\sqrt{241} = 15,5241747$$

$$\sqrt{211} = 14,5258390$$

$$\sqrt{183} = 13,5277493$$

$$\sqrt{157} = 12,5299641$$

$$\sqrt{133} = 11,5325626$$

$$\sqrt{111} = 10,5356538$$

$$\sqrt{91} = 9,5393920$$

$$\sqrt{464} = 21,5406592$$

$$\sqrt{422} = 20,5426386$$

$$\sqrt{73} = 8,5440037$$

$$\sqrt{382} = 19,5448203$$

$$\sqrt{340} = 18,5472370$$

$$\sqrt{57} = 7,5498344$$

$$\sqrt{308} = 17,5499288$$

$$\sqrt{274} = 16,5529454$$

$$\sqrt{242} = 15,5563492$$

$$\sqrt{43} = 6,5574385$$

560 à 599.

$$\sqrt{212} = 14,5602198$$

$$\sqrt{465} = 21,5638587$$

$$\sqrt{184} = 13,5646600$$

$$\sqrt{423} = 20,5669683$$

$$\sqrt{31} = 5,5677644$$

$$\sqrt{158} = 12,5698051$$

$$\sqrt{383} = 19,5703858$$

$$\sqrt{134} = 11,5758369$$

$$\sqrt{345} = 18,5741756$$

$$\sqrt{309} = 17,5783958$$

$$\sqrt{51} = 7,1768353$$

$$\sqrt{112} = 10,5830052$$

$$\sqrt{275} = 16,5831240$$

$$\sqrt{243} = 15,5884573$$

$$\sqrt{466} = 21,5870331$$

$$\sqrt{424} = 20,5912603$$

$$\sqrt{92} = 9,5916630$$

$$\sqrt{213} = 14,5945195$$

$$\sqrt{384} = 19,5959179$$

600 à 639.

$$\sqrt{185} = 13,6014705$$

$$\sqrt{74} = 8,6023253$$

$$\sqrt{13} = 3,6055513$$

$$\sqrt{467} = 21,6101828$$

$$\sqrt{135} = 11,6189500$$

$$\sqrt{244} = 15,6204994$$

$$\sqrt{385} = 19,6214169$$

$$\sqrt{426} = 20,6397674$$

$$\sqrt{346} = 18,6010752$$

$$\sqrt{276} = 16,6132477$$

$$\sqrt{425} = 20,6155281$$

$$\sqrt{468} = 21,6333077$$

$$\sqrt{311} = 17,6351921$$

$$\sqrt{186} = 13,6381817$$

$$\sqrt{310} = 17,6068169$$

$$\sqrt{159} = 12,6095202$$

$$\sqrt{58} = 7,6157731$$

$$\sqrt{347} = 18,6279360$$

$$\sqrt{214} = 14,6287388$$

$$\sqrt{113} = 10,6301458$$

$$\sqrt{44} = 6,6332496$$

640 à 679.

$$\sqrt{277} = 16,6433170$$

$$\sqrt{93} = 9,6436508$$

$$\sqrt{7} = 2,6457513$$

$$\sqrt{386} = 19,6468827$$

$$\sqrt{160} = 12,6491106$$

$$\sqrt{245} = 15,6524758$$

$$\sqrt{348} = 18,6547581$$

$$\sqrt{469} = 21,6564078$$

$$\sqrt{32} = 5,6568542$$

$$\sqrt{55} = 8,6602570$$

$$\sqrt{136} = 11,6619038$$

$$\sqrt{215} = 14,6623783$$

$$\sqrt{312} = 17,6635217$$

$$\sqrt{427} = 20,6639783$$

$$\sqrt{387} = 19,6723150$$

$$\sqrt{278} = 16,6733320$$

$$\sqrt{187} = 13,6747941$$

$$\sqrt{114} = 10,6770781$$

$$\sqrt{470} = 21,6794834$$

680 à 719.

$$\sqrt{349} = 18,6815471$$

$$\sqrt{59} = 7,6811457$$

$$\sqrt{246} = 15,6843871$$

$$\sqrt{428} = 20,6881609$$

$$\sqrt{161} = 12,6885775$$

$$\sqrt{12} = 4,6904158$$

$$\sqrt{313} = 17,6918060$$

$$\sqrt{94} = 9,6953597$$

$$\sqrt{216} = 14,6969385$$

$$\sqrt{388} = 19,6977156$$

$$\sqrt{471} = 21,7025344$$

$$\sqrt{279} = 16,7032931$$

$$\sqrt{137} = 11,7046999$$

$$\sqrt{45} = 6,7082039$$

$$\sqrt{350} = 18,7082869$$

$$\sqrt{188} = 13,7113092$$

$$\sqrt{429} = 20,7123152$$

•

$$\sqrt{247} = 15,7162336$$

$$\sqrt{76} = 8,7177979$$

720 à 759.

$$\sqrt{314} = 17,7200451$$

$$\sqrt{115} = 10,7238053$$

$$\sqrt{389} = 19,7230829$$

$$\sqrt{472} = 21,7255610$$

$$\sqrt{162} = 12,7279221$$

$$\sqrt{217} = 14,7309199$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508$$

$$\sqrt{280} = 16,7332005$$

$$\sqrt{334} = 18,27349940$$

$$\sqrt{430} = 20,7364414$$

$$\sqrt{11} = 3,3166247$$

$$\sqrt{33} = 5,7445626$$

$$\sqrt{60} = 7,7459667$$

$$\sqrt{95} = 9,7467943$$

$$\sqrt{138} = 11,7473401$$

$$\sqrt{218} = 14,7480157$$

$$\sqrt{189} = 13,7477271$$

$$\sqrt{315} = 17,7482393$$

$$\sqrt{390} = 19,7484177$$

$$\sqrt{473} = 21,7485619$$

760 à 799.

$$\sqrt{431} = 20,7605395$$

$$\sqrt{352} = 18,7616630$$

$$\sqrt{281} = 16,7630546$$

$$\sqrt{218} = 14,7648231$$

$$\sqrt{163} = 12,7671453$$

$$\sqrt{116} = 10,7703296$$

$$\sqrt{77} = 8,7749644$$

$$\sqrt{474} = 21,7715411$$

$$\sqrt{391} = 19,7737199$$

$$\sqrt{316} = 17,7763888$$

$$\sqrt{249} = 15,7797338$$

$$\sqrt{46} = 6,7823300$$

$$\sqrt{190} = 13,7840488$$

$$\sqrt{432} = 20,7846097$$

$$\sqrt{353} = 18,7882942$$

$$\sqrt{139} = 11,7898261$$

$$\sqrt{282} = 16,7928556$$

$$\sqrt{475} = 21,7944947$$

$$\sqrt{23} = 4,7958315$$

$$\sqrt{96} = 9,7979590$$

$$\sqrt{219} = 14,7986486$$

$$\sqrt{392} = 19,7989895$$

800 à 839.

$$\sqrt{317} = 17,804495$$

$$\sqrt{164} = 12,806248$$

$$\sqrt{433} = 20,8086520$$

$$\sqrt{61} = 7,810249$$

$$\sqrt{250} = 15,8113883$$

$$\sqrt{334} = 18,8148877$$

$$\sqrt{117} = 10,8166538$$

$$\sqrt{476} = 21,8174242$$

$$\sqrt{191} = 13,8202750$$

$$\sqrt{283} = 16,8226038$$

$$\sqrt{393} = 19,8242276$$

$$\sqrt{8} = 2,8284271$$

$$\sqrt{34} = 5,8309519$$

$$\sqrt{73} = 8,8317609$$

$$\sqrt{140} = 11,8321596$$

$$\sqrt{220} = 14,8323970$$

$$\sqrt{318} = 17,8325545$$

$$\sqrt{434} = 20,832606$$

840 à 879

$$\sqrt{477} = 21,8403297$$

$$\sqrt{485} = 22,0454137$$

$$\sqrt{491} = 22,2936995$$

$$\sqrt{465} = 21,5638226$$

$$\sqrt{47} = 6,8599458$$

$$\sqrt{494} = 22,246332$$

$$\sqrt{484} = 22,022995$$

$$\sqrt{47} = 6,8556546$$

$$\sqrt{492} = 22,284065$$

$$\sqrt{435} = 20,8566536$$

$$\sqrt{419} = 20,712411$$

$$\sqrt{418} = 20,68805$$

$$\sqrt{478} = 21,8632111$$

$$\sqrt{421} = 20,760687$$

$$\sqrt{456} = 21,354623$$

$$\sqrt{45} = 6,7082033$$

$$\sqrt{62} = 7,9124839$$

$$\sqrt{441} = 21,0000000$$

$$\sqrt{452} = 21,2603479$$

$$\sqrt{495} = 22,2463333$$

880 à 919.

$$\sqrt{436} = 20,8806130$$

$$\sqrt{285} = 16,8819430$$

$$\sqrt{166} = 12,8840987$$

$$\sqrt{479} = 21,8860686$$

$$\sqrt{79} = 8,8881944$$

$$\sqrt{320} = 17,8885438$$

$$\sqrt{193} = 13,8924440$$

$$\sqrt{357} = 18,8944$$

$$\sqrt{24} = 4,8989795$$

$$\sqrt{98} = 9,8994949$$

$$\sqrt{222} = 14,8996644$$

$$\sqrt{396} = 19,8997487$$

$$\sqrt{437} = 20,9045450$$

$$\sqrt{253} = 15,9059737$$

$$\sqrt{119} = 10,9087121$$

$$\sqrt{480} = 21,9089023$$

$$\sqrt{286} = 16,9115345$$

$$\sqrt{35} = 5,9160798$$

$$\sqrt{142} = 11,9163753$$

$$\sqrt{321} = 17,9164729$$

920 à 959.

$$\sqrt{358} = 18,9208879$$

$$\sqrt{167} = 12,9228480$$

$$\sqrt{397} = 19,9248588$$

$$\sqrt{48} = 6,9282032$$

$$\sqrt{194} = 13,9283883$$

$$\sqrt{438} = 20,9284495$$

$$\sqrt{481} = 21,9317122$$

$$\sqrt{223} = 14,9331845$$

$$\sqrt{63} = 7,9372539$$

$$\sqrt{254} = 15,9373775$$

$$\sqrt{287} = 16,9410743$$

$$\sqrt{322} = 17,9443584$$

$$\sqrt{80} = 8,9442719$$

$$\sqrt{359} = 18,9472953$$

$$\sqrt{398} = 19,9499373$$

$$\sqrt{99} = 9,9498744$$

$$\sqrt{439} = 20,9523268$$

$$\sqrt{482} = 21,9544984$$

$$\sqrt{120} = 10,9544512$$

$$\sqrt{143} = 11,9582607$$

$$\sqrt{168} = 12,96148$$

$$\sqrt{195} = 13,96424$$

$$\sqrt{224} = 14,96662$$

$$\sqrt{255} = 15,96871$$

$$\sqrt{288} = 16,97056$$

$$\sqrt{323} = 17,97220$$

$$\sqrt{360} = 18,97366$$

$$\sqrt{399} = 19,97498$$

$$\sqrt{440} = 20,97617$$

$$\sqrt{483} = 21,97726$$

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS IMPLICITES;

Par M. E. GOURSAT.

On connaît les beaux résultats obtenus par M. E. Picard dans l'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, grâce à sa méthode des approximations successives. Cette méthode s'applique également avec une grande facilité à la théorie des fonctions implicites. Pour fixer les idées, je resterai d'abord dans le domaine réel, quoiqu'il soit bien aisé d'étendre les résultats aux fonctions définies par des équations dont le premier membre est analytique.

1. Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes réelles x et y , continue dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0 , tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Pour préciser, nous supposons que cette fonction est continue dans un domaine D défini par les inégalités

$$(1) \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

a et b étant deux nombres positifs. Nous admettrons de plus que l'on peut choisir les nombres a et b assez petits pour que l'on ait

$$(2) \quad |f(x, y') - f(x, y'')| < K |y' - y''|,$$

x étant une valeur quelconque comprise entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$, y', y'' étant de même deux valeurs quelconques de y comprises entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$, et K un nombre positif constant *plus petit que l'unité*. Cette dernière condition sera certainement vérifiée si la fonction $f(x, y)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulant pour $x = x_0, y = y_0$, et continue dans le voisinage.

Ces conditions étant supposées satisfaites, nous allons démontrer que l'équation

$$(3) \quad y - y_0 = f(x, y),$$

où l'on regarde x comme une variable indépendante et y comme l'inconnue admet une racine, et une seule, qui tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 .

Il est clair que l'on peut, dans la démonstration, supposer $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. L'équation (3) prend la forme

$$(3') \quad y = f(x, y),$$

la fonction $f(x, y)$ s'annulant pour $x = y = 0$, et restant continue lorsque x varie de $-a$ à $+a$, et y de $-b$ à $+b$. Posons

$$(4) \quad y_1 = f(x, 0), \quad y_2 = f(x, y_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x, y_{n-1}), \quad \dots;$$

il faut d'abord montrer qu'en prenant x assez petit, $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, restent inférieurs à b en valeur absolue. Par hypothèse, si $|x| < a$ et $|y| < b$, on a

$$|f(x, y) - f(x, 0)| < K |y|,$$

K étant plus petit que l'unité; on a donc *a fortiori*

$$|f(x, y)| < |y_1| + K |y|.$$

Comme y_1 tend vers zéro avec x , nous pourrions prendre un nombre $a' \leq a$ tel que, x restant compris entre $-a'$ et $+a'$, on ait

$$|y_1| < b(1 - K).$$

Si $|y|$ est inférieur à b , on aura donc

$$|f(x, y)| < b(1 - K) + Kb,$$

ou $|f(x, y)| < b$, pourvu que x soit compris entre $-a'$ et $+a'$. Il s'ensuit que $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ seront tous inférieurs à b en valeur absolue, si la valeur absolue de x est moindre que a' .

Pour prouver que y_n tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment, considérons la série

$$(5) \quad y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

Des relations

$$y_n = f(x, y_{n-1}), \quad y_{n-1} = f(x, y_{n-2})$$

on tire, d'après la condition (2),

$$|y_n - y_{n-1}| < K |y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

Les termes de la série (5) sont donc plus petits en valeur absolue que les termes d'une progression géométrique de raison $K < 1$. La somme S_n des n premiers termes, ou y_n , tend par conséquent vers une limite Y lorsque n augmente indéfiniment. Cette limite Y est une racine de l'équation (3), car, si l'on fait croître n indéfiniment, les deux membres de la relation

$$y_n = f(x, y_{n-1})$$

tendent respectivement vers Y et $f(x, Y)$, et l'on a à la limite

$$Y = f(x, Y).$$

Cette racine Y est une fonction de la variable x , définie dans l'intervalle $(-a', +a')$. C'est une fonction continue, car la série (5) est, d'après ce qui précède, uniformément convergente dans cet intervalle, et tous les termes sont aussi des fonctions continues. On a d'ailleurs

$$|Y| < \frac{|y_1|}{1 - K},$$

ce qui montre que la racine Y tend vers zéro en même temps que x .

L'équation (3') n'admet pas d'autre racine tendant vers zéro avec x . D'une façon plus précise, lorsque x est compris

entre $-a'$ et $+a'$, il n'existe pas d'autre racine que Y , dont la valeur absolue soit inférieure à b . Soit en effet Z une racine, inférieure à b en valeur absolue, de l'équation (3'); des deux relations

$$Z = f(x, Z), \quad y_n = f(x, y_{n-1})$$

on déduit, en appliquant toujours la condition (2),

$$|Z - y_n| < K |Z - y_{n-1}|,$$

et par suite

$$|Z - y_n| < K^{n-1} |Z - y_1|.$$

La différence $Z - y_n$ tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et Z est identique à Y .

2. Il est facile de passer de la proposition précédente au théorème d'existence des fonctions implicites, sous la forme qu'on lui donne ordinairement. Nous l'énoncerons de la façon suivante :

Soit $F(x, y)$ une fonction continue des deux variables x, y , dans le voisinage d'un système de valeurs $x = x_0, y = y_0$, pour lequel $F(x_0, y_0) = 0$, et admettant une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ continue dans le voisinage du même système de valeurs, mais différente de zéro pour $x = x_0, y = y_0$. L'équation

$$(6) \quad F(x, y) = 0,$$

admet une racine et une seule tendant vers y_0 lorsque x tend vers x_0 .

Soit en effet m la valeur de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}$ pour $x = x_0, y = y_0$; m est par hypothèse différent de zéro, et l'équation (6) est équivalente à l'équation

$$y - y_0 = y - y_0 - \frac{1}{m} F(x, y) = f(x, y).$$

Or la fonction $f(x, y)$ du second membre est nulle, ainsi que $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $x = x_0, y = y_0$, et ces deux fonctions sont continues dans le voisinage. On peut donc appliquer à cette équation le théorème démontré plus haut; ce qui conduit à la proposition énoncée.

Remarque. — La démonstration précédente ne suppose rien sur l'existence de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$. On peut se rendre compte aisément que l'existence de cette dérivée n'est nullement nécessaire. Soit par exemple $\varphi(x)$ une fonction continue sans dérivée, prenant une valeur positive b pour $x = a$. L'équation $y^2 = \varphi(x)$ admet deux racines qui tendent respectivement vers $\pm \sqrt{b}$ lorsque x tend vers a , et qui sont aussi des fonctions continues de x dans le voisinage.

3. Considérons maintenant le cas général d'un nombre quelconque d'équations. Soient

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p), \quad \dots, \quad f_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p),$$

p fonctions des $n + p$ variables x_i, y_k , continues et admettant des dérivées partielles continues $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ dans le voisinage des valeurs $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, \dots, y_p = 0$. Si de plus les p fonctions f_i , ainsi que les p^2 dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, s'annulent pour ce système de valeurs, les p équations

$$(7) \quad y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \dots, \quad y_p = f_p$$

admettent un système de solutions et un seul de la forme

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ étant des fonctions continues des n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, qui tendent vers zéro lorsque toutes ces variables tendent vers zéro.

Supposons les fonctions $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ continues pour les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p$ satisfaisant aux inégalités

$$(8) \quad |x_1| \leq a_1, \quad |x_2| \leq a_2, \quad \dots, \quad |x_n| \leq a_n, \quad |y_1| \leq b_1, \quad \dots, \quad |y_p| \leq b_p.$$

Comme on peut toujours remplacer les nombres a_i, b_k par des nombres positifs plus petits, nous supposons que l'on a choisi ces nombres assez petits pour que la valeur absolue de l'une quelconque des dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ soit inférieure à $\frac{K}{p}$ dans le domaine défini

L'inégalité (11) montre que l'on aura aussi $|\mathcal{Y}_i^{(m)}| < b$, et l'on démontrera ainsi de proche en proche que toutes les valeurs absolues $|\mathcal{Y}_i^{(2)}|, |\mathcal{Y}_i^{(3)}|, \dots, |\mathcal{Y}_i^{(m)}|, \dots$ seront inférieures à b , pourvu que l'on ait

$$|x_1| \leq a_1, \quad |x_2| \leq a_2, \quad \dots, \quad |x_n| \leq a_n.$$

Des deux relations

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_i^{(m)} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{Y}_1^{(m-1)}, \mathcal{Y}_2^{(m-1)}, \dots, \mathcal{Y}_p^{(m-1)}), \\ \mathcal{Y}_i^{(m-1)} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{Y}_1^{(m-2)}, \mathcal{Y}_2^{(m-2)}, \dots, \mathcal{Y}_p^{(m-2)}), \end{aligned}$$

on déduit de même

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_i^{(m)} - \mathcal{Y}_i^{(m-1)}| &< \frac{K}{p} |\mathcal{Y}_1^{(m-1)} - \mathcal{Y}_1^{(m-2)}| \\ &+ \frac{K}{p} |\mathcal{Y}_2^{(m-1)} - \mathcal{Y}_2^{(m-2)}| + \dots + \frac{K}{p} |\mathcal{Y}_p^{(m-1)} - \mathcal{Y}_p^{(m-2)}|. \end{aligned}$$

Soit M_{m-1} la valeur maximum des valeurs absolues des différences $|\mathcal{Y}_i^{(m-1)} - \mathcal{Y}_i^{(m-2)}|$ pour $i = 1, 2, \dots, p$; l'inégalité précédente prouve que l'on aura

$$|\mathcal{Y}_i^{(m-1)} - \mathcal{Y}_i^{(m-2)}| < KM_{m-1}.$$

En particulier, si H est la valeur maximum de $|\mathcal{Y}_1^{(1)}|, |\mathcal{Y}_2^{(1)}|, \dots, |\mathcal{Y}_p^{(1)}|$, la valeur maximum des valeurs absolues $|\mathcal{Y}_1^{(2)} - \mathcal{Y}_1^{(1)}|, \dots, |\mathcal{Y}_p^{(2)} - \mathcal{Y}_p^{(1)}|$ sera moindre que KH , et, en continuant de la sorte, on voit que la valeur absolue de $\mathcal{Y}_i^{(m)} - \mathcal{Y}_i^{(m-1)}$ sera inférieure à $K^{m-1}H$. La série

$$\mathcal{Y}_i^{(1)} + \{\mathcal{Y}_i^{(2)} - \mathcal{Y}_i^{(1)}\} + \dots + \{\mathcal{Y}_i^{(m)} - \mathcal{Y}_i^{(m-1)}\} + \dots$$

a donc ses termes plus petits en valeur absolue que ceux d'une progression géométrique de raison $K < 1$. Il s'ensuit que $\mathcal{Y}_i^{(m)}$ tend vers une limite Y_i lorsque m augmente indéfiniment. Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ les limites vers lesquelles tendent respectivement $\mathcal{Y}_1^{(m)}, \mathcal{Y}_2^{(m)}, \dots, \mathcal{Y}_p^{(m)}$ lorsque m croît indéfiniment. La relation

$$\mathcal{Y}_i^{(m)} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{Y}_1^{(m-1)}, \dots, \mathcal{Y}_p^{(m-1)})$$

devient à la limite

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_p), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Cette équation est intégrée par le système

$$(2) \quad \begin{cases} z = e^{-\gamma}(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + u, \\ 0 = e^{-\gamma}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \frac{\partial u}{\partial x}, \\ 0 = e^{-\gamma}(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

dans lequel α, γ désignent deux paramètres arbitraires, et u une intégrale quelconque de l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0.$$

La vérification est aisée : la première des équations (2) donne

$$(4) \quad p = e^{-\gamma} \sin \alpha, \quad q = -e^{-\gamma} \cos \alpha, \quad p^2 + q^2 = e^{-2\gamma};$$

d'où

$$rp + sq = -2e^{-2\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad sp + tq = -2e^{-2\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

et, par suite,

$$rp^2 + 2spq + tq^2 = -2e^{-3\gamma} \left(\sin \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right).$$

Or on tire des deux dernières équations (2), en tenant compte de (3),

$$\cos \alpha - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

$$\sin \alpha - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$(5) \quad \sin \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0,$$

ce qui entraîne l'équation (1).

Les équations (2) montrent encore que l'on a

$$z = u + \frac{\partial u}{\partial \gamma},$$

et l'on en conclut que z est, en même temps que u , une intégrale de (3). On voit sans peine qu'il en est de même de p et q .

Revenons maintenant au travail de M. Buhl. L'auteur cherche comment on peut déterminer une surface dont l'un des systèmes

de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes déterminée par l'équation différentielle donnée,

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

L'équation différentielle de la surface cherchée est

$$(7) \quad r + 2fs + f^2t = 0.$$

Par un changement de variables elle peut se ramener à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

L'objet principal de M. Buhl est de trouver dans quels cas la fonction λ se réduit à une simple constante, qu'il est toujours permis de supposer égale à l'unité. On est alors ramené à l'intégration de l'équation (3), dont j'ai fait précisément dépendre la recherche des surfaces à pente uniforme.

Nous sommes ainsi conduits à examiner la question suivante :

A quelle condition l'équation (6) représente-t-elle une famille de courbes appartenant à un réseau proportionnel?

Soit $\varphi(x, y) = C$ l'intégrale de l'équation (6). On a identiquement

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Si l'on considère les deux courbes consécutives $\varphi(x, y) = C$ et $\varphi(x, y) = C + dC$ et si l'on veut que leurs trajectoires orthogonales les divisent proportionnellement, on doit, en appelant ds et $ds + \delta ds$ les arcs élémentaires correspondants, $\frac{d\varphi}{dn}$ la dérivée de φ suivant la normale, ρ le rayon de courbure, écrire que le rapport $\frac{\delta ds}{ds}$ égal, comme l'on sait, à $\frac{\frac{d\varphi}{dn}}{\rho}$, est constant le long de la courbe $\varphi(x, y) = C$. D'ailleurs

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dy} \sqrt{1+f^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}}{(1+f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc on pose

$$(9) \quad F = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}}{1 + f^2},$$

on a

$$\frac{\frac{d\varphi}{dn}}{\varrho} = F \frac{d\varphi}{dy},$$

et cette expression doit demeurer invariable quand φ est constant, c'est-à-dire quand $dy = f dx$. On trouve ainsi

$$F \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + f \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

L'équation (8) donne d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La condition précédente peut donc s'écrire

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + f \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Calculons, au moyen de (9), les dérivées partielles de F et portons dans (10). Toutes réductions faites, nous obtenons

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ - \frac{2f}{1+f^2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \end{array} \right\} = 0,$$

ou bien

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

en posant $\theta = \text{arc tang } f$.

Telle est la condition cherchée. Quand elle est vérifiée par la fonction f , le réseau proportionnel est donné par les deux dernières équations (2), d'où l'on tire

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = e\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cos \alpha \right), \\ y = e\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \alpha \right). \end{array} \right.$$

A chaque valeur constante de γ correspond l'une des courbes du système. La surface à pente uniforme s'obtient en adjoignant la première équation (2).

Il reste à dire comment on peut choisir la fonction u de façon à identifier la famille de courbes (13) avec une famille donnée de courbes vérifiant l'équation (12). Il suffit évidemment que les deux familles aient une courbe commune.

L'intégrale générale de (3) peut s'écrire

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F(\alpha + 2t\sqrt{\gamma}) dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F'(\alpha + 2t\sqrt{\gamma}) dt, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F''(\alpha + 2t\sqrt{\gamma}) dt. \end{aligned}$$

Pour la valeur particulière $\gamma = 0$, ces formules deviennent

$$u = \sqrt{\pi} F(\alpha), \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sqrt{\pi} F'(\alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sqrt{\pi} F''(\alpha),$$

et les équations (13) se réduisent alors à

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\pi} [\sin \alpha F''(\alpha) - \cos \alpha F'(\alpha)], \\ y &= \sqrt{\pi} [\cos \alpha F''(\alpha) + \sin \alpha F'(\alpha)]. \end{aligned}$$

En écrivant que ces valeurs vérifient l'équation $\Psi(x, y)$ d'une courbe donnée, on est évidemment conduit à une équation différentielle de premier ordre en $F'(\alpha)$. La fonction F s'obtient ensuite par quadrature.

La ligne asymptotique projetée suivant la courbe pour laquelle γ est nul présente une pente de 45° ; car, en vertu des équations (4), l'hypothèse $\gamma = 0$ entraîne $p^2 + q^2 = 1$. Si l'on veut s'affranchir de cette restriction, il suffit de changer γ en $\gamma + c$, c étant une constante arbitraire, et de remplacer en même temps u par ue^{-c} . Cette double modification, sans altérer les équations (13), a pour effet de multiplier z par la constante e^{-c} et, par conséquent, de multiplier par ce même facteur les pentes des lignes asymptotiques.

En résumé, le problème étudié par M. Buhl peut être résolu chaque fois que la fonction $\theta = \arctang f$ est une solution de l'équation (12). Ce cas s'ajoute à ceux qu'il a indiqués et qui reviennent à mettre f sous la forme $\frac{B}{A}$, puis à chercher si, en appelant S une solution quelconque de (12), l'une des quantités $S \frac{A}{B}$, $S \frac{B}{A}$ est une solution, ou bien encore à vérifier s'il existe un facteur R tel que RA et RB soient simultanément des solutions.

Comme exemple particulier, j'ai cité jadis celui de certaines courbes homothétiques divisées proportionnellement par leurs trajectoires orthogonales. De pareilles courbes existent, et elles possèdent cette propriété caractéristique, que pour chacune d'elles le rayon de courbure est dans un rapport constant avec la projection, sur la normale, du rayon vecteur issu du centre d'homothétie. Lorsque ce rapport est égal à l'unité, le système est constitué par des développantes de cercles concentriques, ayant leurs points de rebroussement sur un même diamètre. La fonction u a alors pour valeur $\alpha^2 + 2\gamma$. La surface correspondante est définie par les équations très simples

$$\begin{aligned}x &= 2e\gamma(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \\y &= 2e\gamma(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha), \\z &= \alpha^2 + 3\gamma.\end{aligned}$$

SUR LE PROBLÈME DES AIRES;

Par M. H. LEBESGUE.

Dans ma thèse *Intégrale, Longueur, Aire*, parue aux *Annali di Matematica* en 1902, j'ai étudié le problème des aires des domaines plans. L'un des énoncés que j'avais choisis pour ce problème était le suivant :

Attacher à chaque domaine plan un nombre positif, que l'on appellera son aire, et satisfaisant aux conditions suivantes :

Deux domaines superposables ont la même aire.

Le domaine formé par la réunion de deux domaines, sans points intérieurs communs, ayant en commun un arc de fron-

tière et un seul, a pour aire la somme des aires des domaines composants.

Avec cet énoncé, le problème des aires est déterminé quand on se borne aux polygones, comme l'ont montré MM. Gérard et Hadamard. Il l'est aussi pour les domaines quarrables, au sens de M. Jordan, c'est-à-dire pour ceux dont la frontière peut être enfermée dans un nombre fini de carrés dont la somme des aires, au sens ordinaire du mot, est aussi petite que l'on veut. Au paragraphe 14 de ma Thèse, j'ai indiqué quelques raisonnements qui montrent que le problème des aires est indéterminé pour les domaines non quarrables; mais l'exposition que j'ai donnée de ces raisonnements est inexacte et incomplète. Je vais reprendre ici la question.

Considérons deux domaines D_1 , D_2 ayant un arc α de frontière en commun. Soient α_1 , α_2 les frontières de D_1 et D_2 . Soit A un point de α , non confondu avec l'une des extrémités de α . De A pour centre, on peut décrire une circonférence Γ assez petite pour qu'elle ne contienne aucun point de α_1 ni de α_2 ; et cela quels que soient les arcs α_1 et α_2 , qu'ils aient ou non des points communs, pourvu que D_1 et D_2 soient deux domaines. A l'intérieur de Γ se trouvent des arcs de α , soit lm celui qui contient A . Prenons sur lm deux points a et b , différents de l et m , et de part et d'autre de A . Si l'on se reporte aux raisonnements qui servent à M. Jordan (*Traité d'Analyse*, 2^e édit., t. I) à démontrer qu'une courbe fermée, sans point double, sépare le plan en deux régions, on verra qu'à l'intérieur de Γ il est possible de tracer une courbe C , tout entière dans D_1 , et joignant a et b , et une courbe C' joignant les mêmes points et extérieure à D_1 .

Le domaine Δ limité par C et l'arc aAb est intérieur à D_1 , le domaine Δ' limité par C' et aAb est extérieur à D_1 . Aucun point des arcs α_1 , α_2 n'est intérieur aux domaines Δ et Δ' ; donc, ou bien Δ est intérieur à D_2 et Δ' extérieur à D_2 , ou bien Δ est extérieur à D_2 et Δ' intérieur à D_2 . Ce sont bien les deux seules hypothèses possibles, car le domaine $\Delta + \Delta'$, contenant A et tous les points voisins de A , contient des points intérieurs à D_2 et des points extérieurs à ce domaine. Lorsque Δ est intérieur à D_2 , nous dirons qu'en A , D_1 et D_2 sont du même côté de α . Lorsque Δ est exté-

rieur à D_2 , nous dirons qu'en A , D_1 et D_2 sont de côtés différents de α . Ces définitions sont légitimes, car elles ne dépendent évidemment pas du choix de Γ , a , b , C , C' .

Ceci posé, la considération de Δ et Δ' donne, non seulement la position respective de D_1 et D_2 en A , mais pour tous les points de l'arc α qui sont compris entre a et b . Ceci revient à dire que si D_1 et D_2 sont d'un même côté de α en un point, ils sont du même côté de α en tous ses points, les extrémités étant exclues de nos considérations. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que D_1 et D_2 sont du même côté de α ; dans le cas contraire on dit qu'ils sont de côtés différents. Nous avons ainsi précisé ce que l'on doit entendre par les deux côtés de α .

Soit un arc de courbe $\alpha\beta$, sans point multiple et non quarrable faisant partie de la frontière d'un domaine Δ . Soit maintenant un domaine quelconque D limité par une courbe C . C peut contenir des arcs non quarrables superposables à certains arcs de $\alpha\beta$.

Si A est un tel arc et si, lorsque l'on effectue la superposition d'une partie non quarrable quelconque A' de A avec l'un quelconque des arcs de $\alpha\beta$ qui lui sont égaux, D et Δ sont toujours du même côté de A' , A sera dit un *arc de la première espèce*.

Si B est un arc non quarrable de C tel que, lorsque l'on effectue la superposition d'une partie non quarrable quelconque B' de B avec l'un quelconque des arcs de $\alpha\beta$ qui lui sont égaux, D et Δ sont toujours de côtés différents de B' , B sera dit un arc de la seconde espèce.

Les autres arcs de C seront de la troisième espèce.

Choisissons arbitrairement, une fois pour toutes, un nombre positif θ , inférieur à 1, et attribuons comme aire à D le nombre

$$m + \theta m(A) + (1 - \theta)m(B),$$

où m désigne la mesure superficielle des points intérieurs à D , c'est-à-dire l'étendue intérieure, au sens de M. Jordan, de D , où $m(A)$ et $m(B)$ désignent les sommes des mesures superficielles des arcs de la première et de la deuxième espèce, c'est-à-dire les sommes des étendues extérieures, au sens de M. Jordan, de ces arcs.

Il est évident que l'aire ainsi construite satisfait bien aux conditions que nous nous sommes imposées.

Dans le Paragraphe 14 de ma Thèse, j'établissais la classification des arcs de C en laissant D et Δ immobiles, là est l'erreur que je signalais au début, car alors à deux domaines superposables pourraient correspondre des aires différentes. Cette erreur rectifiée, je dois montrer qu'on peut choisir $\alpha\beta$ de façon qu'il existe effectivement des arcs des deux premières espèces, sans quoi l'aire construite ne dépendrait pas de θ . L'existence de tels arcs n'est, avec la nouvelle classification, nullement évidente; il n'existerait que des arcs de la troisième espèce si l'arc $\alpha\beta$ avait un centre situé sur lui.

La classification des arcs en trois espèces s'applique au domaine Δ lui-même et à l'arc $\alpha\beta$; seulement aucun arc de $\alpha\beta$ n'est de la seconde espèce. La courbe que je vais construire, en modifiant légèrement la méthode qu'emploie M. Hilbert ⁽¹⁾ pour obtenir une courbe passant par tous les points d'un carré, est telle que tout arc non quarrable de cette courbe est de la première espèce.

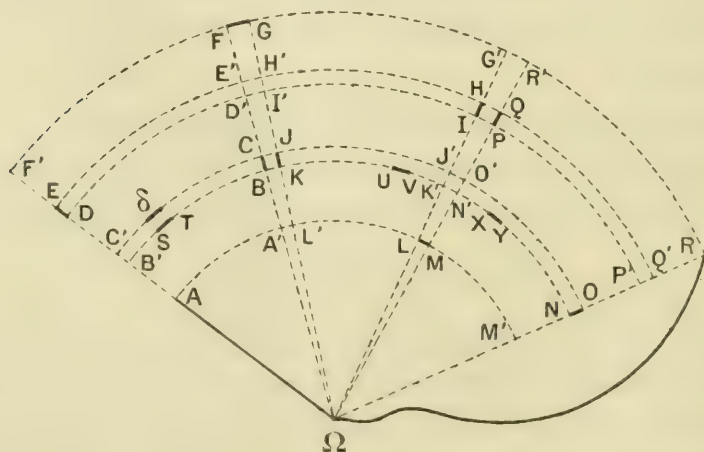
La courbe sera donnée par les formules

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

où f et φ sont des fonctions continues quand t varie de 0 à 1.

Traçons (*fig. 1*) les droites $\Omega AF'$, $\Omega M'R$ et les deux arcs de

Fig. 1.



cercle de centre Ω , AM' , $F'R$. Pour $t = 0$ le point x, y est en A,

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, Bd. 38, ou E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. I.

pour $t = 1$ il est en R, pour t compris entre 0 et 1 il est dans le domaine AF'RM'.

Marquons entre 0 et 1 les valeurs de t de la forme $\frac{p}{9} \pm \varepsilon$, où p est entier; traçons les rayons ΩF , ΩG , $\Omega G'$, $\Omega R'$ et les arcs B'N, C'O, DP', EQ' tels que

$$\begin{aligned} F'F &= GG' = R'R, & AB' &= C'D = EF', \\ FG &= G'R' = B'C' = DE = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour les valeurs $\frac{1}{9} - \varepsilon$, $\frac{1}{9} + \varepsilon$, $\frac{2}{9} - \varepsilon$, ..., $\frac{8}{9} + \varepsilon$, le point x, y occupe les positions B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q. Quand t varie de $\frac{p}{9} - \varepsilon$ à $\frac{p}{9} + \varepsilon$, le point x, y décrit la droite issue de Ω , ou l'arc de cercle de centre Ω qui joint les deux points correspondant aux valeurs $\frac{p}{9} - \varepsilon$, $\frac{p}{9} + \varepsilon$. Enfin, quand t varie de $\frac{p}{9} + \varepsilon$ à $\frac{p+1}{9} - \varepsilon$, le point x, y reste dans celui des domaines, tel que AA'BB', dont deux sommets opposés sont les points correspondant à $t = \frac{p}{9} + \varepsilon$ et $t = \frac{p+1}{9} - \varepsilon$.

Nous pouvons ainsi supposer entièrement définies les fonctions f et φ dans les intervalles $\left(\frac{p}{9} - \varepsilon, \frac{p}{9} + \varepsilon\right)$; pour les définir dans les intervalles $\left(\frac{p}{9} + \varepsilon, \frac{p+1}{9} - \varepsilon\right)$, nous opérons sur chacun de ces intervalles comme sur $(0, 1)$, et sur chacun des domaines, tels que AA'BB', comme sur AF'RM', en remplaçant ε par une quantité plus petite ε_1 , assez petite pour que les opérations soient possibles. Après cette opération, il restera 9^2 intervalles dans lesquels f et φ ne sont pas définies; on répétera sur eux les mêmes opérations en remplaçant ε par ε_2 . Si les ε sont choisis assez décroissants, on ne sera jamais arrêté dans ces opérations et l'on définira f et φ pour un ensemble de valeurs de t partout dense dans $(0, 1)$; ce qui suffit pour les déterminer entièrement puisque f et φ sont continues.

La courbe AR ainsi définie est celle qui va jouer le rôle de $\alpha\beta$; cette courbe est en effet non quarrable, si les ε tendent assez vite vers zéro. L'étendue extérieure de la courbe est la limite vers laquelle tendent les nombres décroissants $A, A_1, A_2, \dots$ qui

représentent respectivement l'aire, au sens ordinaire du mot, de $\Delta F'RM'$; la somme des aires des g domaines tels que $\Delta A'BB'$; la somme des aires des g^2 domaines correspondant à ε_2 ; etc. Or on a

$$\begin{aligned} \Lambda - \Lambda_1 &< 2 \quad (\Delta F' + F'R)\varepsilon, \\ \Lambda_1 - \Lambda_2 &< 2.3 \quad (\Delta F' + F'R)\varepsilon_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \Lambda_p - \Lambda_{p+1} &< 2.3^p (\Delta F' + F'R)\varepsilon_p. \end{aligned}$$

On peut choisir les ε de façon que la série

$$2(\Delta F' + F'R) \sum \varepsilon_p 3^p$$

ait une somme aussi petite qu'on le veut, c'est-à-dire de façon que la limite des Λ_i ne soit pas nulle et la courbe AR n'est pas quarrable.

Le domaine Δ est limité par la courbe AR , la droite ΩA et une courbe ΩR telle que le secteur $\Omega AM'$ soit intérieur à Δ . Alors on distinguera les deux côtés de AR en disant que Δ est du côté intérieur de AR .

Considérons un arc γ non quarrable de la courbe obtenue; cet arc ne se réduisant pas à une droite contient des arcs de cercle. Supposons par exemple qu'il contienne l'arc ST , relatif à ε_2 , que l'on obtient pour t variant de $\frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) - \varepsilon_1$ à $\frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) + \varepsilon_1$. AR ne contient que deux arcs égaux à ST , les arcs UV , XY , correspondant aux intervalles

$$\begin{aligned} &\left[2\frac{P}{3} - \varepsilon - \frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) - \varepsilon_1, 2\frac{P}{3} - \varepsilon - \frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) + \varepsilon_1 \right], \\ &\left[\frac{2P}{3} + \varepsilon + \frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) - \varepsilon_1, \frac{2P}{3} + \varepsilon + \frac{1}{3} \left(\frac{P}{9} - \varepsilon \right) + \varepsilon_1 \right]. \end{aligned}$$

De là résulte que γ est superposable au plus de cinq manières différentes avec des arcs de AR ; dans les cinq déplacements correspondants ST prendra les positions TS , UV , VU , XY , YX .

Les cinq déplacements dont il s'agit sont donc, soit des rotations autour de Ω , soit des symétries par rapport à des droites issues de Ω , lesquelles droites sont des bissectrices d'angles tels que $\angle F\Omega G$, $\angle \Omega T$. Or il est évident que dans ces opérations le côté intérieur

de γ vient coïncider avec le côté intérieur de AR. Cela suffit pour qu'on puisse affirmer que tout arc non quarrable de AR est de la première espèce.

Ce résultat est plus évident encore si l'on modifie quelque peu la construction de AR. La courbe AR étant construite ainsi qu'il vient d'être dit, remplaçons chaque arc de cercle δ faisant partie de cette courbe et tournant sa concavité vers l'extérieur par l'arc δ' symétrique de δ par rapport à la droite joignant les extrémités de δ . La nouvelle courbe AR ainsi construite sera sans point double; elle aura même étendue extérieure que la précédente, donc sera non quarrable. Si pour cette courbe on définit comme précédemment le côté intérieur, tout arc non quarrable de AR sera de la première espèce, car tous les arcs de cercle faisant partie de AR ont leur concavité vers l'intérieur.

Qu'il s'agisse de l'une ou de l'autre des deux courbes AR, on peut remarquer que tout arc non quarrable de AR est de la première espèce quand on effectue la classification des arcs en trois espèces en tenant compte, non seulement des superpositions d'arcs de C et de $\alpha\beta$, c'est-à-dire de AR, qui s'obtiennent par des déplacements de C, mais aussi des superpositions que l'on obtient en effectuant sur C une transformation par figure semblable quelconque. Avec cette nouvelle manière de classer les arcs, et avec les courbes AR construites, le nombre que nous avons appelé *aire* dépend effectivement de θ ; il satisfait bien aux deux conditions du problème des aires et de plus est tel que, si deux domaines sont semblables, le rapport de similitude étant K, leurs aires sont dans le rapport K^2 . Cette dernière condition n'était pas réalisée avec la première classification des arcs.

**SUR LES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE $\tan x$, $\sec x$
ET D'AUTRES FONCTIONS.**

LEUR EXPRESSION A L'AIDE D'UN DÉTERMINANT UNIQUE;

Par M. E. ESTANAVE.

Dans une précédente Communication (1) j'ai montré que la

(1) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXX, p. 220.

considération des nombres Λ_n imaginés par M. Désiré André dans un Mémoire sur les permutations alternées (*Journal de Liouville*, 1881, p. 167) pouvait, avec avantage, être substituée à la considération d'autres séries de nombres, tels que les nombres d'Euler, de Bernoulli, de Genocchi, etc., qui apparaissent dans les développements en séries de $\text{tang } x$, de $\text{séc } x$ et aussi dans la sommation de suites numériques importantes. Ces derniers nombres forment, en effet, des suites assez disparates, les unes formées de nombres entiers, les autres de nombres fractionnaires, tandis que les nombres A forment une suite de nombres entiers qui ont une signification combinatoire simple et par suite une existence indépendante des développements dans lesquels ils entrent comme coefficients.

Rappelons que, à l'aide de ces nombres A , les développements de $\text{tang } x$ et de $\text{séc } x$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\text{tang } x &= A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \dots + A_{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \dots, \\ \text{séc } x &= A_0 + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + \dots + A_{2p} \frac{x^{2p}}{2p!} + \dots\end{aligned}$$

Si nous comparons ces développements à ceux déjà établis à l'aide des nombres de Bernoulli (B) et des nombres d'Euler (E), nous voyons que ces nombres sont liés aux nombres A par les relations

$$(1) \quad A_{2p-1} = \frac{2^{2p}(2^{2p}-1)}{2p} B_p, \quad A_{2p} = E_p.$$

Ayant déjà montré que les suites des nombres B_p , E_p peuvent être remplacées par une suite unique de nombres entiers A_n , pour lesquels j'ai indiqué un caractère remarquable de périodicité du chiffre des unités, je me suis proposé ici de donner une représentation par les déterminants de ces nombres A . Il s'ensuivra que les nombres B_p , E_p dont on a des représentations indépendantes diverses, que je signale ci-dessous, trouveront une représentation unique dans l'expression de A_n , grâce aux relations (1) qui lient ces nombres aux nombres A_n .

Or les nombres d'Euler, de Bernoulli ont été exprimés par divers auteurs, MM. Glaisher, Haussner, etc., à l'aide de déterminants. Bien que la dépendance de ces nombres ait été démon-

trée, on a donné de ces nombres une représentation indépendante.

Ainsi les nombres de Bernoulli ont été exprimés par les déterminants

$$B_p = (-1)^{p+1} 2p! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2! & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3! & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 4! & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2p+1)!} & \frac{1}{2p!} & \frac{1}{(2p-1)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

où B_p est exprimé à l'aide d'un déterminant d'ordre $2p$,

$$B_p = \frac{2p(-1)^{p-1}}{2^{2p}(2^{2p}-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ C_3^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ C_5^1 & C_5^3 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{2p-3}^1 & C_{2p-3}^3 & C_{2p-3}^5 & \dots & 1 & 1 \\ C_{2p-1}^1 & C_{2p-1}^3 & C_{2p-1}^5 & \dots & C_{2p-1}^{2p-3} & 1 \end{vmatrix},$$

qui est un déterminant d'ordre p .

J'avais indiqué aussi la représentation suivante pour B_p

$$B_p = \frac{(-1)^{p+2} 2p!}{2(2^{2p-1}-1)} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3!} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} & \dots & \dots & \dots & \frac{(-1)^{2p+1}}{3!} \end{vmatrix}.$$

De même des nombres d'Euler on a diverses représentations à l'aide de déterminants

$$E_p = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_4^2 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ C_6^2 & -C_6^4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{2p}^2 & -C_{2p}^4 & C_{2p}^6 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

k étant le plus grand entier contenu dans $\frac{p}{2}$, expression de E_p

sous forme d'un déterminant d'ordre p , que l'on obtient en partant de la formule de récurrence qui définit E_p . Ou encore la forme que j'ai indiquée

$$E_p = 2^{2p} 2p! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2^4, 3!} \\ \frac{1}{5!} & -\frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{2^4, 5!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} & \dots & \dots & \dots & \frac{(-1)^{p+2}}{2^{2p}(2p+1)!} \end{vmatrix}.$$

E_p est ainsi exprimé à l'aide d'un déterminant d'ordre $p+1$ qu'il serait facile de réduire à un déterminant d'ordre p en retranchant les éléments de la première et de la dernière colonne.

De la comparaison de ces diverses expressions, on peut déduire des identités entre déterminants, qu'il pourrait être malaisé d'établir directement.

Pour avoir une représentation unique pour les nombres A_n , considérons la relation suivante indiquée par M. D. André

$$2 C_n^{n-1} A_1 + (-1)^{n-1} 2^2 C_n^{n-2} A_2 - 2^3 C_n^{n-3} A_3 + (-1)^{n-2} 2^4 C_n^{n-4} A_4 + \dots \\ + (-1)^{n-p} 2^{2p} C_n^{n-2p} A_{2p} + (-1)^p 2^{2p+1} C_n^{n-2p+1} A_{2p+1} + \dots + (-1)^h 2^n C_n^0 A_n = 1 + (-1)^n$$

h étant la partie entière de $\frac{n}{2}$, relation que nous pouvons écrire d'une manière plus condensée

$$\sum_{q=0}^{q=\frac{n-1}{2}} (-1)^q 2^{2q+1} C_n^{n-(2q+1)} A_{2q+1} \\ + \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} (-1)^{n-p} 2^{2p} C_n^{n-2p} A_{2p} = (-1)^{n+1} + 1.$$

Dans le cas où n est pair q prendra les valeurs $0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}$ et p les valeurs $1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$, et si n est impair q prendra les valeurs $0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ et p les valeurs $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Si nous donnons à n les valeurs 1, 2, 3, . . . , n , nous obtenons les n équations linéaires à n inconnues $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n$ suivantes :

$$\begin{aligned} 2C_1^0\Lambda_1 &= 2, \\ 2C_2^1\Lambda_1 - 2^2C_2^0\Lambda_2 &= 0, \\ 2C_3^2\Lambda_1 + 2^2C_3^1\Lambda_2 - 2^3C_3^0\Lambda_3 &= 2, \\ 2C_4^3\Lambda_1 - 2^2C_4^2\Lambda_2 - 2^3C_4^1\Lambda_3 + 2^4C_4^0\Lambda_4 &= 0, \\ 2C_5^4\Lambda_1 + 2^2C_5^3\Lambda_2 - 2^3C_5^2\Lambda_3 - 2^4C_5^1\Lambda_4 + 2^5C_5^0\Lambda_5 &= 2, \\ \dots\dots\dots, \\ 2C_{n-1}^{n-1}\Lambda_1 + (-1)^{n-1}2^2C_{n-2}^{n-2}\Lambda_2 - 2^3C_{n-3}^{n-3}\Lambda_3 + (-1)^{n-2}2^4C_{n-4}^{n-4}\Lambda_4 + \dots \\ + (-1)^h2^nC_n^0\Lambda_n &= 1 + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

De ces équations on tire la valeur de Λ_n

$$= \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 2C_2^1 & -2^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2C_3^2 & 2^2C_3^1 & -2^3 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 2C_4^3 & -2^2C_4^2 & -2^3C_4^1 & 2^4 & 0 & \dots & 0 \\ 2C_5^4 & 2^2C_5^3 & -2^3C_5^2 & -2^4C_5^1 & 2^5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2C_{n-1}^{n-1} & (-1)^{n-1}2^2C_{n-2}^{n-2} & -2^3C_{n-3}^{n-3} & (-1)^{n-2}2^4C_{n-4}^{n-4} & 2^5C_{n-5}^{n-5} & \dots & 1+(-1)^{n+1} \end{vmatrix},$$

qui est la représentation de Λ_n à l'aide d'un déterminant d'ordre n .

Dans cette expression k est impair toutes les fois que $\frac{n-2}{4}$ est entier et k est pair dans tous les autres cas. En sorte que le signe à prendre devant le déterminant sera le signe — ou le signe +, suivant que $\frac{n-2}{4}$ sera ou ne sera pas entier.

Cela étant, remarquons que le déterminant ci-dessus, que j'ai écrit sous cette forme transitoire, uniquement pour faciliter la lecture, se simplifie ; la première et la dernière colonnes sont divisibles par 2, la deuxième est divisible par 2^2 , la troisième par 2^3 et ainsi de suite la colonne de rang p est divisible par 2^p . Il résulte que ce déterminant est divisible par $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$.

Nous avons par suite pour Λ_n , en remarquant que $C_{n,n}^p = C_m^{m-p}$,

la représentation suivante, à l'aide d'un déterminant d'ordre n ,

$$\Lambda_n = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_2^1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_4^1 & -C_4^2 & -C_4^3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_5^1 & C_5^2 & -C_5^3 & -C_5^4 & 1 & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & . \\ C_n^1 & (-1)^{n-1} C_n^2 & -C_n^3 & (-1)^{n-2} C_n^4 & C_n^5 & \dots & \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \end{vmatrix}.$$

Comme vérification, si l'on donne à n les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ..., on trouve facilement

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = 1, \quad \Lambda_3 = 2, \quad \Lambda_4 = 5, \quad \Lambda_5 = 16, \quad \dots,$$

qui sont bien les valeurs des cinq premiers nombres de M. André.

SUR UN PROBLÈME MIXTE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. HADAMARD.

1. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, ayant la forme de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

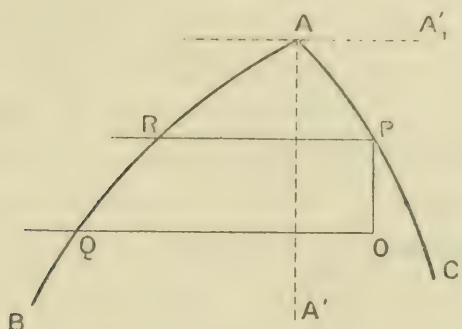
(équation qui admet pour caractéristiques les parallèles aux axes) et une ligne L.

Si celle-ci n'est coupée qu'en un point par une parallèle quelconque à l'axe des x et en un point par une parallèle à l'axe des y , une solution de l'équation (1) sera déterminée si l'on donne, en chaque point de L, les données de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de z et de ses dérivées premières.

Si, au contraire, la ligne L, tout en continuant à n'être coupée qu'en un seul point par une parallèle quelconque à l'axe des x , est composée de deux arcs BA, AC (*fig. 1*) tels que toute parallèle à l'axe des x qui rencontre l'un rencontre aussi l'autre (chacun d'eux n'étant d'ailleurs rencontré qu'en un point), le problème de Cauchy, comme l'a montré M. Picard, devient, en général, im-

possible par surabondance des données. Ainsi que je l'ai remarqué dans un article précédent ⁽¹⁾, celui qu'il convient de lui substituer est un problème *mixte*, intermédiaire entre celui de Cauchy

Fig. 1.



et celui de Dirichlet, lequel consiste à se donner :

Sur l'un des deux arcs (AB par exemple) les données de Cauchy ;

Sur l'autre arc, AC, les valeurs de z seulement.

Cette dernière série de données est d'ailleurs supposée concorder avec la première au point A, c'est-à-dire fournir, en ce point, la même valeur pour z et la même valeur pour la dérivée de z prise suivant AC.

Le problème ainsi posé est possible et déterminé ⁽²⁾, ainsi que je l'ai établi dans l'article cité. Il peut, si l'on veut, se ramener à un autre qui a été étudié par M. Picard ⁽³⁾, puis par M. Goursat ⁽⁴⁾, et dans lequel on se donne les valeurs de l'inconnue z , d'une part sur AC, d'autre part sur une caractéristique issue de A, en l'espèce, la parallèle AA' à l'axe des y .

⁽¹⁾ Sur l'intégrale résiduelle, ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 81 et suiv.

⁽²⁾ Il est intéressant de rapprocher ce résultat de celui auquel est parvenu récemment M. Goursat (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 juin 1903) relativement au cas où les lignes AB et AC sont dans un même angle formé par les caractéristiques issues de A ; on détermine alors une solution en se donnant uniquement les valeurs de z sur AB et sur AC. Au contraire, si AB et AC sont dans deux angles adjacents, le problème ainsi posé est indéterminé, comme l'observe M. Goursat. Notre remarque de 1900 consiste en ce qu'on le détermine en adjoignant aux données précédentes les dérivées premières de z sur AB. Enfin, si les deux segments de L sont dans deux angles opposés, les données à prendre seront, bien entendu, celles de Cauchy sur chacun d'eux.

⁽³⁾ In DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, note 1.

⁽⁴⁾ *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 303-308.

Le problème mixte (et non le problème de Cauchy) est celui qui intervient dans la plupart des questions dynamiques, dès qu'on abandonne le cas tout théorique d'un milieu indéfini en tous sens pour passer à celui d'un milieu limité. C'est à lui qu'on est conduit, en particulier, dans la théorie de la propagation de l'électricité le long d'un câble *limité au moins dans un sens*. Aussi les recherches sur cette théorie poursuivies, cette année, par M. Brillouin, dans son cours au Collège de France, m'ont-elles engagé à reprendre l'étude du problème mixte et à en chercher une solution analogue à celle qui résulte, pour le problème de Dirichlet, de la considération de la fonction de Green et, pour le problème de Cauchy relatif à l'équation (1), de la méthode de Riemann. C'est cette solution que je vais exposer : appliquée à l'équation des télégraphistes, elle conduit, bien entendu, aux résultats que M. Brillouin a obtenus par des calculs directs (1). Elle permet même, comme nous le verrons, de simplifier la solution de M. Brillouin.

2. La formule que nous appliquerons sera toujours la formule fondamentale employée dans la méthode de Riemann (2) et que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(2) \quad \int \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{dz}{ds} - z \frac{du}{ds} \right) ds + uz(b dx - a dy) \right] = 0,$$

dans laquelle

z est une solution régulière quelconque de l'équation proposée (1);

u , une solution régulière de l'équation adjointe;

s , l'arc de la ligne d'intégration, laquelle est supposée fermée;

ν , la direction *conormale* (3) à cette ligne, direction qui n'est autre que la symétrique, par rapport aux axes, de celle de la tangente, et qui est définie par les relations

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{ds}.$$

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 mars 1903.

(2) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, § 358, p. 75.

(3) D'ADHÉMAR, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 février 1901.

Soit alors $O(x', y')$ un point situé entre les lignes AB, AC et où l'on veut calculer la valeur de z . Menons par ce point la caractéristique $x = \text{const.}$; nous considérerons uniquement le cas où cette caractéristique coupe [en un point $P(x', y_1)$] l'arc AC et non l'arc AB , le problème pouvant être considéré comme résolu (par la méthode de Riemann) dans le cas contraire. Par les points O, P menons les caractéristiques $y = \text{const.}$, qui coupent l'arc AB aux points Q, R respectivement.

Soit, d'autre part, $U(x, y; x', y')$ une fonction de x, y définie par les propriétés suivantes :

1° Entre les parallèles OQ, PR , elle se réduit à la fonction de Riemann $u(x, y; x', y')$ (1);

2° Au delà de PR , elle satisfait encore à l'équation adjointe, et se réduit, sur PR , à $u - u_P e^{\int_{x'}^x b dx}$, où

$$(3) \quad u_P = u(x', y_1; x', y') = e^{-\int_{y_1}^{y'} a(x', y) dy};$$

3° Sur l'arc AP elle est nulle.

Cette fonction est, comme on le voit, discontinue sur PR . Les conditions 2° et 3° (qui concordent au point P , grâce au choix du facteur u_P) la définissent dans toute la portion du plan comprise entre PR et la parallèle à cette droite menée par le point A .

De même que la recherche de la fonction de Green est un cas particulier du problème de Dirichlet, la détermination de U , à l'aide des deux conditions précédentes, est évidemment un cas particulier du problème mixte (ou, plus exactement, du problème équivalent de MM. Picard et Goursat, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure), l'équation (1) étant remplacée par son adjointe et la caractéristique AA' , parallèle à l'axe des y , étant remplacée [comme nous le faisait prévoir une première solution théorique obtenue précédemment (2)] par la caractéristique PR , parallèle à l'axe des x . Quant à l'arc AP , il est le même dans les deux cas, de sorte que, comme nous devons également nous y

(1) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 78.

(2) *Sur l'intégrale résiduelle*, n° 9, p. 83.

attendre ⁽¹⁾, la solution dépend essentiellement de la forme de cet arc.

Appliquons successivement la formule (2), où nous remplacerons u par U , au quadrilatère mixtiligne OPRQO, puis au triangle mixtiligne PARP, et ajoutons les résultats obtenus. L'intégrale prise le long de OP est, comme on sait ⁽²⁾, égale à $\frac{1}{2}[z_0 - (uz)_P]$, et celle qui est prise le long de QO, à $\frac{1}{2}[z_0 - (uz)_Q]$. De plus, une réduction toute semblable s'appliquera à l'ensemble des deux intégrales prises le long de PR. En effet, celles-ci, comme les premières, ne dépendent que des valeurs de z et de u sur PR même, puisque PR est caractéristique, de sorte que toute la partie de U qui est continue sur cette ligne s'éliminera dans l'addition et que la variation brusque $[U]$ de U interviendra seule. Or cette variation vérifie, le long de PR, l'équation différentielle

$$\frac{d[U]}{dx} - b[U] = 0,$$

analogue à celle par laquelle sont déterminées les valeurs de u sur OQ. Donc la somme des deux intégrales prises le long de PR

se réduit à $\frac{1}{2}u_P \left(z_R e^{\int_P^R b dx} - z_P \right)$.

Considérons enfin les termes relatifs à AR, RQ et AP. Les deux premiers ne dépendent que des données de Cauchy sur AB et sont entièrement connus. Enfin il en est de même du dernier, puisque, grâce à la troisième condition imposée à U , il ne contient pas $\frac{dz}{dy}$.

On obtient donc la solution du problème par la formule

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2}(uz)_Q + (uz)_P - \frac{1}{2}u_P e^{\int_P^R b dx} z_R \\ &- \int_A^Q \left[\frac{1}{2} \left(U \frac{dz}{dy} - z \frac{dU}{dy} \right) ds + U z (b dx - a dy) \right] - \int_A^P \frac{1}{2} z \frac{dU}{dy} ds. \end{aligned} \right.$$

3. L'intégrale prise de A à Q est, en réalité, la somme de deux

⁽¹⁾ *Ibid.*, n° 10, p. 84.

⁽²⁾ DARBOUX, *loc. cit.*

autres de nature différente, puisque la fonction U n'a pas la même forme lorsqu'on la considère le long de l'arc AR ou le long de l'arc RQ . Les coefficients de z et de $\frac{dz}{dy}$ sont même tous deux discontinus au point R . Cette discontinuité n'a rien qui doive nous surprendre. Si, en effet, on applique la méthode précédente à un problème physique quelconque, par exemple si l'on part de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

qui définit les mouvements des cordes vibrantes ou les mouvements rectilignes infiniment petits d'un gaz, la ligne AC correspondra aux conditions à l'extrémité; la ligne AB à l'état initial; l'arc QB de cette ligne (*fig. 1*) représentera la partie de l'état initial qui ne peut influer au lieu et à l'instant représentés par le point O ; l'arc QR , la partie qui, dans les mêmes conditions, influe uniquement par ses ondes directes; l'arc RA , la partie qui agit à la fois par ondes directes et par ondes réfléchies à l'extrémité. La discontinuité dont nous avons parlé plus haut ne représente donc autre chose que le phénomène de la réflexion.

4. Si, au lieu des données de Cauchy sur AB , on donnait les valeurs de z sur AA' , il suffirait de placer les points Q et R sur cette droite; la formule (4) deviendrait (en transformant, à l'aide d'une intégration par parties, le terme $\int U \frac{dz}{dy} ds = - \int U \frac{\partial z}{\partial y} dy$)

$$z_0 = (uz)_P + (uz)_Q - u_P e^{\int_a^R b dx} z_R - \int_A^Q z dy \left(\frac{\partial U}{\partial y} - a U \right) - \int_A^P \frac{1}{2} z \frac{dU}{dy} ds.$$

5. Notre fonction U présente une propriété de symétrie analogue à celle que possède la fonction de Riemann.

Autrement dit, si, en même temps que le point O qui sert à former la fonction U (en menant la parallèle OP à l'axe des y et la parallèle PR à l'axe des x), nous considérons un second point O' (*fig. 2, 2 bis*), par lequel nous menons la parallèle $O'P'$ à l'axe des x , pour mener par P' la parallèle $P'R'$ à l'axe des y (les demi-droites $P'O'$, $P'R'$ étant du même côté de la ligne AC), et si nous

définissons une fonction Z des coordonnées d'un point M par les conditions suivantes :

1° Pour les positions du point M , situées du même côté de $P'R$ que le point O' , Z coïncidera avec la fonction de Riemann z rela-

Fig. 2.

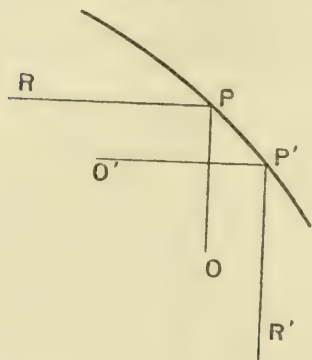
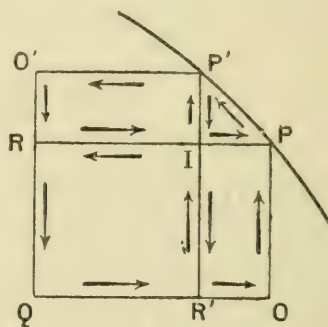


Fig. 2 bis.



tive aux points O' et M [solution de l'équation (1), lorsqu'on la considère comme fonction des coordonnées de M];

2° Pour les positions de M situées au delà de $P'R'$, mais en deçà de la ligne AC , Z sera également une solution de l'équation (1),

prenant sur $P'R'$ les valeurs $z - z_{P'} e^{\int_{P'}^M ady}$ ($z_{P'}$ étant la valeur de z au point P') et sur l'arc $P'C$ la valeur zéro. La valeur de Z au point O sera égale à la valeur de U au point O' .

Dans le cas où le point O' est du même côté de PR que le point O (fig. 2) et où, par conséquent, la fonction U coïncide avec la fonction de Riemann u , nous pouvons considérer cette proposition comme déjà démontrée, du moment que la fonction Z_0 coïncide, elle aussi, avec z_0 , c'est-à-dire que le point O est du même côté que O' par rapport à $P'R'$: et c'est ce qui a manifestement lieu, car ce fait et celui duquel nous sommes partis (O et O' situés du même côté par rapport à PR) reviennent tous deux à dire que le point d'intersection de OP , $O'P'$ est du même côté de la ligne AC que les points O , O' eux-mêmes.

Lorsque, au contraire, les lignes OP , $O'P'$ ne se coupent pas entre elles avant de rencontrer AC (fig. 2 bis) (1), on peut établir

(1) En ce qui concerne la position relative des points O et O' , il y a, géométriquement parlant, d'autres cas de figure à considérer que ceux qui sont représentés par les figures 2 et 2 bis, mais ceux-ci sont les seuls qui interviennent dans l'étude du problème mixte.

l'égalité $Z_0 = U_0$, en montrant que la fonction U_0 , considérée comme fonction du point O, vérifie toutes les conditions qui caractérisent Z. Mais on peut aussi, ce qui revient au même en somme, employer encore la formule fondamentale (2). Soient, à cet effet, OQ une parallèle menée par O à l'axe des x , O'Q une parallèle menée par O' à l'axe des y ; R, R' les points d'intersection de PR, P'R' avec O'Q, OQ respectivement; I, le point d'intersection de PR, P'R'.

On intégrera le long des trois rectangles OPIR', R'IRQ, IP'O'R et du triangle mixtiligne IPP'. Si l'on tient compte de la valeur des discontinuités éprouvées par les fonctions Z, U le long des lignes PR, P'R', on verra aisément que l'équation qui résulte des quatre formules ainsi obtenues se réduit à l'égalité annoncée.

6. Considérons l'équation des télégraphistes, réduite à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z = 0;$$

l'étude de la propagation de l'électricité dans un fil indéfini dans un sens ⁽¹⁾ conduit à la détermination d'une solution de cette équation par les données suivantes :

1° Valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, $\xi \geq 0$;

2° Valeurs de z pour $\xi = 0$, $t \geq 0$.

Autrement dit, ramenant l'équation à la forme de Laplace

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z = 0$$

par le changement de variables

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = y - x, \\ t = y + x, \end{cases}$$

(¹) On sait que le cas du fil limité dans les deux sens ne présente aucune difficulté essentielle nouvelle, toute la question étant de tenir compte des réflexions successives dont chacune peut se calculer par les formules du texte. On devra diviser le plan des ξt (ou du moins la portion de ce plan définie par $t \geq 0$, $0 \leq \xi \leq l$, où l est la longueur du câble) en régions en forme de triangles ou de losanges, telles qu'elles sont figurées dans mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (fig. 10, p. 148), les formules étant différentes pour chacune de ces régions.

nous sommes ramenés au problème qui vient d'être étudié, la ligne AB ayant pour équations

$$(7) \quad t = y + x = 0, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0$$

et la ligne AC

$$(8) \quad \xi = x - y = 0, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0.$$

La fonction de Riemann, u , symétrique, ici, par rapport aux deux points (x, y) , (x', y') dont elle dépend, puisque l'équation est identique à son adjointe, a, comme on sait, la forme

$$(9) \quad u = j[(x - x')(y - y')],$$

où la fonction j n'est autre, au changement près de l'argument en son carré, que la fonction de Bessel d'indice zéro :

$$(10) \quad j(X) = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{(2!)^2} + \dots + \frac{X^n}{(n!)^2} + \dots$$

7. La forme de la fonction u suggère immédiatement un premier mode de solution du problème mixte, lorsque la ligne AC est représentée par l'équation (8) (ou, plus généralement, par l'équation $x - y = \text{const}$).

Si, en effet, on prend pour (x, y) un point de la droite AC et, pour le point (x', y') , successivement deux points Q, Q_1 symétriques l'un de l'autre par rapport à cette ligne, la fonction u aura évidemment la même valeur dans les deux cas.

Supposons, dès lors, qu'on se donne les valeurs de l'inconnue z sur AC et aussi sur la caractéristique AA' , parallèle à l'axe des y . Il sera aisé de calculer z en tout point de l'autre caractéristique AA_1 menée par le point A et qui est l'image de la première par rapport à AC. Soient, en effet, Q un point de AA' , Q_1 l'image de Q par rapport à AC, c'est-à-dire un point de AA_1 ; P, le quatrième sommet (situé sur AC) du carré AQQ_1P .

Il suffit d'ajouter l'une à l'autre les deux formules

$$(11) \quad \begin{cases} z_Q = \frac{1}{2}(z_A + z_P) - \frac{1}{2} \int_{AP} \left(u_Q^M \frac{dz}{dy} - z \frac{du_Q^M}{dy} \right) ds, \\ z_{Q_1} = \frac{1}{2}(z_A + z_P) - \frac{1}{2} \int_{AP} \left(u_{Q_1}^M \frac{dz}{dy} - z \frac{du_{Q_1}^M}{dy} \right) ds, \end{cases}$$

qui expriment ⁽¹⁾ z_0 et z_{0_1} en fonction des valeurs de z et de ses dérivées sur AC, pour éliminer la dérivée conormale de z .

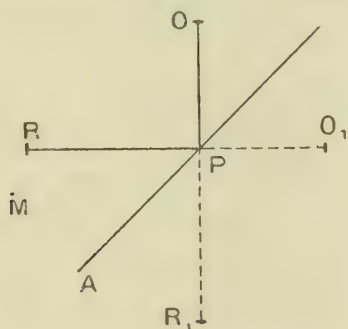
Connaissant les valeurs de cette quantité sur AA' et sur AA'_1, on pourra la déterminer dans tout l'angle de ces deux droites par une formule connue ⁽²⁾.

Rien n'empêcherait d'ailleurs d'appliquer ce mode de calcul à la fonction U, qui est nulle sur AC et dont on connaît les valeurs sur la droite nommée plus haut PR. Sur la droite PR_1, prolongement de OP, les formules (11) donneront simplement $U_{R_1} = -U_R$ (pour $PR_1 = PR$), et la formule dont nous venons de parler fera connaître les valeurs cherchées par une quadrature; ce seront ces valeurs qu'il conviendra de reporter dans la formule (4).

Que l'on emploie l'un ou l'autre de ces deux procédés, on voit qu'on serait conduit, pour le calcul de z_0 , à deux quadratures superposées. On retomberait ainsi sur des résultats semblables à ceux qu'a obtenus M. Brillouin, dans le travail cité.

8. La fonction U ne joue qu'un rôle secondaire dans le calcul

Fig. 3.



qui précède, puisqu'il peut être opéré sans son intervention. C'est elle, au contraire, qui va nous permettre d'en simplifier le résultat et de montrer que le coefficient de z ou de $\frac{dz}{dv}$, dans chacun des termes qui figurent sous le signe $\int$ au second membre de la for-

⁽¹⁾ DARBOUX, *loc. cit.* Le changement du signe de l'intégrale définie lorsqu'on passe de la première formule (11) à la seconde correspond évidemment au changement de rôle qui se fait entre les points A et P, lorsqu'on passe du point Q au point Q_1.

⁽²⁾ DARBOUX, *ibid.*, n° 359.

mule (4), peut s'exprimer explicitement sans nouvelle quadrature.

Soit, en effet, $O_1(x, y)$ l'image du point O par rapport à AC (fig. 3), c'est-à-dire un point obtenu en portant sur la droite RP, prolongée au delà du point P, une longueur PO_1 égale à PO.

Considérons la fonction

$$(12) \quad u_0^M - u_{0_1}^M.$$

Nous avons déjà utilisé, il y a un instant, deux propriétés de cette fonction : celle de satisfaire à l'équation et celle de s'annuler sur AC.

Mais il est également évident, d'après sa forme même, que cette fonction possède la troisième propriété caractéristique de la fonction U, celle qui est relative aux valeurs sur PR. Sur cette dernière droite, en effet, le terme $u_{0_1}^M$ se réduit à l'unité, et, d'autre part, cette valeur est aussi celle que prend la discontinuité

$u_P e^{\int_{x_1}^x b \, dx}$ de la fonction U.

Donc l'expression (12) représente la fonction U cherchée.

La formule (4) peut, par conséquent, s'écrire immédiatement. Les dérivées normales qui interviennent dans cette formule seront prises par rapport à t sur AB et par rapport à ξ sur AC; sur cette dernière droite, d'ailleurs, la dérivée conormale du second terme de l'expression (12) vient doubler celle du premier.

Dès lors, si l'on désigne par j et j_1 les valeurs que prend la fonction j lorsqu'on y remplace l'argument X successivement par les expressions

$$\frac{1}{4} [(t - t')^2 - (\xi - \xi')^2], \quad \frac{1}{4} [(t - t')^2 - (\xi + \xi')^2];$$

par j' et j'_1 les valeurs que prend, dans les mêmes conditions, la dérivée $j'(X)$, on aura

$$\begin{aligned} z(\xi', t') = z_P + \frac{1}{2} (z_Q - z_R) + \frac{1}{2} \int_0^r \left[(j - j_1) \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{t'}{2} z(j' - j'_1) \right] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_r^q \left(j \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{t'}{2} z j' \right) d\xi + \frac{1}{2} \xi' \int_0^r z j' \, dt, \end{aligned}$$

où q, r sont les abscisses des points Q, R, savoir

$$q = t' + \xi', \quad r = t' - \xi',$$

et $p = r = t' - \xi'$ la valeur de t correspondant au point P.

9. Il est intéressant de comparer le calcul tel que nous venons de le faire avec celui qui s'était présenté à nous tout d'abord (n° 7). En particulier, nous avons indiqué le moyen de former (moyennant une quadrature) la fonction U.

Égalons l'expression ainsi obtenue à l'expression (12); il est aisé de voir que nous obtiendrons l'identité suivante, relative à la fonction j :

$$\int_0^c j[a(c-t)] \cdot b j'(bt) dt = j(ac + bc) - j(ac),$$

ou, si l'on veut,

$$(13) \quad \int_{t=0}^{t=1} j[a(1-t)] d[j(bt)] = j(a+b) - j(a),$$

en faisant $c = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité.

Autrement dit, si nous faisons correspondre, à un point quelconque (X, Y) du plan, un second point de coordonnées $j(X)$, $j(Y)$, et que le premier point décrive le triangle rectangle dont les côtés, dirigés suivant les axes de coordonnées, ont pour longueurs a et b , le second point décrira une figure dont l'aire sera $j(a+b) - j(a) - j(b) + j(0)$.

On démontre directement sans difficulté l'identité (13) en remplaçant la fonction j par son développement en série (9) et utilisant la valeur connue de l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^p t^{q-1} dt$.

D'autre part, cette identité est caractéristique de la fonction j et pourrait, par conséquent, servir à définir la fonction de Bessel [à un facteur constant près figurant dans l'argument, et qui sera déterminé si l'on adjoint la condition $j'(0) = 1$]; il suffit, en effet (du moins si l'on suppose la fonction continue ainsi que sa dérivée), de faire $b = 0$ après avoir divisé par t pour retomber sur l'équation linéaire à laquelle satisfait j .

10. On peut se demander s'il existe une relation du même genre

entre les fonctions de Bessel d'indice non nul. C'est ce qui a lieu, en effet; pour le voir, nous multiplierons une telle fonction par une puissance de la variable et nous la considérerons sous la forme

$$j_p(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^{p+m}}{\Gamma(m+1) \Gamma(p+m+1)}.$$

La fonction ainsi écrite est liée à la fonction J_p , telle qu'on la considère habituellement ⁽¹⁾, par la relation

$$j_p(X) = (-X)^{\frac{p}{2}} J_p(2\sqrt{-X}).$$

Nous prendrons deux quelconques j_p, j_q des fonctions ainsi définies, les indices p, q étant toutefois positifs (ou, plus exactement, l'indice q positif ou nul et p supérieur à -1) et nous formerons l'intégrale

$$(14) \quad \int_{t=0}^{t=1} j_p[a(1-t)] d[j_q(bt)].$$

La quantité sous le signe $\int$ est une série double dont le terme général est

$$\frac{a^{p+m} b^{q+n} (1-t)^{p+m} d(t^{q+n})}{m! n! \Gamma(p+m+1) \Gamma(q+n+1)} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, +\infty).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=1} (1-t)^{p+m} d(t^{q+n}) &= (q+n) \int_0^1 (1-t)^{p+m} t^{q+n-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(p+m+1) \Gamma(q+n+1)}{\Gamma(p+q+m+n+1)}. \end{aligned}$$

Il est, dès lors, clair que l'intégrale (14) est égale à

$$\frac{a^p b^q}{(a+b)^{p+q}} j_{p+q}(a+b)$$

si q est différent de zéro, et à cette même quantité diminuée de $j_p(a)$ si q est nul.

11. Les raisonnements qui viennent d'être développés (n° 8)

(1) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'analyse*, t. III, Ch. II.

ne sont pas particuliers à l'équation d'Euler : ils reposent, au fond, sur ce seul fait que l'équation ne change pas de forme quand on y permute x et y .

Pour toute équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda z = 0,$$

où λ est symétrique en x et en y , ces raisonnements sont valables et prouvent que la fonction U a la valeur (12), lorsque la ligne AC a pour équation $x - y = 0$.

Considérons, par exemple, l'équation d'Euler, que l'on peut réduire à la forme

$$(15) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\beta(\beta - 1)}{(x - y)^2} z = 0.$$

Elle offre le genre de symétrie dont nous venons de parler relativement à la droite $x - y = 0$; seulement celle-ci est une ligne singulière, de sorte qu'il n'y a point lieu de la considérer à notre point de vue actuel.

Mais l'équation (15) présente également la même symétrie relativement à toute droite $x + y = \text{const.}$: une telle droite pourra donc être prise pour la ligne AC, et nous pourrons résoudre le problème ainsi posé.

12. L'équation (15) est celle qui régit le mouvement rectiligne d'un gaz contenu dans un tube cylindrique. Les données par lesquelles il est le plus naturel de déterminer un tel mouvement sont constituées par l'état initial du fluide et les mouvements des pistons placés aux extrémités du tube.

Ce problème est, dans le cas général, beaucoup plus difficile encore que celui dont nous venons de nous occuper. L'équation du mouvement n'est, en effet, ramenée à la forme (15) que moyennant une transformation de Legendre, de sorte que x et y sont des fonctions de la vitesse et de la densité, et l'on ignore comment cette dernière quantité varie au voisinage du piston mobile, autrement dit (¹), les données fournies par le mouvement de ce piston sont relatives à une ligne *inconnue* du plan des xy .

(¹) Voir mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, n° 180, p. 172-173.

Il est toutefois un cas où le problème rentre dans la catégorie qui vient d'être étudiée : c'est celui du *piston fixe*. Alors, pour $a = 0$, la vitesse, égale à $\frac{x+y}{2}$, est constamment nulle, et il en est de même ⁽¹⁾ de la variable z .

Par conséquent, non seulement nous sommes ramenés à notre problème mixte, mais même à *un cas dans lequel nous savons résoudre ce problème*.

Il en serait de même si la vitesse du piston était constante. On serait encore ramené au problème mixte, mais dans un cas non résolu jusqu'ici, si, au lieu de se donner le mouvement du piston, on s'imposait la condition que la pression au contact de ce piston fût égale à une constante donnée.

13. Les calculs du n° 11 conduisent évidemment à des identités analogues à celles du n° 9, mais relatives à la série hypergéométrique.

La question du problème mixte n'est pas d'ailleurs seule à les fournir. Toute expression qui représente la fonction de Riemann relative à une équation du type (1) donne lieu à de telles identités; on les obtiendra en utilisant la formule qui exprime une intégrale de l'équation en fonction de ses valeurs sur deux caractéristiques.

Soient, en effet, $O'(x', y')$; $O(x, y)$ deux points du plan; $x = x_1$, une parallèle à l'axe des y qui coupe en P, P' les parallèles à l'axe des x menées par O, O'. La quantité $u(O, O')$, lorsqu'on l'envisage comme fonction du point O', est une solution de l'équation proposée; comme telle, elle peut être considérée comme définie par ses valeurs sur les deux caractéristiques PO, PP' et calculée en O' d'après ces données : on a ainsi l'identité

$$\int_{y'}^y u(x, y; x_1, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} u(x_1, \eta; x', y') - a(x_1, \eta) u(x_1, \eta; x', y') \right] d\eta \\ = u(x, y; x', y') - u(x, y; x_1, y') e^{\int_{x'}^{x_1} b(x, y') dx}.$$

En appliquant à l'équation d'Euler et de Poisson, on trouvera,

(1) *Loc. cit.*, n° 170, p. 162-163.

pour la série hypergéométrique $F(\beta, \beta', 1, \tau)$, l'identité

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \left(1 - \frac{1-a}{1+at}\right)^{\beta'} F\left(\beta, \beta', 1, \frac{1-a}{1+at}\right) \cdot d\left[\left(1 - \frac{1-b}{1+bt}\right)^{\beta} F\left(\beta, \beta', 1, \frac{1-b}{1+bt}\right)\right] \\ = a^{\beta'} b^{\beta} F(\beta, \beta', 1, 1-ab) - a^{\beta'} F(\beta, \beta', 1, 1-a) \quad (a > 0, b > 0)$$

à laquelle on pourrait donner diverses formes en utilisant les diverses transformations que l'on peut effectuer sur la série hypergéométrique. On pourrait, par exemple, écrire

$$\int_{u=0}^{u=1} F\left[\beta, 1-\beta', 1, \left(1-\frac{1}{a}\right)u\right] \cdot dF\left[\beta', 1-\beta, 1, \left(1-\frac{1}{b}\right)(1-u)\right] \\ = b^{\beta-\beta'} F\left(\beta', 1-\beta, 1, 1-\frac{1}{ab}\right) - F\left(\beta', 1-\beta, 1, 1-\frac{1}{a}\right).$$

Il y aurait, d'ailleurs, intérêt à établir directement cette formule : on arriverait ainsi, sans doute, à la généraliser, comme nous l'avons fait au n° 10 pour la formule (13).

14. Je présenterai, en terminant, une remarque relative au problème mixte relatif à l'espace.

J'ai fait observer, dans mon article *sur l'intégrale résiduelle* (1), que le principe de Huyghens cesse de s'appliquer à l'équation du son

$$\Delta z - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

lorsque l'on considère, relativement à cette équation, le problème mixte et non le problème de Cauchy.

Il semble que, là encore, la forme du domaine joue un rôle essentiel. Si, en effet, au lieu de la sphère que j'avais envisagée dans l'article cité, on prend comme surface initiale le plan $x = 0$, sur lequel on se donnera les valeurs de z pendant que z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ seront donnés pour $t = 0$, $x \geq 0$, il est aisé de voir que le principe de Huyghens subsiste.

On peut, en effet, résoudre le problème mixte ainsi posé, en considérant l'image O_1 du point O par rapport au plan en ques-

(1) N° 15, p. 88.

tion et formant non seulement la fonction classique $u = \frac{1}{r} f(r + at)$, mais la fonction analogue dans laquelle les rayons vecteurs sont comptés à partir du point O_1 et non du point O .

Il suffira de substituer la différence de ces deux fonctions à la première d'entre elles, dans la solution de Kirchhoff, pour l'appliquer au cas actuel; et l'on constatera sans difficulté que les seules données qui interviennent dans la solution sont relatives à des multiplicités doublement (et non triplement) étendues.

**SUR L'EXISTENCE DES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME COMPLET
D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE
D'UNE SEULE FONCTION INCONNUE;**

Par M. N. SALTYKOW.

Considérons un système *complet* ⁽¹⁾ de m équations

$$(1) \quad \begin{cases} p_k = H_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n), \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

où les fonctions $H_1, H_2, \dots, H_m$ sont holomorphes dans le voisinage des valeurs zéro des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$ considérées comme des variables indépendantes. Cela étant, le théorème de Cauchy démontre *l'existence d'une intégrale z du système (1) holomorphe dans le domaine du point $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ et telle que les valeurs*

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

pour $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, deviennent identiques à

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

f étant une fonction des variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ arbitraire, mais holomorphe aux environs du point

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0,$$

(1) Cf *Journal de Mathématiques*, 1899, p. 436.

s'annulant pour ce dernier, ainsi que toutes ses dérivées du premier ordre.

La démonstration de ce théorème, qui va être exposée, est fondée sur l'introduction de la notion de *fonction majorante* du système (1).

Il est aisé de représenter le développement de l'intégrale en question par la série de Maclaurin (1),

$$z = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Notre problème revient alors à démontrer la convergence absolue et uniforme de cette dernière série.

Les fonctions $H_1, H_2, \dots, H_m$ étant développables en séries de Maclaurin aux environs des valeurs zéro des variables $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$, soient r le plus grand des modules de ces dernières et M le plus grand des modules des fonctions H_k dans le domaine considéré; désignons enfin par ρ et N les valeurs analogues relatives à la fonction f . Cela posé, les fonctions

$$(2) \quad \frac{M}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + z + p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_n}{r}},$$

$$\frac{N}{\rho} \cdot \frac{(x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n)^2}{\rho - (x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n)}$$

sont développables, dans le même domaine, en séries de Maclaurin, dont les termes sont supérieurs aux termes correspondants des séries représentant les fonctions H_k et f .

Formons ensuite le système complet

$$(3) \quad P_k = H, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

P_k désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Z par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ et H représentant la fonction

$$H = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + Z + P_{m+1} + P_{m+2} + \dots + P_n}{r}}.$$

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Paris, 1891, p. 178-179. — DELASSUS, *Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 20-21.

On voit aisément que notre problème revient à calculer une intégrale Z du système (3) holomorphe aux environs du point $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, telle que les quantités

$$Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_{m+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_n},$$

deviennent, au point $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, égales aux valeurs correspondantes de la fonction (2) et de ses dérivées premières par rapport aux mêmes variables indépendantes.

Si l'on met le système (3) sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} P_k - P_1 &= 0, & k &= 2, 3, \dots, m, \\ P_1 &= \Pi, \end{aligned}$$

l'intégrale générale des équations de la première ligne est

$$Z = F(x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n),$$

F étant une fonction arbitraire. Par conséquent, en introduisant les notations

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = x, \quad x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n = y,$$

on parvient à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre p et q d'une fonction u par rapport aux variables indépendantes x et y ,

$$(4) \quad [x + y + u + (n - m)q - r]p + Mr = 0,$$

dont il s'agit de trouver une intégrale u holomorphe aux environs du point $x = y = 0$, telle que, pour $x = 0$, la fonction u et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$ deviennent respectivement identiques à

$$\frac{N}{\rho} \cdot \frac{\gamma^2}{\rho(\rho - \gamma)}, \quad \frac{N}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\gamma^2}{\rho(\rho - \gamma)} \right].$$

Ce dernier problème a été résolu par M. Königsberger ⁽¹⁾. Le résultat requis s'obtient aisément si l'on transforme l'équation (4) en prenant p comme nouvelle variable indépendante, au lieu de x , et en introduisant, au lieu de u , la nouvelle fonction v définie par

(1) *J. Crelle*, Bd. 109, S. S. 273-277. — *Mathem. Ann.*, Bd. 42, S. 485.

l'équation

$$v = y + u - r - xp.$$

L'équation transformée devient alors linéaire,

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{(1+p)}{n-m} \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{1}{n-m} v + \frac{Mr}{(n-m)p} = 1,$$

dont l'intégrale demandée s'obtient sans difficulté.

Le seconde question que je veux aborder à présent concerne l'existence unique des intégrales définies par les conditions initiales du théorème de Cauchy. Nous allons voir (1) que, dans le domaine considéré, il n'existe point d'autres intégrales avec les mêmes conditions initiales que celles qui viennent d'être étudiées. En effet, supposons le contraire; soit z_1 une intégrale quelconque admettant les mêmes conditions initiales que l'intégrale z dont l'existence vient d'être démontrée, et distincte de cette dernière. Par conséquent, les identités suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \Pi_k \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right), \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_k} &= \Pi_k \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z_1}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z_1}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \right), \\ k &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

En les retranchant les unes des autres et posant

$$z - z_1 = u,$$

on obtient, moyennant le théorème sur les accroissements finis, m identités nouvelles

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_k u + B_k \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}} + \dots + L_k \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

$A_k, B_k, \dots, L_k$ étant des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Comme z et z_1 admettent des dérivées des deux premiers ordres, les coefficients $A_k, B_k, \dots, L_k$ admettent des déri-

(1) La démonstration qui va suivre présente la généralisation de celle de M. Picard pour les équations différentielles ordinaires (*Traité d'Analyse*, t. II, n° 14, p. 314).

vées partielles du premier ordre par rapport aux variables indépendantes.

Par conséquent, les égalités (5) ayant lieu identiquement, la fonction $z - z_1$ est une intégrale des équations (5) et ces dernières forment un système jacobien. Donc, dans le domaine considéré, l'intégrale générale du système (5) renfermant toutes ses intégrales possibles, appartenant à ce domaine, est représentée par la formule suivante

$$u = e^F \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-m}),$$

Φ étant une fonction arbitraire. Les quantités

$$ue^{-F}, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_{n-m}$$

désignent les $n - m + 1$ intégrales distinctes du système (5), la fonction F conservant une valeur finie, dans le domaine considéré, ainsi que ses dérivées du premier ordre par rapport aux variables indépendantes, et le déterminant fonctionnel

$$(6) \quad D \left(\frac{u_1, u_2, \dots, u_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n} \right) \neq 0,$$

étant distinct de zéro dans le même domaine.

D'après notre hypothèse, les quantités $u, \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ s'annulent pour les valeurs $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Donc, pour ces dernières valeurs, on a les identités

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(u_1^0, u_2^0, \dots, u_{n-m}^0) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{m+r}} \right)_0 = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n - m. \end{array} \right.$$

Moyennant l'inégalité (6), les $n - m$ dernières équations nous donnent les identités

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m.$$

Par conséquent, la fonction Φ est constante; de plus, en vertu de la première égalité (7), cette constante est nulle. Il s'ensuit que

l'intégrale z_1 est identique à z ; donc, il n'existe qu'une seule intégrale définie par les conditions initiales du théorème étudié.

La démonstration exposée se rapporte non seulement aux intégrales analytiques, mais évidemment encore à toutes les intégrales de Cauchy admettant des dérivées partielles des deux premiers ordres.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 8 AVRIL 1903.

PRÉSIDENTENCE DE M. RAFFY.

M. le Président annonce à la Société la perte cruelle et imprévue qu'elle vient d'éprouver en la personne de M. Duporcq, secrétaire, décédé le 2 avril 1903.

M. Laisant retrace en quelques mots la carrière scientifique de M. Duporcq et se fait l'interprète des sentiments douloureux de la Société.

La séance est levée en signe de deuil.

SÉANCE DU 22 AVRIL 1903.

PRÉSIDENTENCE DE M. RAFFY.

M. Quiquet fait hommage à la Société, de la part du Comité des Compagnies d'assurance sur la vie, de *Tables de mortalité par âges à l'entrée*, établies par ce Comité.

Communications :

M. Laisant : *Sur une propriété de la trajectoire d'un point décrite sous l'action d'une force centrale.*

M. Raffy : *Sur la recherche des surfaces W ayant une représentation sphérique donnée.*

M. Servant : *Observations au sujet de la Communication précédente.*

SÉANCE DU 6 MAI 1903.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus membres de la Société, à l'unanimité des membres présents :

MM. A. Boutin, présenté par MM. Lemoine et Laisant.
J.-L.-W.-V. Jensen, présenté par MM. Borel et Bricard.
L'abbé Issaly, présenté par MM. Touche et Laisant.
Espanet, présenté par MM. Maillet et Bricard.
Suchar, présenté par MM. Appell et Lévy.
Fraissé, présenté par MM. Lecornu et Laisant.

M. le Président fait connaître à l'Assemblée une décision du Conseil en vertu de laquelle M. Grévy est appelé aux fonctions de secrétaire, en remplacement de M. Duporcq, décédé, et M. Leau, aux fonctions de vice-secrétaire, en remplacement de M. Grévy.

Communications :

M. Borel : *Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques.*

MM. Bricard et Bioche : *Observations à ce sujet.*

M. Bioche : *Sur la détermination des surfaces pour lesquelles on connaît les projections d'une famille d'asymptotiques sur un plan.*

M. Lecornu : *Sur les réseaux proportionnels et sur une Note récente de M. Buhl.*

M. Lévy : *Résultats de l'examen des papiers scientifiques laissés par Ribaucour.*

SÉANCE DU 20 MAI 1903.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY ET DE M. PAINLEVÉ.

Communications :

M. Servant : *Sur une propriété de l'élément linéaire des quadriques.*

M. Estanave : *Sur les coefficients des développements en série de $\tan x$, $\sec x$, et d'autres fonctions. Leur expression à l'aide d'un déterminant unique.*

M. Raffy : *Sur une classe particulière de surfaces W.*

M. Painlevé : *Sur la théorie des fonctions abéliennes.*

SÉANCE DU 3 JUIN 1903.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

M. d'Ocagne fait hommage à la Société d'un Mémoire intitulé : *Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie.*

Communication :

M. Raffy : *Sur les surfaces de Joachimsthal qui sont en même temps surfaces W.*

SÉANCE DU 17 JUIN 1903.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

M. l'abbé Issaly fait hommage à la Société de deux Ouvrages intitulés : *Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces* et *La Géométrie non euclidienne et l'insuffisance de ses principes.*

Élection :

M. J. Richard, présenté par MM. Painlevé et Clairin, est élu membre de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Hadamard présente un Mémoire *Sur un problème mixte aux dérivées partielles.* Outre les résultats communiqués à la Société le 18 mars dernier, ce Mémoire contient un moyen de simplifier la solution du problème mixte relatif à l'équation des

télégraphistes, en formant la fonction U à l'aide de deux fonctions de Bessel sans quadratures. La comparaison de cette expression avec celle que l'on obtient par quadrature fournit, pour la fonction de Bessel d'indice zéro, une propriété fonctionnelle qui a d'ailleurs son analogue pour les fonctions de Bessel d'indices quelconques.

M. Boutin : *Sur un certain carré arithmétique.*

M. Raffy : *Sur les réseaux cylindrés.*

M. Blutel : *Sur une certaine surface.*

M. Saltykow : *Sur les équations aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 1^{er} JUILLET 1903.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Le Président annonce à la Société la perte qu'elle vient d'éprouver en la personne de M. Cremona, membre honoraire du Bureau.

Communication :

M. Bricard : *Sur une propriété des épicycloïdes et Sur un problème d'analyse combinatoire.*

SÉANCE DU 15 JUILLET 1903.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Perrin : *Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques.*

M. Lecornu : *Sur les milieux hétérogènes.*

M. Bricard : *Sur un théorème de M. Raffy.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SÉPARATION ANALYTIQUE D'UN SYSTÈME DE RAYONS INCIDENTS ET RÉFLÉCHIS;

PAR M. M. DE MONTCHEUIL.

On peut considérer les deux familles de surfaces respectivement normales aux congruences d'un système de rayons incidents et réfléchis, comme les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante.

La séparation analytique de ces deux nappes est en général impossible. Elle l'est néanmoins dans quelques cas particuliers. De ce nombre est le cas que nous nous proposons d'étudier et que nous définirons comme il suit :

Soit donnée une sphère mobile, dont le centre se déplace sur une surface de translation, lieu du milieu d'un segment reliant deux courbes données C , C_1 ; si nous prenons pour rayon de cette sphère la demi-somme, ou encore la demi-différence des arcs de ces courbes, comptés d'une origine fixe aux extrémités du segment, l'enveloppe de la sphère sera composée de deux nappes analytiquement séparables.

Le problème de la séparation des deux nappes de l'enveloppe d'une sphère est étroitement lié, comme nous le verrons, à celui de la séparation des deux plans isotropes tangents en un point d'une courbe. Or, la solution de cette question dépend à son tour de la solution de l'équation différentielle, qui définit la valeur de l'arc d'une courbe donnée. Nous allons donc commencer par résoudre ce premier problème.

Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. — J.-A. Serret ⁽¹⁾, et après lui M. Darboux ⁽²⁾, ont donné des formules qui résolvent cette équation au moyen d'expressions des fonc-

⁽¹⁾ J.-A. SERRET, *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 355.

⁽²⁾ DARBOUX, *Sur une classe remarquable de surfaces et de courbes algébriques*, p. 14 et suiv.

tions x, y, z, s dégagées de tout signe de quadrature. *Nous nous proposons d'établir des formules qui jouissent de la même propriété, et soient en même temps rationnelles, par rapport à la variable et aux fonctions qui y figurent.*

On se rend compte que tout système d'expressions des fonctions x, y, z, s donnant la solution de l'équation proposée, doit renfermer trois fonctions d'une variable, l'une de ces fonctions pouvant d'ailleurs être prise pour variable. Du reste, les quantités x, y, z, s étant rationnelles, il doit en être de même de leurs différentielles. Supposons donc les différentielles dx, dy, dz définies au moyen d'expressions rationnelles; la question est ramenée à exprimer la quatrième différentielle ds , au moyen d'une expression de même nature.

Cette différentielle étant liée aux précédentes par la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ne saurait être carré parfait, quelle que soit la courbe donnée, si l'on ne fait pas un choix convenable des fonctions et de la variable qui la caractérisent. C'est ce choix qu'il s'agit de fixer.

Représentons-nous une courbe quelconque de l'espace, comme le lieu décrit par un point de la tangente à une courbe minima. Nous plaçant à ce point de vue, nous supposons la courbe définie par les trois éléments suivants : 1° par une fonction définissant la direction du plan osculateur de la courbe minima; 2° par une deuxième fonction, achevant de déterminer la position de ce plan; 3° par une dernière fonction F dont nous nous abstenons, pour le moment, de préciser la signification géométrique, mais n'ayant d'autre rôle que de déterminer la position du point décrivant sur la tangente.

L'introduction de ces trois éléments nous permet d'abord d'écrire les coordonnées de la courbe cherchée sous la forme suivante :

$$x = x_1 + \frac{1 - u^2}{2} F,$$

$$y = y_1 + i \frac{1 + u^2}{2} F,$$

$$z = z_1 + uF,$$

x, y, z désignant ici les coordonnées de la courbe minima, supposées exprimées par les formules de Weierstrass, tandis que u désigne la variable indépendante. Nous avons donc obtenu des expressions rationnelles des coordonnées de la courbe, par rapport aux fonctions et à la variable qui la définissent.

Il nous reste à étudier la forme de la différentielle ds de l'arc de la courbe, par rapport à ces éléments.

L'arc élémentaire ds étant situé dans le plan osculateur de la courbe minima peut se décomposer suivant deux directions : la tangente à la courbe minima et une droite de direction fixe par rapport à cette tangente, tracée dans le plan isotrope. La première composante est nulle; ds se réduit donc à ds_1 . Or cette composante ayant une position fixe par rapport aux éléments de la courbe minima $\frac{ds_1}{du}$, et par suite $\frac{ds}{du}$ peuvent être considérées comme dépendant uniquement de la position du point sur la tangente. $\frac{ds}{du}$ pourra donc s'exprimer à l'aide de la seule fonction F . La différentielle de l'arc ayant ainsi cessé d'être représentée par la racine d'une forme quadratique des trois éléments de la courbe; la principale difficulté se trouve levée, et nous allons voir à l'instant que la dérivée $\frac{ds}{du}$ n'est autre que la fonction F , que nous désignerons par D' . Il nous suffit d'écrire les formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1-u^2}{2} (C'' + D') + uC' - C, \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2} (C'' + D') - uC' + C \right], \\ z = u(C'' + D') - C', \\ s = D, \end{array} \right.$$

C désigne la fonction qui caractérise la courbe minima; C', C'' ses dérivées. On vérifie que la dernière formule est une conséquence des trois premières. Elle nous montre que si l'on considère une courbe quelconque de l'espace, comme définie au moyen des fonctions C, D de leurs dérivées et de la variable u , les quantités x, y, z, s seront exprimées au moyen de fonctions rationnelles par rapport à ces éléments. Les formules (1) résolvent donc complètement le problème.

Du système précédent on déduit le nouveau système

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2} \left[\frac{\frac{du}{ds} \frac{d^2C}{ds^2} - \frac{dC}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3} \right] + \frac{u \frac{dC}{ds} - C \frac{du}{ds}}{\frac{du}{ds}}, \\ y = i \frac{1+u^2}{2} \left[\frac{\frac{du}{ds} \frac{d^2C}{ds^2} - \frac{dC}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3} \right] - i \frac{u \frac{dC}{ds} - C \frac{du}{ds}}{\frac{du}{ds}}, \\ z = u \left[\frac{\frac{du}{ds} \frac{d^2C}{ds^2} - \frac{dC}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3} \right] - \frac{\frac{dC}{ds}}{\frac{du}{ds}}. \end{cases}$$

Si l'on considère C et u comme des fonctions données de s , les formules précédentes nous donneront les coordonnées d'une courbe quelconque, en fonction de son arc.

Elles vont nous permettre de déterminer toutes les courbes dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de leur arc. Nous allons en effet démontrer cette proposition : *La condition nécessaire et suffisante, pour que les coordonnées d'une courbe soient des fonctions rationnelles de leur arc, est que les fonctions C , u qui figurent dans les formules (2) soient elles-mêmes des fonctions rationnelles de cet arc.*

Il est évident que la condition est suffisante. Nous allons montrer qu'elle est nécessaire.

Des formules (2) on tire

$$(3) \quad (1-u^2) dx + i(1+u^2) dy + 2u dz = 0,$$

$$(4) \quad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2C = 0.$$

Or, la première relation nous donne

$$u = - \frac{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}}{\frac{dz}{ds} \pm 1}.$$

On voit que x , y , z étant fonctions rationnelles de s , il doit en être de même de u .

Dès lors, la deuxième relation qui définit C en fonction de x ,

y, z, u montre que cette fonction doit, elle aussi, être rationnelle en s .

Nous venons d'envisager les courbes de l'espace comme définies au moyen des fonctions C, D considérées comme données. Supposons qu'inversement une courbe soit définie par les deux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

où x, y, z désignent ses coordonnées cartésiennes, et cherchons à déterminer les fonctions C, D relatives à cette courbe.

Nous avons le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz &= 0, \\ (1 - u^2) dx + i(1 + u^2) dy + 2u dz &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant les différentielles, on trouve

$$(5) \quad (1 - u^2) \frac{\partial(\frac{\varphi}{\psi})}{\partial(yz)} + i(1 + u^2) \frac{\partial(\frac{\varphi}{\psi})}{\partial(zx)} + 2u \frac{\partial(\frac{\varphi}{\psi})}{\partial(xy)} = 0.$$

Cette équation, jointe aux deux équations de la courbe, nous donnera x, y, z en fonction de u . Portant ces valeurs dans l'équation (4), nous connaissons C . Nous pourrions ensuite déduire D' de la relation

$$z = u(C'' + D') - C'.$$

Nous avons ainsi obtenu sans quadrature les fonctions C, D' , qui seules figurent dans les expressions des coordonnées. Une quadrature sera seulement nécessaire pour obtenir la fonction D , c'est-à-dire l'arc de la courbe.

Supposons maintenant que les coordonnées de la courbe nous soient données en fonction d'une variable quelconque θ .

La relation

$$u = \frac{dx + i dy}{ds - dz}$$

nous donnera θ en fonction de u . Portant la valeur trouvée de θ dans les expressions des coordonnées, nous achèverons le problème comme précédemment.

Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de reprendre l'équation différentielle que nous venons d'étudier et d'en donner une interprétation géométrique, qui nous permettra de déterminer presque immédiatement la solution de cette équation.

Posons

$$s = iz_1.$$

Dès lors, notre équation prendra la forme absolument symétrique

$$(6) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz_1^2 = 0.$$

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante :

L'équation différentielle (6) définit les coordonnées des deux points de rencontre d'une droite perpendiculaire au plan des x, y avec les tangentes à deux courbes minima quelconques, les points de ces courbes étant associés de telle sorte que les projections des tangentes sur le plan des x, y forment un angle droit.

En effet, soient M, M_1 deux points associés des courbes minima; m, m_1 les projections de ces points sur le plan des xy ; P, P_1 les points de rencontre des tangentes en M, M_1 aux courbes minima avec une même droite perpendiculaire au plan des x, y ; p la projection commune des deux points. Par hypothèse, les projections mp, m_1p forment un angle droit.

Considérons la tangente MP . Comme caractéristique d'une développable isotrope, cette droite est perpendiculaire à toute droite tracée dans le plan qui enveloppe cette développable, et par suite elle est perpendiculaire à la trace de ce plan sur celui des x, y . Cette trace est dès lors perpendiculaire à la projection mp de MP , et par suite parallèle à la projection m_1p de M_1P_1 . Il suit de là que le plan osculateur de la première courbe minima est parallèle à la projection m_1p de la tangente à la seconde courbe. Il est évident que le plan osculateur de la seconde courbe sera de même parallèle à la droite mp .

Cela posé, considérons l'élément infinitésimal ds décrit par le point P . Cet élément étant situé dans le plan osculateur de la courbe minima peut être considéré comme la résultante de deux composantes, l'une située sur la tangente MP , l'autre sur la parallèle à m_1p menée par le point P dans le plan isotrope. La pre-

mière composante est de longueur nulle. L'élément ds sera donc égal à sa composante suivant la seconde direction. Mais celle-ci se trouvant parallèle à la droite m_1p , on voit que ds a même valeur que sa projection sur la droite m_1p . Pour une raison identique, l'élément linéaire ds_1 relatif à la courbe décrite par le point P_1 sera égal à sa projection sur la droite mp . Supposons, pour un instant, que les droites mp , m_1p représentent les axes des x et des y . Alors on aura

$$ds = dx, \quad ds_1 = dy$$

au point considéré.

D'où

$$ds^2 + ds_1^2 = dx^2 + dy^2.$$

D'ailleurs la quantité $dx^2 + dy^2$ est indépendante de la position des axes des x et des y . On aura donc identiquement

$$ds^2 + ds_1^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) + (dx^2 + dy^2 + dz_1^2) = dx^2 + dy^2.$$

D'où

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz_1^2 = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il nous est maintenant facile de déterminer les expressions des fonctions x , y , z , z_1 .

Si nous supposons les coordonnées des courbes minima exprimées au moyen des formules de Weierstrass, la condition d'orthogonalité des projections des tangentes se traduira par la relation

$$u^2 + u_1^2 = 0,$$

u , u_1 désignant les deux variables relatives aux courbes minima.

Tenant compte de ce résultat, on vérifie que les quantités x , y , z , z_1 sont définies par le système

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{1+u^2}{2} F' + \frac{1+u_1^2}{2} F'_1, \\ y = i \frac{1-u^2}{2} F' + i \frac{1-u_1^2}{2} F'_1, \\ z = \mp i s_1 = -F \mp i u_1 F'_1, \\ z_1 = \pm i s = -F_1 \pm i u F', \end{cases}$$

F , F_1 désignant ici deux fonctions arbitraires de u et de u_1 ; F' , F'_1 les dérivées de ces fonctions.

Applications. — Cherchons un système de formules générales donnant les coordonnées et l'arc d'une courbe sphérique quelconque.

Soit R le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la courbe. Du système (7) on tire

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 F'^2 + F^2 \pm 2iu_1 F F'_1 = R^2.$$

D'où

$$F'_1 = \frac{u^2 F'^2 + F^2 - R^2}{2uF}.$$

Portant cette valeur de F'_1 dans les formules (7), il vient

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1+u^2}{2} F' + \frac{1-u^2}{4uF} (F^2 + u^2 F'^2 - R^2), \\ y = i \frac{1-u^2}{2} F' + i \frac{1+u^2}{4uF} (F^2 + u^2 F'^2 - R^2), \\ z = \frac{u^2 F'^2 - F^2 - R^2}{2F}, \\ s = \mp iz_1 = uF' - \int \frac{u^2 F'^2 + F^2 - R^2}{2uF} du. \end{array} \right.$$

Les formules (7) permettent encore de déterminer les courbes dont l'arc est une fonction linéaire des coordonnées.

Elles peuvent être toutes définies par la relation

$$\alpha z + \alpha_1 z_1 = 0,$$

α, α_1 désignant des constantes.

Si l'on porte dans cette dernière équation les valeurs de z et de z_1 , on trouve que les fonctions F, F_1 sont définies par les relations

$$\begin{aligned} F &= i\alpha u^{-i\frac{\alpha}{\alpha_1}} \int \varphi u^{1+i\frac{\alpha}{\alpha_1}} du, \\ F_1 &= -i\alpha_1 u_1^{i\frac{\alpha_1}{\alpha}} \int \varphi u_1^{1-i\frac{\alpha_1}{\alpha}} du_1. \end{aligned}$$

φ désigne ici une fonction arbitraire de u ou de u_1 . Nous avons pris le signe supérieur dans les expressions de z et de z_1 .

On peut prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\alpha}{u}, \\ F_1 &= \frac{\alpha_1}{u_1}, \end{aligned}$$

et l'on trouvera le système

$$\begin{aligned}x &= \alpha s^2 + \beta, \\y &= -i\alpha\beta^2 + i\beta, \\z &= s,\end{aligned}$$

α, β désignant des constantes. On obtient ainsi des courbes imaginaires tracées dans le plan isotrope

$$x - iy = 2\beta,$$

qui se projettent sur les plans des xz et des yz suivant des paraboles.

Donnons-nous maintenant une courbe, par ses équations en coordonnées cartésiennes, et cherchons les valeurs des fonctions C, D correspondantes.

Soit donnée, par exemple, une conique définie par le système

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ \psi(x, y, z) &= z = 0.\end{aligned}$$

L'équation (5) devient ici

$$b^2(1 + u^2)x + ia^2(1 - u^2)y = 0.$$

Nous avons ainsi un système de trois équations qui nous permet de déterminer x, y, z en fonction de u .

Il vient

$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2(1 - u^2)}{\sqrt{a^2(1 - u^2)^2 - b^2(1 + u^2)^2}}, \\ y &= \frac{ib^2(1 + u^2)}{\sqrt{a^2(1 - u^2)^2 - b^2(1 + u^2)^2}}, \\ z &= 0.\end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz^2 + 2C = 0,$$

on trouve

$$C = -\frac{\sqrt{a^2(1 - u^2)^2 - b^2(1 + u^2)^2}}{2}.$$

D' sera donné par la relation

$$D' = \frac{C' - uC''}{u}.$$

D'où l'on déduira D par une quadrature.

Posons

$$b = a.$$

Nous obtenons alors le système

$$x = -\frac{ia}{2} \frac{1-u^2}{u},$$

$$y = \frac{a}{2} \frac{1+u^2}{u},$$

$$C = -iau,$$

$$D = -ia \log u.$$

Nous avons ainsi déterminé les fonctions C, D, relatives au cercle de rayon a .

Séparation des deux plans isotropes tangents à une courbe.
— Soient x, y, z les coordonnées d'une courbe quelconque de l'espace, s la longueur de l'arc; les deux équations des plans isotropes tangents à cette courbe peuvent s'écrire

$$(dx dz \mp idy ds)(X-x) + (dy dz \pm idx ds)(Y-y) - (dx^2 + dy^2)(Z-z) = 0.$$

Si nous portons, dans cette relation, les valeurs de x, y, z, s et de leurs différentielles déduites du système (1), on obtient les deux équations suivantes

$$(9) \quad \begin{cases} (1-u^2)X + i(1-u^2)Y + 2uZ + 2C = 0, \\ (1-v^2)X + i(1+v^2)Y + 2vZ + 2G = 0, \end{cases}$$

v et G étant des fonctions de u définies par les relations

$$(10) \quad \begin{cases} v = u + \frac{2D'}{C'' + D''}, \\ G = C + \frac{v-u}{2} [2C' + (v-u)(C'' + D'')]. \end{cases}$$

Ces formules étant établies, nous devons préciser ce que nous entendons par plans isotropes ou nappes d'enveloppes de sphères *analytiquement séparables*.

Supposons les coordonnées d'une courbe, exprimées au moyen d'une variable, de deux fonctions de cette variable et de leurs dérivées, nous dirons que les plans isotropes de la courbe sont analytiquement séparables quand les coordonnées de la courbe et

les paramètres des deux équations des plans isotropes seront à la fois rationnels par rapport à ces éléments; ou encore, lorsque les fonctions étant particularisées, ces mêmes coordonnées et ces mêmes paramètres seront à la fois rationnels par rapport à la variable. Les hypothèses faites sur la nature de la courbe et sur la forme des expressions de ses coordonnées indiqueront, pour chaque cas particulier, dans lequel de ces deux sens on doit prendre l'expression *analytiquement séparable*.

Si, aux coordonnées de la courbe, nous substituons les coordonnées de la surface, lieu du centre de la sphère mobile, et au groupe d'éléments formé d'une variable et de deux fonctions, celui des deux variables et des quatre fonctions qui figurent dans les expressions des coordonnées de la surface, notre définition s'appliquera d'elle-même aux équations des nappes de l'enveloppe de la sphère.

En rapprochant les équations (9) et (10), nous constatons que les équations des deux plans isotropes d'une courbe pourront toujours s'exprimer rationnellement par rapport à la variable u , aux fonctions C , D' et à leurs dérivées, seules quantités qui figurent dans les expressions des coordonnées de la courbe.

De cette constatation nous déduisons la conclusion suivante :

Si l'on exprime les coordonnées d'une courbe par les formules du système (1), les plans isotropes de la courbe seront analytiquement séparables.

Ces mêmes équations nous permettent de déterminer l'ensemble des courbes unicursales, dont les plans isotropes sont analytiquement séparables.

Ces courbes ne sont autres que celles dont la différentielle de l'arc est rationnelle par rapport à la variable.

La condition est suffisante. On s'en assure, en remarquant la forme de l'équation en x, y, z, dx, dy, dz, ds écrite (p. 242), et qui définit les deux plans isotropes d'une courbe.

La condition est d'ailleurs nécessaire. En effet, d'après la définition, les quantités u, C, v, G , qui figurent dans les équations des plans isotropes, doivent être rationnelles par rapport à la variable. Dès lors, la seconde des équations (10) qui définit $D' = \frac{ds}{du}$

rationnellement en fonction de u , v , C , G et des dérivées de C par rapport à u , sera rationnelle par rapport à la variable. Elle donnera donc pour ds une expression rationnelle par rapport à cette variable.

En particulier, toutes les courbes unicursales en u auront leurs plans isotropes analytiquement séparables.

On les obtiendra en prenant pour C et D' des fonctions rationnelles.

Il n'est pas sans intérêt de se demander à quelle particularité les formules du système (1) doivent d'effectuer cette séparation des plans isotropes, que d'autres formules ne réalisent pas.

Imaginons une figure de l'espace, composée des éléments suivants : d'une sphère de rayon R et de centre x_0, y_0, z_0 , d'un point M de coordonnées x, y, z situé sur une courbe quelconque, de la tangente à cette courbe au point M , d'un des plans tangents à la sphère passant par la tangente à la courbe, enfin d'une droite D perpendiculaire en M , à la tangente à la courbe et au rayon de la sphère passant par ce point. L'équation du plan tangent à la sphère que nous venons de considérer sera définie par une relation de la forme

$$F\left(X, Y, Z; x, y, z; x_0, y_0, z_0; R; \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes du plan.

Cela posé, considérons la figure symétrique de la précédente par rapport à la droite D . Elle se composera évidemment des mêmes éléments, avec cette différence que le premier plan tangent à la sphère aura été remplacé par le second, et que la différentielle ds sera de sens contraire. On voit donc que, pour obtenir l'équation du second plan, il suffira de changer ds en $-ds$ dans l'équation du premier.

D'autre part, remarquons que les deux plans tangents à la sphère ne se succèdent d'une façon continue, en d'autres termes ne se confondent qu'aux points de la courbe où la tangente à celle-ci est en même temps tangente à la sphère. Il faudra donc, pour que ces plans soient séparables, que $\frac{ds}{du}$ dérivée de l'arc par

rapport à la variable s'annule en un de ces points et soit continue dans le voisinage.

Supposons, maintenant, que la sphère de rayon R soit remplacée par le cercle de l'infini. Les deux plans tangents à la sphère deviennent les deux plans isotropes tangents à la courbe et les deux conditions précédentes subsistent.

Il faudra donc que l'un des points où la tangente à la courbe rencontre le cercle de l'infini $\frac{ds}{du}$ s'annule, ce qui, du reste, aura lieu dans le cas général. Il faudra, en outre, que cette fonction soit continue dans le voisinage de ce point. Or, si cette condition est nécessaire pour que les plans isotropes soient *géométriquement* séparables, la condition requise pour qu'ils le soient *analytiquement* sera que les formules définissant les équations des coordonnées de la courbe et des plans tangents traduisent cette propriété géométrique de la figure. C'est ce qui a lieu quand on prend les formules du système (1). En effet, les expressions des coordonnées de la courbe étant supposées rationnelles en u , la fonction $\frac{ds}{du} = D'$ sera continue dans le voisinage des points pour lesquels elle s'annulera. D'ailleurs, pour $D' = 0$, la formule qui donne v en fonction de u se réduit à $v = u$. Le système (1) indique donc bien le caractère essentiel des courbes à plans isotropes séparables. On voit par là comment elles se prêtent à la séparation analytique des équations de ces plans.

Le système (1) exprime les coordonnées de la courbe en fonction des éléments qui entrent dans l'expression du premier plan isotrope. Il est évident que l'on obtiendra des expressions de forme identique des coordonnées de la courbe, si l'on substitue aux éléments du premier plan isotrope ceux du second. Il suffira de remplacer, dans les formules du système (1), u , C , D et les dérivées de ces fonctions par v , G , E et les dérivées de ces nouvelles fonctions. Nous désignons par E la fonction qui joue le rôle de D dans le nouveau système. *A priori*, on obtiendra trois relations distinctes entre ces fonctions et ces variables. Il suffira pour cela d'identifier les deux systèmes de valeurs des coordonnées.

Nous avons déjà trouvé les deux relations (10). Il suffira d'y ajouter la relation évidente

$$D + E = 0,$$

E désignant la relation de l'arc de la courbe, dans le second système.

On remarquera, en passant, que ces trois relations sont réciproques et qu'ainsi l'on pourra passer d'un système à l'autre par de simples opérations algébriques. Les quantités u , C , D' étant connues, nous obtiendrons v , G , E' par des équations du premier degré et réciproquement.

Parmi les courbes dont les équations s'expriment rationnellement par rapport à u , nous pouvons signaler le cercle, et plus généralement toutes les courbes sphériques. Cela résulte des formules (8) qui définissent les coordonnées de ces courbes.

Séparation des deux nappes de l'enveloppe d'une sphère.
— Nous venons de prendre une courbe isolée. Nous allons maintenant étudier le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation et considérer le système des intersections des quatre plans isotropes tangents à deux de ces courbes en un même point de la surface.

Désignons par X , Y , Z les coordonnées d'une courbe quelconque de l'espace, exprimées au moyen des formules du système (1); par X' , Y' , Z' ces mêmes formules où les quantités u , C , D auront été remplacées par les quantités v , G , $-D$. Désignons par X_1 , Y_1 , Z_1 ; X'_1 , Y'_1 , Z'_1 un couple analogue au précédent relatif à la seconde courbe.

Soient S , S' ; S_1 , S'_1 les couples d'expressions des arcs des deux courbes correspondant aux couples d'expressions des coordonnées des courbes.

Désignons enfin par x , y , z les coordonnées de la surface de translation du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent les deux courbes. Chaque coordonnée de la surface pourra s'écrire sous quatre formes distinctes, et l'on aura, par exemple,

$$x = \frac{X + X_1}{2} = \frac{X' + X_1}{2} = \frac{X + X'_1}{2} = \frac{X' + X'_1}{2}.$$

Soient u_1 , v_1 les deux formes de la variable indépendante relatives à la seconde courbe. Les quatre plans isotropes seront

donnés par les équations

$$\begin{aligned}(1 - u^2)(X - x) + i(1 + u^2)(Y - y) + 2u(Z - z) &= 0, \\ (1 - v^2)(X - x) + i(1 + v^2)(Y - y) + 2v(Z - z) &= 0, \\ (1 - u_1^2)(X - x) - i(1 + u_1^2)(Y - y) + 2u_1(Z - z) &= 0, \\ (1 - v_1^2)(X - x) - i(1 + v_1^2)(Y - y) + 2v_1(Z - z) &= 0.\end{aligned}$$

Ces plans, par leurs intersections, détermineront quatre congruences de droites, dont l'une sera définie par le système

$$\frac{X - x}{u + u_1} = \frac{Y - y}{i(u_1 - u)} = \frac{Z - z}{uu_1 - 1}.$$

On déduira les trois autres de celle-ci par la substitution successive ou simultanée des lettres v, v_1 aux lettres u, u_1 .

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de l'intersection des deux plans isotropes relatifs aux variables u, u_1 . On trouve la relation

$$c \, dx + c' \, dy + c'' \, dz + d\left(\frac{S + S_1}{2}\right) = 0.$$

On vérifie que la substitution de v à u et de v_1 à u_1 a pour effet de substituer $S' = -S$ à S , $S'_1 = -S_1$ à S_1 dans la relation précédente.

De ces résultats nous déduisons les conclusions suivantes :

Les quatre intersections des quatre plans isotropes tangents aux deux courbes qui se rencontrent en un point d'une surface de translation forment quatre congruences, normales à quatre familles de surfaces.

Ces surfaces sont les enveloppes des sphères de rayons égaux à la demi-somme et à la demi-différence des arcs des courbes génératrices, dont le centre décrit la surface de translation. Ces quatre surfaces se groupent évidemment en deux couples formant chacun les deux nappes de chaque enveloppe.

Les propriétés des enveloppes de sphères nous permettent encore d'affirmer que les quatre congruences, intersections des quatre plans isotropes, formeront un double système de rayons incidents et réfléchis admettant la surface de translation pour surface dirimante.

Nous allons retrouver et compléter les résultats précédents en procédant comme il suit :

Soit donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

ξ, u, u_1 désignant les coordonnées tangentielles de O. Bonnet. On vérifie que la développée moyenne ponctuelle relative aux surfaces définies par cette équation se compose de l'ensemble des surfaces de translation ⁽¹⁾. On constate encore que le segment qui relie un point de la proposée au point correspondant de sa développée est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des arcs de courbe de la surface de translation, ces arcs étant définis comme précédemment. On en conclut que les quatre familles de surfaces normales aux congruences de rayons incidents et réfléchis sont définies par autant de solutions de l'équation (11). Nous sommes ainsi amenés à chercher quatre solutions d'une équation de cette forme définissant les quatre nappes des deux enveloppes des sphères. Ces nappes étant déterminées, nous en déduirons aisément les deux systèmes de rayons incidents et réfléchis.

La solution de l'équation (11) est donnée par la formule

$$\xi = u A_1 + u_1 A + B + B_1,$$

$A, B_1; A_1, B$ désignant deux couples de fonctions respectives de u et de u_1 .

De cette formule on déduirait sans peine la surface de translation, développée moyenne de la proposée, et les courbes génératrices de la développée. Mais, si l'on veut retrouver les coordonnées des courbes génératrices sous la forme même définie par le système (1), il faut modifier la forme de l'expression de ξ que nous venons d'écrire.

Écrivons les relations

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = u_1 C + u C_1 - \frac{1 + uu_1}{2} (C' + C'_1 + S + S_1), \\ \xi_2 = u_1 G + v C_1 - \frac{1 + v u_1}{2} (G' + C'_1 - S + S_1), \\ \xi_3 = v_1 C + u G_1 - \frac{1 + u v_1}{2} (C' + G'_1 + S - S_1), \\ \xi_4 = v_1 G + v G_1 - \frac{1 + v v_1}{2} (G' + G'_1 - S - S_1). \end{array} \right.$$

(1) Thèse de Doctorat.

Ces quatre fonctions sont bien autant de solutions d'équations de la forme (11). D'ailleurs, si l'on cherche leurs développées moyennes, on trouve l'unique surface de translation précédemment définie exprimée successivement par les quatre formes que nous avons indiquées. Calculant les quatre plans isotropes des courbes génératrices de la surface de translation, on retrouvera les quatre congruences de droites déjà rencontrées. Nous avons donc bien déterminé les quatre nappes des deux enveloppes de sphères définies par l'équation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \left(\frac{S \pm S_1}{2} \right)^2.$$

Les formules (12) ayant été ainsi établies, il nous reste à déterminer les enveloppes de sphères dont les deux nappes sont analytiquement séparables.

On obtient immédiatement ce résultat, si l'on remarque que les quatre fonctions $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont toutes rationnelles par rapport à chacun des systèmes de variables et de fonctions u, C, S, u_1, C_1, S_1 , par exemple. En effet, le système (10) donne v et G sous forme rationnelle des éléments du premier système. La même remarque s'applique évidemment aux quantités v_1 et G_1 .

Si l'on suppose maintenant les quatre fonctions ξ exprimées au moyen des éléments u, C, S, u_1, C_1, S_1 , on se rendra compte aisément que les enveloppes auront leurs nappes séparables toutes les fois que les fonctions C, S, C_1, S_1 sont respectivement rationnelles en u et u_1 . Pour que les congruences de rayons incidents et réfléchis soient séparables, il suffira que C, S', C_1, S'_1 soient des fonctions rationnelles de u et de u_1 . Nous désignons ici par S', S'_1 les dérivées de S et S_1 .

Nous pouvons résumer les résultats trouvés dans la proposition suivante :

Soient données deux courbes quelconques P, P_1 définies par le système (1). Considérons les sphères mobiles ayant pour centre le milieu du segment qui relie les points de ces courbes et pour rayons la demi-somme et la demi-différence des distances des extrémités du segment à deux développantes des courbes P, P_1 . Soient Q, Q_1 les courbes de mêmes paramètres que P, P_1 décrites par le milieu du segment. *Les enveloppes des deux sphères se*

composent de quatre surfaces respectivement normales aux quatre congruences de droites intersections des quatre plans isotropes tangents aux courbes Q, Q_1 . La surface de translation pourra être considérée comme la surface dirimante de deux systèmes de rayons incidents et réfléchis fournis par les quatre congruences. Pour que les congruences de rayons soient séparables, il faut et il suffit que C, S', C_1, S'_1 soient des fonctions rationnelles de u et de u_1 . Pour que les nappes des enveloppes des sphères soient elles-mêmes séparables, il faut en outre que S, S_1 soient des fonctions rationnelles de u et de u_1 .

Nous plaçant à un point de vue un peu différent, nous énoncerons encore cette proposition :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux nappes de la sphère précédemment définie soient analytiquement séparables est que les coordonnées des deux courbes génératrices de la surface de translation, lieu du centre de cette sphère, soient des fonctions rationnelles de leurs arcs.

La condition est suffisante. On s'en assure en calculant les coordonnées des nappes de la sphère et tenant compte du système (2), qui donne les coordonnées d'une courbe en fonction de son arc.

Cette condition est nécessaire. En effet, si les équations des coordonnées des nappes sont rationnelles, il en sera de même de l'équation de la sphère mobile

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \left(\frac{S \pm S_1}{2} \right)^2.$$

Or, cette équation ne saurait être rationnelle à moins que x, y, z ne soient des fonctions rationnelles de S et de S_1 , ces quantités étant prises pour variables indépendantes.

On obtiendra donc toutes les enveloppes des sphères de rayons $\frac{S \pm S_1}{2}$ à nappes analytiquement séparables en prenant pour u, C, u_1, C_1 des fonctions rationnelles de S pour les premières, de S_1 pour les dernières.

Surfaces réelles. — La condition nécessaire et suffisante pour

que l'enveloppe de la première sphère et sa développée moyenne soient des surfaces réelles est que les fonctions C, S, C_1, S_1 soient des fonctions conjuguées. Ces résultats ont été démontrés ailleurs ⁽¹⁾. La seconde enveloppe sera réelle dans des conditions analogues qu'on déduirait aisément des précédentes. Il faut seulement remarquer que les deux enveloppes ne sauraient être simultanément réelles.

Applications. — Donnons-nous les deux couples de fonctions

$$\begin{aligned} C &= \alpha u^3, & C_1 &= \alpha_1 u_1^3, \\ D &= \beta u^2, & D_1 &= \beta_1 u_1^2, \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ désignant des constantes.

Appliquant notre méthode, cherchons les courbes, les congruences de droites et les enveloppes de sphères correspondant aux fonctions données.

Si l'on porte les valeurs données des fonctions C, D, C_1, D_1 et les valeurs des dérivées qu'on en déduit, les formules (1) nous donneront pour définir les coordonnées de l'arc de la première courbe

$$\begin{aligned} X &= -(\alpha + \beta)u^3 + (3\alpha + \beta)u, \\ Y &= i(\alpha + \beta)u^3 + i(3\alpha + \beta)u, \\ Z &= (3\alpha + 2\beta)u^2, \\ S &= \beta u^2. \end{aligned}$$

En affectant d'un indice les lettres qui figurent dans ces formules, on obtiendra les coordonnées de l'arc relatives à la seconde courbe.

Ces courbes, d'ailleurs imaginaires, sont les intersections de surfaces du second degré. La première courbe est définie par le système

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(X - iY)Z + (3\alpha + \beta)(3\alpha + 2\beta)(X + iY) &= 0, \\ 4(3\alpha + \beta)^2 Z - (3\alpha + 2\beta)(X - iY)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons vu que chaque courbe peut s'exprimer au moyen de deux systèmes de fonctions et de variables. Cherchons à déter-

(1) Thèse de Doctorat.

miner les éléments du second système en fonction de ceux du premier.

Appliquant les formules (10) nous trouvons

$$\begin{aligned} v &= 3 \frac{\alpha + \beta}{3\alpha + \beta} u, \\ G &= \frac{(3\alpha + 4\beta)(\alpha + \beta)}{3\alpha + \beta} u^3 = \frac{(3\alpha + 4\beta)(3\alpha + \beta)^2}{27(\alpha + \beta)^2} v^3. \end{aligned}$$

Il suffira de remplacer α, β par α_1, β_1 pour obtenir v_1, G_1 . On voit que les deux groupes de fonctions sont de même forme et l'on vérifie qu'elles définissent les mêmes courbes.

Désignant par x, y, z les coordonnées de la surface de translation, par ρ le rayon de la première sphère, on trouve

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [-(\alpha + \beta)u^3 + (3\alpha + \beta)u - (\alpha_1 + \beta_1)u_1^3 + (3\alpha_1 + \beta_1)u_1], \\ y &= \frac{i}{2} [-(\alpha + \beta)u^3 + (3\alpha + \beta)u - (\alpha_1 + \beta_1)u_1^3 + (3\alpha_1 + \beta_1)u_1], \\ z &= \frac{1}{2} [(3\alpha + 2\beta)u^2 + (3\alpha_1 + 2\beta_1)u_1^2], \\ \rho &= \frac{S + S_1}{2} = \frac{\beta u^2 + \beta_1 u_1^2}{2}. \end{aligned}$$

La première congruence sera définie par le système

$$\frac{X - x}{u + u_1} = \frac{Y - y}{i(u_1 - u)} = \frac{Z - z}{uu_1 - 1}.$$

La congruence des rayons réfléchis sera définie par le système

$$\frac{X - x}{v + v_1} = \frac{Y - y}{i(v_1 - v)} = \frac{Z - z}{vv_1 - 1}.$$

Si l'on tient compte des valeurs trouvées pour x, y, z, v, v_1 en fonction de u, u_1 , on voit que les deux congruences du système sont bien analytiquement séparées.

Le second système de rayons incidents et réfléchis donne lieu aux mêmes observations.

Il nous reste à déterminer les quatre nappes des deux enveloppes des sphères. En procédant comme nous l'avons indiqué, nous

obtiendrons quatre fonctions de la forme

$$\xi = \gamma u^2 + \gamma_1 u_1^2 + uu_1(\delta u^2 + \delta_1 u_1^2),$$

$\gamma, \gamma_1, \delta, \delta_1$ désignant des constantes.

Ainsi donc les quatre nappes formeront bien autant de surfaces analytiquement séparables.

Considérons le cas particulier où l'on a

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta.$$

Alors la fonction ξ_1 prend la forme

$$\xi_1 = - \frac{(\alpha + \beta)uu_1 + 3\alpha + \beta}{2}(u^2 + u_1^2).$$

La fonction ξ_4 prend une forme analogue.

Ces surfaces jouissent des propriétés suivantes :

Elles sont définies par des solutions communes aux deux équations

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}.$$

Elles ont leurs lignes de courbure planes.

On a en effet

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} (du^2 - du_1^2) = 0.$$

Si donc nous désignons par ρ, ρ_1 les paramètres de ces lignes, par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface, nous déduirons de l'équation précédente

$$\begin{aligned} \rho &= u + u_1 = \frac{2c}{1 - c''}, \\ \rho_1 &= i(u_1 - u) = \frac{2c'}{1 - c''}. \end{aligned}$$

Les deux nappes de la surface des centres sont séparables.

En effet, la seule irrationnelle qui figure dans les expressions des coordonnées de ces nappes est la quantité $\sqrt{\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}}$. Mais, en vertu de la relation $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$, cette quantité est ici rationnelle. Les coordonnées des deux nappes le seront donc également.

On trouve encore (k désignant une constante)

$$\rho = kz.$$

Le rayon de la sphère est donc proportionnel à l'ordonnée du centre de cette sphère.

Si nous posons

$$\gamma = -\frac{\alpha + \beta}{2},$$

ξ_1 prendra la forme

$$\xi_1 = \gamma(3 + uu_1)(u^2 + u_1^2) + \beta(u^2 + u_1^2).$$

Or, on vérifie que les équations

$$\zeta = (3 + uu_1)(u^2 + u_1^2),$$

$$\zeta' = u^2 + u_1^2$$

définissent respectivement la surface minima d'Enneper et la cyclide de Dupin. D'où l'on conclut que la surface définie par ξ_1 est le lieu d'un point partageant dans un rapport donné le segment qui relie deux points à normales parallèles d'une surface minima d'Enneper et d'une cyclide de Dupin. En faisant $\beta = 0$, nous aurons la surface minima; pour $\gamma = 0$, nous obtiendrons la cyclide.

La nappe associée à la cyclide de Dupin n'est autre que le plan des xy ; par suite, l'une des congruences de rayons est formée de droites parallèles. D'ailleurs, la développée moyenne de cette surface est le paraboloïde équilatère défini par l'équation

$$z = a(x^2 - y^2),$$

a désignant une constante.

On en déduit cette proposition : *Un faisceau de rayons parallèles à l'axe d'un paraboloïde équilatère se réfléchit sur cette surface normalement à une cyclide de Dupin.*

Nous venons de rencontrer un système de rayons incidents et réfléchis dont l'une des congruences est formée de rayons parallèles. *Plus généralement, cherchons tous les systèmes dérivés des sphères mobiles précédemment définies qui jouissent de la même propriété.* Prenons pour plan perpendiculaire à la direction des rayons parallèles le plan des xy .

Soient $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1$ les coordonnées respectives des courbes génératrices de la surface de translation, S, S_1 les longueurs de leurs arcs. Désignons encore par x, y, z les coordonnées du centre de la sphère, par ρ son rayon.

La sphère étant supposée tangente au plan des xy , on a ici

$$z = \rho.$$

La surface dirimante étant une surface de translation engendrée au moyen des courbes considérées, on a

$$(13) \quad x = \frac{X + X_1}{2}, \quad y = \frac{Y + Y_1}{2}, \quad z = \frac{Z + Z_1}{2}.$$

On a d'ailleurs par hypothèse

$$\rho = \frac{S + S_1}{2}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{S + S_1}{2} = \frac{z + z_1}{2} = \text{const.}$$

On tire de là

$$dS = dZ, \quad dS_1 = dZ_1.$$

D'où

$$dX^2 + dY^2 = 0, \quad dX_1^2 + dY_1^2 = 0.$$

Telles sont les équations qui doivent vérifier les courbes cherchées. On peut considérer comme équivalent au système précédent le système des deux équations

$$(14) \quad X + iY = 0, \quad X_1 - iY_1 = 0.$$

Ce sont donc des courbes planes tracées dans deux plans isotropes conjugués.

Formons l'équation qui définit la surface de translation lieu du centre de la sphère.

Des équations (13) et (14) on tire

$$x + iy = \frac{X_1 + iY_1}{2} = f_1(u_1),$$

$$x - iy = \frac{X - iY}{2} = f(u).$$

D'ailleurs Z et Z_1 sont aussi deux fonctions respectives de u et

de u_1 . On a donc

$$z = \varphi(x - iy) + \varphi_1(x + iy).$$

La surface de translation est donc définie par la solution générale de l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Il est inutile de chercher l'enveloppe de la sphère de rayon $\frac{S - S_1}{2}$, car ici la congruence des normales à cette enveloppe se réduit à deux ensembles de droites situées respectivement dans deux plans isotropes conjugués.

La nappe qui a pour normales les rayons non parallèles est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si, par le milieu d'un segment dont les extrémités décrivent deux courbes quelconques tracées dans deux plans isotropes conjugués, on mène une droite parallèle à l'intersection des deux plans isotropes mobiles tangents aux deux courbes, on obtiendra un système de rayons qui se réfléchiront sur la surface lieu du milieu d'un segment suivant une congruence de droites parallèles.

Comme dernière application, nous allons nous donner les deux courbes et en déduire les fonctions avec les éléments géométriques qui en dérivent. Soient donnés les deux cercles de rayons conjugués α, α_1 définis par les équations

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \quad x^2 + y^2 = \alpha_1^2.$$

L'application de la méthode exposée précédemment donnera

$$\begin{aligned} C &= i\alpha u, & C_1 &= i\alpha_1 u_1, \\ D &= i\alpha \log u, & D_1 &= i\alpha_1 \log u_1. \end{aligned}$$

Les coordonnées de la surface, lieu du milieu du segment qui

relie les deux cercles, seront définies par le système

$$\begin{aligned}x &= i\alpha \frac{1-u^2}{4u} + i\alpha_1 \frac{1-u_1^2}{4u_1}, \\y &= -\alpha \frac{1+u^2}{4u} + \alpha_1 \frac{1+u_1^2}{4u_1}, \\z &= 0.\end{aligned}$$

Ces relations définissent un réseau de cercles tracés sur le plan des x, y .

On obtiendra les directions des quatre normales aux enveloppes de sphères en calculant v, v_1 au moyen des formules (10).

Il vient

$$v = -u, \quad v_1 = -u_1.$$

On déduit de ces relations que les deux plans contenant respectivement les couples de rayons incidents et réfléchis de chaque système se coupent à angle droit.

On trouve pour rayons des sphères

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{S + S_1}{2} = i \frac{\alpha \log u + \alpha_1 \log u_1}{2}, \\ \rho' &= \frac{S - S_1}{2} = i \frac{\alpha \log u - \alpha_1 \log u_1}{2}.\end{aligned}$$

Les fonctions G, G_1 ont ici pour valeurs

$$\begin{aligned}G &= i\alpha u = -i\alpha v, \\ G_1 &= i\alpha_1 u_1 = -i\alpha_1 v_1.\end{aligned}$$

Les quatre nappes des enveloppes des sphères sont définies par les équations

$$\begin{aligned}\xi_1 &= i \frac{\alpha + \alpha_1}{2} (uu_1 - 1) - i \frac{1 + uu_1}{2} (\alpha \log u + \alpha_1 \log u_1), \\ \xi_2 &= i \frac{\alpha + \alpha_1}{2} (vu_1 - 1) + i \frac{1 + vu_1}{2} (\alpha \log v + \alpha_1 \log u_1), \\ \xi_3 &= i \frac{\alpha + \alpha_1}{2} (uv_1 - 1) + i \frac{1 + uv_1}{2} (-\alpha \log u + \alpha_1 \log v_1), \\ \xi_4 &= i \frac{\alpha + \alpha_1}{2} (vv_1 - 1) + i \frac{1 + vv_1}{2} (\alpha \log v + \alpha_1 \log v_1).\end{aligned}$$

Au moyen d'une translation effectuée parallèlement à l'axe des z ,

ces équations se ramènent au type

$$\xi = (1 + uu_1)(\beta \log u + \beta_1 \log u_1).$$

On peut déterminer les lignes de courbure de ces surfaces. Désignant par ρ, ρ_1 les paramètres de ces lignes, on trouve

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta} \log u - \sqrt{\beta_1} \log u_1 &= \rho, \\ \sqrt{\beta} \log u + \sqrt{\beta_1} \log u_1 &= \rho_1.\end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta_1} S - \sqrt{\beta} S_1 &= 2 \sqrt{\beta \beta_1} \rho, \\ \sqrt{\beta_1} S + \sqrt{\beta} S_1 &= 2 \sqrt{\beta \beta_1} \rho_1.\end{aligned}$$

Ces dernières formules montrent que le réseau des projections des lignes de courbure de chaque nappe sur le plan des xy rappelle par sa forme le réseau formé d'ellipses et d'hyperboles se coupant à angle droit.

Pour $\alpha = \alpha_1$, les cercles se confondent et l'on obtient des surfaces de révolution. Alors le réseau se réduit à un système formé de cercles concentriques et des rayons de ces cercles.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES MILIEUX CONTINUS;

Par M. L. LECORNU.

Toute équation $\varphi(x, y, z) = C$ dans laquelle C désigne une constante arbitraire définit une famille de surfaces; mais la réciproque n'est pas vraie, et une même famille de surfaces correspond à une infinité d'équations obtenues en remplaçant φ par une fonction arbitraire de φ . Si l'on veut avoir une représentation adéquate de l'équation $\varphi = C$, il faut considérer une variable de plus et imaginer, par exemple, un milieu matériel dans lequel $\varphi(x, y, z)$ serait la densité au point (x, y, z) . Les surfaces $\varphi = C$ sont alors les surfaces d'égale densité. Parmi les propriétés d'un pareil milieu, les unes se confondent avec les propriétés purement géométriques du système de surfaces et demeurent invariables, quelle que soit la loi de variation de la densité dans le passage d'une surface à une autre; les autres dépendent essentiellement de cette *loi de distribution*.

Je me propose d'établir ici quelques théorèmes de géométrie infinitésimale concernant ces deux sortes de propriétés.

L'origine O des coordonnées rectangulaires étant placée en un point de la région élémentaire qu'on veut étudier, nous considérerons x, y, z comme des infiniment petits du premier ordre, et nous écrirons, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$(1) \quad \varphi = \varphi_0 + px + qy + rz + \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy).$$

Posons

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

L'équation

$$(2) \quad f(x, y, z) = \varepsilon,$$

dans laquelle ε désigne une constante arbitraire, représente une quadrique à centre, que j'appellerai la *surface indicatrice*, ou simplement l'*indicatrice* du système, et que je désignerai par I. Cette indicatrice ne change pas quand, laissant ε invariable, on modifie la direction des *axes*. On pourrait le vérifier par un calcul direct, mais on le voit géométriquement de la manière suivante : Soient A et B deux points symétriques par rapport à l'origine. La moyenne des densités en ces deux points est évidemment $\varphi_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$. La surface I est donc le lieu des points tels que la moyenne des densités en l'un de ces points et au point symétrique par rapport à O possède une valeur donnée, et cette définition est indépendante du choix des axes.

Les directions principales de l'indicatrice ont une signification mécanique assez remarquable. Orientons les axes de coordonnées suivant ces directions, de manière à annuler les coefficients f, g, h . Si l'on calcule alors les intégrales $\int yz\varphi d\omega, \int zx\varphi d\omega, \int xy\varphi d\omega$ étendues à tous les éléments $d\omega$ d'une sphère infiniment petite de centre O, on reconnaît immédiatement que ces intégrales sont nulles. Par suite :

Les axes de l'indicatrice coïncident en direction avec les axes principaux d'inertie d'une sphère infiniment petite appartenant au milieu considéré.

J'ai démontré cette proposition, avec plusieurs autres du même genre, dans une Note communiquée à l'Association française pour l'avancement des Sciences (1890).

Soit S la surface d'égale densité passant au point O . Son *indicatrice de Dupin* est, par définition, sa courbe d'intersection avec un plan parallèle au plan tangent en O et infiniment voisin. Pour tous les points de cette ligne, l'expression $px + qy + rz$ a une valeur constante; en même temps, φ est égal à φ_0 . La comparaison des équations (1) et (2) montre alors que, pour tous les points de l'indicatrice de Dupin, la quantité ε a une valeur constante. En d'autres termes :

La surface indicatrice contient la courbe indicatrice de Dupin.

Si nous cherchons l'intersection de la surface indicatrice $f(x, y, z) = \varepsilon$ avec le plan tangent lui-même P , nous trouvons que cette courbe appartient à la surface d'égale densité $\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \varepsilon$ infiniment voisine de la surface passant en O . Cette courbe est infiniment peu différente de l'indicatrice de Dupin, et c'est elle que nous désignerons désormais sous le nom de *courbe indicatrice*.

En modifiant la loi de distribution des densités, c'est-à-dire en remplaçant φ par une fonction $F(\varphi)$, on fait varier la forme de la surface indicatrice. A un système donné de surfaces d'égale densité S correspond donc, pour chaque point de l'espace, une infinité de surfaces indicatrices. Si l'on appelle F' et F'' les dérivées première et seconde de $F(\varphi)$, l'équation générale des surfaces indicatrices qui correspondent au point O est

$$F'f(x, y, z) + F''(px + qy + rz)^2 = \eta.$$

L'intersection avec le plan P est donnée par $F'f = \eta$, et, en déterminant la constante arbitraire η par la condition $F'\varepsilon = \eta$, toutes les surfaces indicatrices passent par la même courbe indicatrice le long de laquelle elles sont tangentes entre elles.

Si l'on fait en particulier $\varepsilon = 0$, toutes les surfaces indicatrices se réduisent à des cônes coupant le plan P suivant deux droites

fixes, réelles ou imaginaires, qui sont les tangentes aux lignes asymptotiques de S; ce sont les *cônes indicateurs*.

La direction conjuguée du plan P est la même pour toutes les surfaces indicatrices. Elle est définie par les équations

$$(3) \quad \frac{ax + hy + gz}{p} = \frac{hx + by + fz}{q} = \frac{gx + fy + cz}{r}.$$

Pour un déplacement effectué, à partir de l'origine O, suivant cette direction, on a évidemment

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dr}{r};$$

cela revient à dire que p, q, r conservent des rapports invariables et que, par suite, l'orientation du plan P n'est pas changée. La direction dont il s'agit est donc celle de la droite joignant les points de contact de deux plans tangents menés parallèlement à deux surfaces S infiniment voisines. Nous appellerons cette droite l'*axe de parallélisme*. Parmi tous les cônes indicateurs, il y en a un qui contient l'axe de parallélisme et se décompose, par suite, en deux plans.

Extension du théorème des tangentes conjuguées.

Soient X, Y, Z les coordonnées courantes. L'équation du plan tangent à l'une des surfaces S en un point A(x, y, z) infiniment voisin de l'origine est, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$p(X - x) + q(Y - y) + r(Z - z) + aXx + bYy + cZz + f(Yz + Zy) + g(Zx + Xz) + h(Xy + Yx) = 0.$$

Sa trace sur le plan P, tangent en O, dont l'équation est $pX + qY + rZ = 0$, vérifie la relation

$$(aX + hY + gZ - p)x + (hX + bY + fZ - q)y + (gX + fY + cZ - r)z = 0.$$

On reconnaît ici l'équation du plan diamétral conjugué de la direction OA par rapport à la quadrique

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fYZ + 2gZX + 2hXY - 2(pX + qY + rZ) = 0,$$

tangente en O au plan P.

La caractéristique du plan tangent, pour un déplacement OA du point de contact, est donc la polaire de OA par rapport à cette quadrique Q. Elle est parallèle à la trace sur le plan P du plan diamétral conjugué de OA par rapport à l'une quelconque des surfaces indicatrices.

Le centre de la surface Q se trouve sur l'axe de parallélisme, au point défini par les équations

$$\begin{aligned} aX + hY + gZ - p &= 0, \\ hX + bY + fZ - q &= 0, \\ gX + fY + cZ - r &= 0. \end{aligned}$$

La quadrique Q est tangente en O à la surface S. Elle admet la même indicatrice de Dupin et elle est symétrique, par rapport à O, de la quadrique

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fYZ + 2gZX + 2hXY + 2(pX + qY + rZ) = 0,$$

déduite de la surface S en effaçant, dans le développement de $\varphi - \varphi_0$, les termes d'ordre supérieur au second.

En particulier, pour un déplacement OA normal en O à la surface S, la construction précédente fait connaître la caractéristique de la trajectoire orthogonale des surfaces S, c'est-à-dire l'axe de courbure de cette trajectoire.

En faisant varier la loi de distribution des densités, on obtient une infinité de quadriques Q dont les centres se trouvent tous sur l'axe de parallélisme et qui se touchent toutes au point O. Ces quadriques sont évidemment homologues.

Normalies développables.

Cherchons maintenant pour quels déplacements OA effectués à partir de O la normale en A à la surface S passant en ce point rencontre la normale en O à la surface initiale et engendre, par suite, un élément de surface développable. Les équations de la normale en un point x, y, z pour lequel p, q, r désignent les paramètres du plan tangent peuvent s'écrire

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{r} = \lambda.$$

d'où

$$(4) \quad X = x + \lambda p, \quad Y = y + \lambda q, \quad Z = z + \lambda r.$$

Si l'on veut que deux normales infiniment voisines se rencontrent, on est conduit aux équations

$$(5) \quad \begin{cases} dx + \lambda dp + p d\lambda = 0, \\ dy + \lambda dq + q d\lambda = 0, \\ dz + \lambda dr + r d\lambda = 0, \end{cases}$$

d'où, par l'élimination de λ et $d\lambda$,

$$\begin{vmatrix} dx & dp & p \\ dy & dq & q \\ dz & dr & r \end{vmatrix} = 0.$$

Appliquons ceci à l'origine O et remplaçons alors dx, dy, dz par x, y, z , puis dp, dq, dr par $ax + hy + gz, \dots$ Il vient ainsi

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x & ax + hy + gz & p \\ y & ax + by + fz & q \\ z & yx + fy + cz & r \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de reconnaître que la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2 est identiquement nulle et que, par suite, le cône du second degré C représenté par l'équation précédente est capable d'une infinité de trièdres trirectangles. Ce cône admet comme génératrices plusieurs droites remarquables, savoir :

- 1° L'axe de parallélisme (3);
- 2° La normale à la surface S $\left(\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}\right)$;
- 3° Les tangentes aux lignes de courbure;
- 4° Les droites pour lesquelles

$$\frac{ax + hy + gz}{x} = \frac{hx + by + fz}{y} = \frac{gx + fy + cz}{z},$$

c'est-à-dire les axes principaux de l'indicatrice I.

En modifiant la loi de distribution des densités, on n'altère pas le cône C, ainsi qu'il est aisé de le vérifier directement. Les axes principaux de toutes les indicatrices se trouvent donc sur ce cône et, par conséquent :

Le lieu des tangentes aux directrices des normales développables en chaque point de l'espace est le cône du second degré formé par les axes principaux de toutes les indicatrices.

Remarquons encore que l'équation (6) est susceptible d'une interprétation géométrique évidente : le plan mené par une génératrice du cône, normalement à la surface S, contient la normale au plan diamétral conjugué de cette génératrice par rapport à l'une quelconque des indicatrices. Il en résulte que, pour un déplacement effectué à partir de O suivant une génératrice, la caractéristique du plan tangent à la surface S est perpendiculaire au déplacement, ainsi qu'il était d'ailleurs facile de le prévoir.

Cherchons le plan tangent au cône C le long de la normale en O à la surface S. Si $\psi(x, y, z) = 0$ est l'équation du cône, ce plan tangent a pour équation $x\psi'(p) + y\psi'(q) + z\psi'(r) = 0$, ce qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & ap + hq + gr & p \\ y & hp + bq + fr & q \\ z & gp + fq + cr & r \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan contient la direction

$$\frac{x}{ap + hq + gr} = \frac{y}{hp + bq + fr} = \frac{z}{gp + fq + cr},$$

qui appartient évidemment au plan osculateur en O à la trajectoire orthogonale des surfaces S. Donc :

Le cône des axes principaux est tangent le long de la normale (p, q, r) au plan osculateur de la trajectoire orthogonale des surfaces S.

Courbures normales.

Soient ON, AN' les normales à deux surfaces S, en deux points infiniment voisins O et A. Projetons AN' sur le plan normal NOA, et cherchons les coordonnées X, Y, Z du point de rencontre B de cette projection avec la normale ON. Si les deux points O et A se trouvaient sur une même surface S, le point ainsi obtenu serait le centre de courbure de la section de la surface par le plan normal contenant OA. Notre calcul va donc constituer l'extension, à un système de surfaces, de la théorie de la courbure.

En appelant x, y, z les coordonnées de A et $p + dp, q + dq, r + dr$ les valeurs de p, q, r en ce point, on exprime que le plan de AN' et AB est normal au plan NOA par l'équation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ p+dp & q+dq & r+dr \\ qz-r\gamma & rx-pz & py-qx \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, si l'on pose $OB = R$ et $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega$, on a

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} = \frac{R}{\omega};$$

d'où, en substituant, dans l'équation précédente, et simplifiant

$$\frac{R}{\omega} \begin{vmatrix} p & q & r \\ dp & dq & dr \\ qz-r\gamma & rx-pz & py-qx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ qz-r\gamma & rx-pz & py-qx \end{vmatrix}.$$

En remplaçant dp, dq, dr par leurs valeurs $\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}$, on obtient finalement

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}(px + q\gamma + rz) \left(p \frac{\partial f}{\partial x} + q \frac{\partial f}{\partial y} + r \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \omega^2 f(x, y, z)}{\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) - \omega (px + q\gamma + rz)^2}.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de OA. On peut encore écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}(p\alpha + q\beta + r\gamma) \left(p \frac{\partial f}{\partial \alpha} + q \frac{\partial f}{\partial \beta} + r \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) - \omega^2 f(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega^3 - \omega (p\alpha + q\beta + r\gamma)^2}.$$

Si l'on appelle enfin i l'angle de OA avec la normale ON, il vient

$$(7) \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2} \cos i \left(p \frac{\partial f}{\partial \alpha} + q \frac{\partial f}{\partial \beta} + r \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) - \omega f(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega^2 \sin^2 i}.$$

Pour $i = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la formule ordinaire donnant la courbure des sections normales d'une surface.

Portons sur chaque direction OA un vecteur égal à $\frac{\sqrt{R}}{\sin i}$; le lieu de l'extrémité de ce vecteur est une quadrique à centre. De là

résultent diverses relations, parmi lesquelles je signalerai seulement la suivante :

Pour trois directions rectangulaires quelconques OA_1, OA_2, OA_3 issues du point O , l'expression $\frac{\sin^2 i_1}{R_1} + \frac{\sin^2 i_2}{R_2} + \frac{\sin^2 i_3}{R_3}$ a une valeur constante.

La valeur de cette constante est

$$\frac{f(p, q, r) - (p^2 + q^2 + r^2)(a + b + c)}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle doit naturellement être indépendante de la loi de distribution des densités; c'est ce qu'on vérifie sans peine par un calcul direct.

Si l'on considère en particulier le trièdre formé par la normale à la surface S et par les directions principales de cette surface, la valeur de $\frac{\sin^2 i}{R}$ correspondant à la normale est nulle; pour les deux directions principales, $\sin i$ est égal à l'unité. La constante dont il s'agit ne diffère donc pas de la somme des inverses des rayons de courbure de la surface S , c'est-à-dire du double de sa courbure moyenne. Il est remarquable que la courbure moyenne d'une seule surface S détermine ainsi, d'une manière complète, la valeur de l'expression $\sum \frac{\sin^2 i}{R}$ relative à trois directions rectangulaires quelconques, issues d'un point de cette surface, indépendamment de la forme des surfaces S infiniment voisines.

Le lieu des directions pour lesquelles R a une valeur infinie est le cône asymptotique représenté par l'équation

$$(px + qy + rz) \left(p \frac{\partial f}{\partial x} + q \frac{\partial f}{\partial y} + r \frac{\partial f}{\partial z} \right) - 2(p^2 + q^2 + r^2)f(x, y, z) = 0.$$

ou bien

$$(8) \quad \begin{vmatrix} p & q & r \\ ax + hy + gz & hx + by + fz & gx + fy + cz \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \end{vmatrix} = 0.$$

Ce cône contient la normale en O à S et l'axe de parallélisme; il coupe le plan tangent à la surface S suivant les deux directions asymptotiques.

Pour un déplacement effectué suivant une génératrice quelconque de ce cône, la caractéristique du plan tangent est parallèle à la trace du plan normal contenant le déplacement.

Courbure de la trajectoire orthogonale.

Nous avons précédemment déterminé l'axe de courbure de la trajectoire orthogonale des surfaces S . On pourrait en déduire son rayon de courbure ρ ; mais il vaut mieux traiter la question directement. A cet effet, menons par l'origine O la normale ON , rencontrant en N une surface S' infiniment voisine de S . Menons aussi l'axe de parallélisme OA , rencontrant en A la même surface S' . La déviation du plan tangent aux surfaces S est la même lorsqu'on parcourt le chemin AN sur la surface S' que lorsqu'on va de O en N suivant la normale. D'ailleurs, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de S' au point N (infiniment peu différent des rayons de courbure de S au point O) et si ψ désigne l'angle du plan AON avec le plan de la section principale correspondant au rayon R_1 , l'angle α des normales en N et en A est donné par la formule connue

$$\frac{\alpha^2}{AN^2} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2}.$$

Soit θ l'angle AON . On a $AN = AO \tan \theta$ et $\frac{\alpha}{AO} = \frac{1}{\rho}$.

Le rayon de courbure ρ de la trajectoire orthogonale vérifie donc la formule

$$\frac{1}{\rho^2} = \tan^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2} \right).$$

Il est entièrement défini par les rayons de courbure de la surface S et par la direction de l'axe de parallélisme.

Je me suis borné, dans cette étude, aux propriétés dépendant des dérivées premières et secondes de la fonction φ . Si l'on voulait aller plus loin, on serait conduit à aborder des problèmes beaucoup plus ardues. A la fonction φ sont liées, en chaque point de l'espace, trois directions rectangulaires, correspondant aux axes principaux de l'indicatrice. On peut tout d'abord se demander quelle condition doit remplir la fonction pour que ces directions soient normales à un système triple de surfaces orthogonales.

Cette question (énoncée sous une forme un peu différente) a été résolue par M. Darboux dans les *Proceedings of the London mathematical Society* de 1900. Il a trouvé que la fonction doit vérifier une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, homogène, ne contenant ni la fonction, ni ses dérivées premières. Imaginons maintenant que nous changions la loi de distribution sans altérer les surfaces d'égale densité. Nous modifions, en chaque point, l'orientation du trièdre trirectangle. Dans quels cas ce nouveau trièdre demeure-t-il normal à un système triple de surfaces orthogonales?

Au lieu de se donner la fonction φ et d'en déduire les directions principales en chaque point, on peut inversement se donner ces dernières, puis chercher dans quels cas il existe une fonction φ correspondante, et quelle est alors cette fonction.

On multiplierait sans peine les questions de ce genre; mais il est plus aisé de les imaginer que de les résoudre.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES HYPOHERMITIENNES
 n -aires;

Par M. L. AUTONNE.

1° Je me propose de compléter certains résultats énoncés dans mes publications antérieures :

I. — *Sur l'Hermitien* (Rendiconti du Cerchio matematico di Palermo, 1902).

II. — *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1902).

III. — *Sur l'Hypohermitien* (même Recueil, 1903).

IV. — *Sur la canonisation des formes bilinéaires* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1903).

Je supposerai aussi connues du lecteur les propriétés des matrices bilinéaires telles que les a exposées M. Frobenius dans ses remarquables travaux, notamment :

V. — *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (J. f. r. u. a. M., t. 84, p. 1).

VI. — *Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* (Sitzungsberichte de l'Académie des Sciences de Berlin, 1896, p. 7) ⁽¹⁾.

2° Soit A une hypohermitienne n -aire. L'équation caractéristique Θ

$$|x\mathbf{E} - A| = (x - a)^g (x - b)^h (x - c)^k \dots = 0, \\ n = g + h + k + \dots$$

aura l racines *distinctes* $a, b, c, \dots$. Les successifs (*Elementarteiler*) seront tous simples et seront $x - a, \dots, x - b, \dots, x - c, \dots$.

Enfin les racines $a, b, c, \dots$ de Θ seront des nombres réels, positifs ou nuls.

Désignons par $\psi(x)$ le polynome

$$\psi(x) = x^l + \dots = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

L'équation de degré minimum à laquelle satisfait la matrice A est $\psi(A) = 0$. Toute fonction rationnelle $f(A)$ peut, sous le bénéfice de $\psi(A) = 0$, s'écrire

$$f(A) = d_0 A^{l-1} + d_1 A^{l-2} + \dots + d_{l-2} A + d_{l-1} \mathbf{E};$$

le polynome $f(x)$ est

$$f(x) = d_0 x^{l-1} + \dots + d_{l-2} x + d_{l-1}.$$

Comme les successifs sont tous simples pour l'hypohermitienne A , le cas d'exception (V, p. 25, théorème V) ne se présente pas. L'équation caractéristique afférente à $f(A)$ sera

$$|x\mathbf{E} - f(A)| = [x - f(a)]^g [x - f(b)]^h \dots = 0,$$

et les successifs, encore tous simples, seront

$$x - f(a), \quad x - f(b), \quad x - f(c), \quad \dots$$

A et $f(A)$ admettent évidemment les mêmes canonisantes et, si A a été canonisée, il en est de même pour $f(A)$.

⁽¹⁾ Je renverrai à cette liste simplement en rappelant le chiffre romain qui désigne chaque travail.

3° Tout cela posé, passons à la première question, qui nous occupera :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(A)$ soit aussi une hypohermitienne?

Comme A et $f(A)$ se laissent en même temps canoniser par une même *canonisante unitaire*, il faut et il suffit évidemment, pour rendre $f(A)$ hypohermitienne, que les quantités

$$f(a), f(b), f(c), \dots$$

soient réelles et non négatives.

Le rang q d'une hypohermitienne n -aire est donné par la relation : $n - q =$ le nombre des racines nulles dans l'équation caractéristique.

Ce rang q est, en général, différent pour $f(A)$.

4° Voici maintenant le second problème qui nous occupera.

J'ai démontré (III) que, A étant une hypohermitienne n -aire quelconque, il existait toujours une et une seule hypohermitienne

$B = A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}$ telle que $B^m = A$; $m =$ entier positif. La méthode donnée pour la construction de B est fondée sur la canonisation préalable de A et n'est satisfaisante qu'en théorie. Le calcul direct devient bien vite impraticable (*voir*, par exemple, I, 26°, le cas $m = n = 2$).

On va chercher s'il est possible d'exprimer $A^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle $f(A)$ (2°).

Nommons $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les nombres réels et non négatifs, qui sont les racines $m^{\text{ièmes}}$ arithmétiques de $a, b, c, \dots$. En vertu de ce qui précède, il suffit de faire

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad f(c) = \gamma, \quad \dots$$

c'est-à-dire de définir les coefficients d_r du polynome f par les l relations

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_r d_r a^{l-1-r} = \alpha, \\ \sum_r d_r b^{l-1-r} = \beta, \\ \dots\dots\dots \\ r = 0, 1, \dots, l-1, \end{cases}$$

où le déterminant des l inconnues d_r est $\neq 0$, puisque les l racines $a, b, c, \dots$ sont toutes distinctes.

Ce calcul des d_r se résume d'ailleurs dans une formule unique

$$(2) \quad 0 = \begin{vmatrix} \Lambda^{l-1} & \Lambda^{l-2} & \dots & \Lambda^2 & \Lambda & E & \Lambda^{\frac{1}{m}} \\ a^{l-1} & a^{l-2} & \dots & a^2 & a & 1 & \alpha \\ b^{l-1} & b^{l-2} & \dots & b^2 & b & 1 & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

obtenue en éliminant les l inconnues d_r entre les l relations (1) et

$$(\Lambda) = \Lambda^{\frac{1}{m}}.$$

5° Comme application facile, extrayons la racine carrée d'une hermitienne binaire H , de déterminant un . C'est le cas $m=n=2$ (déjà traité, I, 26°).

Il viendra

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad |H| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1;$$

$$\psi(x) = |xE - H| = x^2 - x(h_{11} + h_{22}) + 1 = (x - a)(x - b);$$

$$ab = \alpha\beta = 1.$$

La formule (2) donne, après départ de $\alpha - \beta$,

$$\begin{vmatrix} H & E & H^{\frac{1}{2}} \\ a & 1 & \alpha \\ b & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

$$H^{\frac{1}{2}} = \frac{H + E}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} h_{11} + 1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} + 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\tau = (\alpha + \beta)^{-1};$$

il viendra

$$\tau^{-2} = \alpha^2 + \beta^2 + 2 = h_{11} + h_{22} + 2,$$

car

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2; \quad ab = \alpha\beta = 1; \quad a + b = h_{11} + h_{22}.$$

Cela est bien d'accord avec le calcul ancien (I, 26°).

QUELQUES REMARQUES SUR LES ENSEMBLES DE DROITES OU DE PLANS;

Par M. ÉMILE BOREL.

La notion d'*ensemble* de points est aujourd'hui tout à fait classique; il semble que l'on soit moins habitué à considérer des ensembles dont les éléments sont d'autres éléments géométriques ⁽¹⁾; cependant, certains de ces ensembles, par exemple les ensembles de droites dans le plan ou de plans dans l'espace, se présentent dans bien des recherches et leur étude systématique, d'ailleurs aisée, est presque aussi utile que l'étude des ensembles de points. Ayant été amené dans un Mémoire récent ⁽²⁾ à utiliser de tels ensembles, je voudrais en indiquer ici quelques propriétés très simples et très élémentaires, qui me paraissent de nature à pouvoir rendre des services dans de nombreuses questions ⁽³⁾.

Il importe tout d'abord de définir ce que l'on doit entendre par *droites infiniment voisines* d'une droite donnée; nous adopterons la définition *géométrique* suivante : *Étant donnée une droite fixe D, la droite variable D' sera dite infiniment voisine de D si, deux points quelconques A et B étant choisis sur D, on peut à tout nombre positif ε faire correspondre une position de D' telle que la distance à D' de chacun des points A et B soit inférieure à ε .* Il est aisé de voir que le choix des points A et B sur D peut être fait arbitrairement; si la définition est vérifiée avec un choix particulier de ces deux points, elle est vérifiée avec *tout* choix de ces deux points, pourvu qu'ils soient distincts.

(1) Bien entendu, je ne veux pas dire que l'on n'a jamais considéré de tels ensembles; mais leur introduction ne paraît pas être classique, c'est-à-dire que l'on n'en parle pas habituellement sans explications préalables, comme on fait pour les ensembles de points.

(2) *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* (*Journal de Mathématiques*, 1903, p. 329-375). Je dois signaler une erreur d'impression dans ce Mémoire: p. 372, dans l'énoncé du théorème XVI^{bis}, au lieu de *borné*, on doit lire *borné et fermé*.

(3) On pourrait évidemment se borner à dire que tout être géométrique dépendant de n paramètres peut être représenté par un point dans l'espace à n dimensions; on ramène ainsi les ensembles quelconques aux ensembles de points. Mais ces indications générales demandent à être complétées dans chaque application particulière.

De même, étant donné un plan fixe P , le plan variable P' sera dit *infiniment voisin* de P si, trois points quelconques non en ligne droite A, B, C , étant choisis sur P , on peut à tout nombre positif ε faire correspondre une position de P' telle que la distance à P' de chacun des points A, B, C soit inférieure à ε .

Les définitions précédentes sont *invariantes* par une transformation homographique quelconque, si, par cette transformation, la droite D ou le plan P ne sont pas *rejetés à l'infini*. Si D ou P sont à l'infini, on les ramènera à distance finie par une transformation homographique et, *par définition*, la droite variable D' sera dite *infiniment voisine* de D , si la transformée homographique de D' est infiniment voisine de la transformée homographique de D . De même pour les plans ⁽¹⁾.

Étant donné un ensemble de droites (ou de plans), l'*ensemble dérivé* est, par définition, l'ensemble des droites (ou des plans) telles qu'il y ait des droites de l'ensemble infiniment voisines de ces droites ⁽²⁾. On dira qu'un ensemble est *fermé* ⁽³⁾ s'il contient tous les éléments de l'ensemble dérivé et qu'il est *parfait* s'il est identique avec l'ensemble dérivé.

Un ensemble est dit *borné* lorsque, étant donné un point quelconque O , il existe un nombre A tel que la distance du point O à une droite (ou plan) quelconque de l'ensemble soit inférieure à A ; bien évidemment, si cette propriété est vérifiée pour un

(1) Il y aurait, à mon avis, grand intérêt à définir de même la notion de *limite* et toutes les notions qui s'y rattachent, en se plaçant à un point de vue *projectif*, c'est-à-dire en ne faisant pas jouer aux points à l'infini un rôle spécial. Je me propose de développer prochainement cette indication d'une manière systématique; il en résultera, à ce qu'il me semble, de grandes simplifications dans bien des questions d'Analyse.

(2) Il y a parfois avantage à considérer certains éléments de l'ensemble comme y figurant *une infinité de fois*; dans ce cas, ces éléments doivent être considérés comme appartenant à l'ensemble dérivé; mais il faut avoir soin de prévenir expressément lorsqu'on s'écarte ainsi de l'usage. Voir à ce sujet HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 15, note au bas de la page, et BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 22, note au bas de la page.

(3) Dans mes *Leçons sur la Théorie des fonctions* j'avais introduit l'appellation : *relativement parfait* pour les ensembles *fermés* (que M. Jordan appelle *parfaits* et qui ont effectivement beaucoup d'analogies avec les ensembles parfaits; il est souvent indifférent qu'un ensemble soit fermé ou parfait); l'expression : *ensemble fermé* est plus usitée.

point O elle est vérifiée pour tous les points de l'espace (Λ peut varier avec le point choisi).

Pour qu'un ensemble soit borné, il est nécessaire et suffisant que son ensemble dérivé ne renferme pas la droite de l'infini, s'il s'agit d'un ensemble de droites dans le plan, et ne renferme pas le plan de l'infini, s'il s'agit d'un ensemble de plans dans l'espace.

On en conclut immédiatement que : *Si un ensemble de droites dans le plan est tel que son ensemble dérivé ne se compose pas de toutes les droites du plan, on peut le transformer en un ensemble borné par un ensemble homographique convenable; il en est de même pour un ensemble de plans de l'espace dont l'ensemble dérivé ne comprend pas tous les plans de l'espace.*

La question est plus délicate pour un ensemble de droites dans l'espace; tout ce que l'on peut immédiatement affirmer, c'est qu'un ensemble de droites peut être transformé en un ensemble borné par une transformation homographique, s'il existe un plan qui ne soit pas un *plan limite* de l'ensemble. On entend par *plan limite* tout plan tel que si l'on y trace trois droites D, D', D'' , non concourantes, on peut à tout nombre positif ε faire correspondre une droite Δ de l'ensemble non située dans ce plan et telle que le moment de Δ par rapport à chacune des droites D, D', D'' soit inférieur à ε ; un plan est aussi dit *plan limite* s'il renferme une infinité de droites de l'ensemble.

Mais on peut aller plus loin et montrer que tout plan limite P renferme au moins une *droite limite*, c'est-à-dire une droite appartenant à l'ensemble dérivé. Cela est évident si le plan limite renferme une infinité de droites de l'ensemble; dans le cas contraire, on peut se donner un nombre ε , et déterminer une droite Δ non située dans le plan P , telle que ses moments par rapport à D, D', D'' soient inférieurs tous trois à ε_1 ; comme ces moments ne peuvent être nuls tous les trois, on peut choisir un nombre positif ε_2 inférieur au plus grand d'entre eux et inférieur aussi à $\frac{\varepsilon_1}{2}$ et déterminer une droite Δ_2 non située dans le plan P et telle que ses moments par rapport à D, D', D'' soient inférieurs à ε_2 ; on choisira ensuite ε_3 inférieur au plus grand de ces moments et à $\frac{\varepsilon_2}{2}$ et ainsi de suite à l'infini. Désignons par $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$,

les points d'intersection avec P de $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$; ces points sont à distance finie ou infinie; ils ont en tous cas au moins un point-limite A à distance finie ou infinie; si A est à l'infini nous le ramènerons à distance finie par une transformation homographique. Ceci fait, choisissons des nombres tendant vers zéro $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n, \dots$, et soient $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \dots, \Lambda'_n, \dots$ des points choisis parmi les points $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$, et tels que l'on ait $\Lambda\Lambda'_n < \varepsilon_n$ (les points Λ'_n pourraient tous coïncider avec A); désignons par $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n, \dots$ les droites qui correspondent à $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \dots, \Lambda'_n, \dots$, et par $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \dots$ les droites passant par A et parallèles aux projections sur P de $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n, \dots$. L'ensemble des droites concourantes $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \dots$ admet au moins une droite limite δ ; on démontre aisément que cette droite est une droite limite de l'ensemble qui comprend $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$. On en conclut qu'un ensemble de droites peut être transformé en un ensemble borné par une transformation homographique dans le cas et seulement dans le cas où il existe un plan ne renfermant aucune droite de l'ensemble dérivé (il existe alors forcément une infinité de plans ayant cette propriété).

On voit, par ces exemples qu'il serait aisé de multiplier, quel intérêt propre peut avoir l'étude géométrique des ensembles de droites et de plans.

SUR LES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. RAOUL PERRIN.

I. Dans une précédente Communication ⁽¹⁾, j'ai démontré que l'équation différentielle des coniques

$$(1) \quad 9y''^2y' - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^2 = 0$$

conduit, lorsqu'on y remplace $y'', y''', \dots$ par leurs expressions en fonction de R, ρ_1, ρ_2, ρ_3 (rayons de courbure de la conique et de ses développées successives en des points correspondants, affectés des signes convenables pour que ce soient aussi les dé-

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 54.

rivées successives de l'arc S de la conique par rapport à l'angle φ que fait la tangente avec une direction fixe), à l'équation différentielle intrinsèque

$$(2) \quad 9R^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45R\rho_1\rho_2 + 40\rho_1^3 = 0.$$

J'ai établi en outre que, si l'on écrit ainsi l'équation générale finie des coniques

$$(3) \quad ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0$$

et que l'on pose

$$(4) \quad \begin{cases} \delta = ab - h^2, \\ \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2, \end{cases}$$

les équations (1) et (2) admettent respectivement pour intégrales premières

$$(5) \quad 3^6 \delta^3 y''^8 = \Delta^2 (3y'' y^{iv} - 5y'''^2)^3,$$

$$(6) \quad 3^6 \delta^3 R^{10} = \Delta^2 (9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2)^3 \sin^2 \omega$$

(ω étant l'angle des axes de coordonnées).

Les parenthèses des seconds membres des équations (5) et (6), égales à zéro, fournissent respectivement l'équation différentielle ordinaire et l'équation différentielle intrinsèque des paraboles.

II. J'ai remarqué depuis que l'équation

$$(7) \quad \alpha R^2 + \beta R\rho_2 + \gamma \rho_1^2 = 0$$

comprend comme cas particuliers, non seulement l'équation des paraboles ($\alpha = 9$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$), comme il vient d'être dit, mais aussi les équations générales d'autres familles de courbes bien connues, savoir :

$$(8) \quad 18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2 = 0, \quad \text{hyperboles équilatères,}$$

$$(9) \quad 4R^2 - 2R\rho_2 + 3\rho_1^2 = 0, \quad \text{chainettes,}$$

$$(10) \quad 4R^2 - 4R\rho_2 + 5\rho_1^2 = 0, \quad \text{courbes de poursuite,}$$

dans le cas où la vitesse du poursuivant est moitié de celle du poursuivi.

Il est à remarquer que ces quatre familles comprennent des

courbes dont les branches ont toutes une forme analogue, c'est-à-dire possèdent un sommet à distance finie et deux bras s'étendant à l'infini de part et d'autre du sommet, avec courbure régulièrement décroissante.

D'autre part, l'équation (7) admet, comme il est facile de le vérifier, l'intégrale première

$$(11) \quad \alpha R^2 + (\beta + \gamma) \rho_1^2 = k R^{-\frac{2\gamma}{\beta}},$$

où k est la constante d'intégration, que l'on peut d'ailleurs exprimer par $\alpha R_0^{-2\frac{\beta+\gamma}{\beta}}$, en appelant R_0 le rayon de courbure au sommet (point pour lequel $\rho_1 = 0$).

Par conséquent, pour toutes les courbes dont il s'agit, le rayon de courbure de la développée est lié à celui de la courbe au point correspondant par la formule

$$(12) \quad \rho_1 = R \sqrt{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2\frac{\beta+\gamma}{\beta}} - 1},$$

qui donne en particulier

$$\rho_1 = 3R \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \quad \text{pour la parabole,}$$

$$\rho_1 = 3R \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{4}{3}} - 1} \quad \text{pour l'hyperbole équilatère,}$$

$$\rho_1 = 2R \sqrt{\frac{R}{R_0} - 1} \quad \text{pour la chaînette,}$$

$$\rho_1 = 2R \sqrt{\left(\frac{R}{R_c}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la courbe de poursuite} \\ \text{particulière.} \end{array} \right.$$

III. Il était à prévoir que l'équation (8) des hyperboles équilatères conduirait à une intégrale de (2) analogue à celle (6) que fournit l'équation des paraboles. Et, en effet, si l'on pose

$$(\alpha R^2 + \beta R \rho_2 + \gamma \rho_1^2)^m = k R^n$$

et que l'on cherche à déterminer α , β , γ , m et n de manière que l'élimination de k entre cette équation et sa dérivée conduise précisément à l'équation (2), on trouve deux systèmes de solu-

tions, savoir :

$$\begin{aligned} m = 3, \quad n = 10, \quad \alpha = 9, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 4, \\ m = 3, \quad n = 8, \quad \alpha = 18, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 5, \end{aligned}$$

dont le premier fournit l'intégrale (6) déjà connue, et le second, la nouvelle intégrale que voici :

$$(13) \quad (18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2)^3 = kR^8.$$

La parenthèse du premier membre de cette équation égalée à zéro donne bien, comme il était prévu, l'équation différentielle intrinsèque des hyperboles équilatères.

A cette nouvelle intégrale de (2) doit évidemment correspondre une nouvelle intégrale de (1), distincte de celle (5) déjà connue : pour la former explicitement, il suffit de remplacer dans (13) R , ρ_1 , ρ_2 par leurs expressions en fonction de y' , y'' , y''' , y^{IV} , ω .

J'ai donné, dans la Note précitée, ces expressions [formules (18)] quand $\omega = \frac{\pi}{2}$; dans le cas de ω quelconque, les formules à employer sont les suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} R = \frac{\omega^2 y''^3}{\sin \omega}, \\ \rho_1 = \frac{R}{\sin \omega} [3(y' + \cos \omega) - \omega y''^2 y'''], \\ \rho_2 = \frac{R}{\sin^2 \omega} \left[9(y' + \cos \omega)^2 + 3\omega - 8\omega y''^2 y'''(y' + \cos \omega) \right. \\ \quad \left. + \omega^2 y''^3 (3y'''^2 - y'' y^{IV}) \right], \\ \omega = 1 + y'^2 + 2y' \cos \omega. \end{cases}$$

En opérant la substitution indiquée, on trouve pour la nouvelle intégrale cherchée l'équation

$$(15) \quad \begin{cases} k y''^{10} \sin^4 \omega = [9y''^4 - 6y''^2 y'''(y' + \cos \omega) \\ \quad + (1 + y'^2 + 2y' \cos \omega)(3y'''^2 - 4y''^2 y^{IV})]^3. \end{cases}$$

Mais on aperçoit immédiatement que cette équation renferme non pas seulement une, mais bien *deux* constantes arbitraires indépendantes l'une de l'autre, savoir $k \sin^4 \omega$ et $\cos \omega$, en sorte qu'elle doit fournir deux intégrales distinctes, chacune à une seule constante.

Pour dégager ces deux intégrales distinctes et obtenir en même

temps leur interprétation géométrique, remplaçons dans (15) y'' , y''' , y^{IV} par leurs valeurs en fonction des coefficients de l'équation générale (3), savoir, comme il a été indiqué dans ma Note précitée :

$$y'' = \pm \Delta v^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \mp \frac{3}{2} \Delta v^{-\frac{5}{2}} v',$$

$$y^{IV} = \pm \frac{3}{4} \Delta v^{-\frac{7}{2}} (5v'^2 - 2vv''),$$

$$v = -\delta x^2 - 2(fh - bg)x + f^2 - bc, \quad v' = -2(\delta x + bg - fh),$$

$$v'' = -2\delta, \quad 2vv'' - v'^2 = 4b\Delta.$$

L'équation (15) se transforme alors en la relation suivante :

$$k \sin^4 \omega = - \frac{3^6 (a + b - 2h \cos \omega)^3}{\Delta},$$

qui donne l'expression de $k \sin^4 \omega$ en fonction de a , b , h et $\cos \omega$. En la reportant dans l'équation (15), celle-ci devient

$$0 = 9(a + b - 2h \cos \omega) y''^{\frac{10}{3}} + \Delta^{\frac{1}{3}} [9y''^{10} - 6y''^2 y''' (y' + \cos \omega) \\ + (1 + y'^2 + 2y' \cos \omega) (3y'' y^{IV} - 4y''^2)],$$

et, puisque ω est arbitraire, on peut évaluer à zéro séparément le coefficient de $\cos \omega$ et la partie indépendante de ω , ce qui fournit les deux intégrales distinctes cherchées, savoir :

$$(16) \quad 3^6 (a + b)^3 y''^{10} = \Delta [6y' y''^2 y''' - 9y''^4 + (1 + y'^2) (4y''^2 - 3y'' y^{IV})]^3,$$

$$(17) \quad 3^6 h^3 y''^{10} = \Delta (3y' y'' y^{IV} - 4y' y''^2 - 3y''^2 y''')^3.$$

Les parenthèses des seconds membres de ces deux équations, égalées à zéro, fournissent les équations différentielles des deux systèmes de coniques qui sont respectivement caractérisées par les relations

$$a + b = 0, \quad h = 0,$$

entre les coefficients de leur équation en coordonnées cartésiennes.

Au point de vue géométrique, la première de ces relations exprime que les directions des points à l'infini de la conique sont avec l'une ou l'autre bissectrice des axes de coordonnées des

angles θ_1, θ_2 , satisfaisant à la condition

$$(18) \quad \tan \theta_1 \tan \theta_2 = - \tan^2 \frac{\omega}{2}.$$

La seconde exprime que les directions des axes de coordonnées sont conjuguées par rapport à la conique.

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$ (coordonnées rectangulaires), la condition (18) caractérise les hyperboles équilatères, et la relation $h = 0$ les coniques dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Appelons *coniques pseudo-équilatères* celles qui satisfont à la condition (18) et *coniques axiales* celles qui admettent les directions des axes de coordonnées comme directions conjuguées, et posons

$$(19) \quad \begin{cases} H_1 = 6y'y''^2y''' - 9y''^4 + (1 + y'^2)(4y'''^2 - 3y''y^{IV}), \\ H_2 = y'(3y''y^{IV} - 4y'''^2) - 3y''^2y''', \\ D = y'', \\ P = 3y''y^{IV} - 5y'''^2. \end{cases}$$

Les équations

$$D = 0, \quad P = 0, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0$$

seront respectivement les équations différentielles des droites, des paraboles, des coniques pseudo-équilatères et des coniques axiales, et les trois intégrales premières que nous avons obtenues pour l'équation (1), savoir (5), (16) et (17), pourront s'écrire

$$(20) \quad \begin{cases} PD^{-\frac{8}{3}} = 9\hat{c}\Delta^{-\frac{2}{3}}, \\ H_1 D^{-\frac{10}{3}} = 9(a+b)\Delta^{-\frac{1}{3}}, \\ H_2 D^{-\frac{10}{3}} = 9h\Delta^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Puisque $\hat{c} = ab - h^2$, ces formules permettent de transformer en une expression différentielle, fonction de D, P, H_1 et H_2 , toute fonction de $\frac{a}{\Delta^3}, \frac{b}{\Delta^3}, \frac{h}{\Delta^3}$ et de former, par conséquent, l'équation

différentielle de tout système de coniques défini par une relation entre ces trois quantités, c'est-à-dire par une relation où ne figurent que la forme ou l'orientation, ou les deux ensemble, mais non la position absolue dans le plan.

On tire en effet de (20)

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\Delta^3} = \frac{D^{-\frac{10}{3}}}{18} (H_1 + \sqrt{H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4}), \\ \frac{b}{\Delta^3} = \frac{D^{-\frac{10}{3}}}{18} (H_1 - \sqrt{H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4}), \\ \frac{h}{\Delta^3} = \frac{1}{9} H_2 D^{-\frac{10}{3}}, \\ \frac{\cos \omega}{\Delta^3} = \frac{1}{9} PD^{-\frac{8}{3}}. \end{array} \right.$$

Proposons-nous, par exemple, de former l'équation différentielle du système des coniques semblables à une conique donnée. On sait que l'expression

$$\frac{ab - h^2}{(a + b - 2h \cos \omega)^2}$$

a la même valeur pour toutes les coniques semblables. Soit q cette valeur pour la conique donnée. On trouvera immédiatement pour l'équation demandée

$$(22) \quad 9PD^4 - q(H_1 - 2H_2 \cos \omega)^2 = 0.$$

Si l'on veut obtenir l'équation différentielle des cercles, il faut poser

$$a = b, \quad h = a \cos \omega,$$

ce qui donne les deux équations

$$\begin{aligned} H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4 &= 0, \\ 2H_2 &= H_1 \cos \omega, \end{aligned}$$

dont la première représente le système des coniques ayant leurs axes parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

Si, dans ces deux équations, on remplace P , D , H_1 , H_2 par leurs expressions en y' , y'' , y''' , y^{IV} , il suffira d'éliminer y^{IV} pour obtenir l'équation cherchée; mais le résultat ne s'obtiendrait que par un calcul pénible. Il est beaucoup plus simple de poser $z_1 = 0$, ce qui équivaut, d'après l'une des formules (14), à

$$(23) \quad 3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' + \cos \omega (3y''^2 - 2y'y''') = 0;$$

telle est l'équation des cercles.

Connaissant trois intégrales premières de (1), chacune avec une constante arbitraire, il suffit d'éliminer entre elles y'' et y''' pour obtenir une intégrale troisième à trois constantes arbitraires, c'est-à-dire une équation différentielle du second ordre, relation entre y' , y'' et les constantes

$$\frac{a+b}{\Delta^3}, \quad \frac{h}{\Delta^3}, \quad \frac{ab-h^2}{\Delta^3}.$$

Le calcul donne pour cette équation différentielle

$$(24) \quad 0 = \left\{ \Delta^{\frac{2}{3}} y''^{\frac{4}{3}} + [4hy' + (a+b)(1+y'^2)] \Delta^{\frac{1}{3}} y''^{\frac{2}{3}} \right. \\ \left. + 2(1+y'^2)^2 + [(a+b)y' + h(1+y'^2)]^2 \right\}.$$

On en tire alors deux expressions

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{1}{3}} y''^{\frac{2}{3}} &= -(ay'^2 + 2hy' + b) \\ &= -(by'^2 + 2hy' + a), \end{aligned}$$

dont la seconde seule se trouve vérifiée, quand on y reporte la valeur de y' , savoir

$$y' = \frac{1}{2b} (-2h \pm c^{-\frac{1}{2}} v'),$$

où v et v' ont les significations données précédemment.

Comme d'ailleurs le rayon de courbure R en un point quelconque est égal à $\frac{(1+y'^2+2y'\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}{y''\sin\omega}$, on arrive à cette expression du rayon de courbure au point où le coefficient angulaire de la tangente est y' , en fonction des coefficients de l'équation générale et de l'angle ω des axes de coordonnées

$$(25) \quad R = \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{\sin\omega} \left(\frac{1+y'^2+2y'\cos\omega}{by'^2+2hy'+a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si la conique donnée est un cercle, son rayon sera donc

$$R = \frac{\sqrt{f^2+g^2-2fg\cos\omega-ac\sin^2\omega}}{a\sin\omega},$$

comme il est facile de le vérifier directement.

IV. Des résultats analogues peuvent être obtenus au moyen des

équations différentielles intrinsèques (6) et (13), qui sont deux intégrales premières distinctes de (2). La signification géométrique de la constante k qui figure dans (13) a d'ailleurs été donnée ci-dessus, en sorte que ces deux intégrales premières de (2) peuvent s'écrire

$$(26) \quad 9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2 = 9\delta\Delta^{-\frac{2}{3}}\sin^{-\frac{2}{3}}\omega R^{\frac{10}{3}}.$$

$$(27) \quad 18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2 = -9(a+b-2h\cos\omega)\Delta^{-\frac{1}{3}}\sin^{-\frac{1}{3}}\omega R^{\frac{8}{3}}.$$

L'élimination de ρ_2 est immédiate et donne l'intégrale seconde

$$(28) \quad R^2 - \left(\frac{\rho_1}{3}\right)^2 - \frac{\delta}{(\Delta\sin\omega)^2} R^{\frac{10}{3}} + \frac{a+b-2h\cos\omega}{\Delta^{\frac{1}{3}}\sin^{\frac{1}{3}}\omega} R^{\frac{8}{3}} = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\rho_1}{3R} = u, \quad \frac{R^2}{\Delta\sin\omega} = v^3,$$

cette équation peut s'écrire

$$(29) \quad u^2 + \delta v^2 + \frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin\omega} v + 1 = 0.$$

On en tire l'expression de ρ_1 en fonction de R , et aussi celle de R aux sommets de la courbe pour lesquels $\rho_1 = 0$, savoir :

$$(30) \quad R = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin\omega} \left[\frac{2h\cos\omega - (a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2 - 4(a+b)h\cos\omega}}{2\delta} \right]^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de ρ_1 entre (26) et (27) donne de même

$$\frac{\rho_2}{3R} = - \left(3 + 4 \frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin\omega} v + 5\delta v^2 \right).$$

Par des différentiations successives, on pourrait obtenir de même $\frac{\rho_3}{\rho_1}$, $\frac{\rho_4}{R}$, $\frac{\rho_5}{\rho_1}$, ... en fonction de v , c'est-à-dire de $R^{\frac{2}{3}}$; et, si l'on élimine v entre deux de ces relations, on pourra obtenir une relation où n'entrera plus R et qui, par conséquent, s'appliquera, en augmentant tous les indices des ρ d'une unité, aux développées successives de la conique caractérisée par les valeurs données aux constantes arbitraires a , b , h .

On peut donner à ces équations une forme plus élégante en

remarquant que l'aire S de la conique et celle Γ de son cercle orthoptique ont respectivement pour expressions

$$(31) \quad S = \frac{\pi \Delta \sin \omega}{\varrho^2}, \quad \Gamma = - \frac{\pi \Delta (a + b - 2h \cos \omega)}{\varrho^2}.$$

Soient alors C, C_1, C_2 les aires des cercles de courbure en un point arbitraire de la conique et aux points correspondants de la première et de la seconde développée. Les équations (26) et (27) pourront s'écrire (1)

$$(32) \quad 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_2}{C}} + \frac{4}{9} \frac{C_1}{C} - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

$$(33) \quad 2 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_2}{C}} + \frac{5}{9} \frac{C_1}{C} - \frac{C^{\frac{1}{3}} \Gamma}{S^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

et l'équation (28)

$$(34) \quad \frac{1}{9} \frac{C_1}{C} + \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma}{S} - 1 = 0.$$

Ces diverses formules permettent de résoudre des problèmes tels que celui-ci :

On donne les équations (finies) de deux coniques quelconques. Si on les déplace, sans les déformer, de manière à les amener à avoir quatre points consécutifs communs, quelles seront les valeurs communes de R et de ϱ_1 au point de contact? Et quelle condition doit être remplie pour que le problème soit possible?

En se reportant à l'équation (34), il est clair que, aux points qui doivent venir en contact, C et C_1 doivent avoir la même valeur pour les deux coniques; si S et Γ sont les caractéristiques de l'une, S' et Γ' celles de l'autre, on aura, avec l'équation (34), celle-ci :

$$(34 \text{ bis}) \quad \frac{1}{9} \frac{C_1}{C} + \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma}{S}\right) - 1 = 0,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(35) \quad C = \frac{(\Gamma' S^{\frac{4}{3}} - \Gamma S'^{\frac{4}{3}})^3}{S^2 S'^2 (S'^{\frac{2}{3}} - S^{\frac{2}{3}})^3},$$

(1) La relation (32) figure déjà sous le n° (20) dans ma Note précitée.

ou, remplaçant S, S', Γ, Γ' par leurs valeurs (31) et C par πR^2 ,

$$(36) \quad R = \frac{\sqrt{\Delta\Delta'}}{\sin \omega} \left[\frac{(a' + b' - 2h' \cos \omega) \Delta^{\frac{1}{3}} - (a + b - 2h \cos \omega) \Delta'^{\frac{1}{3}}}{\delta \Delta^{\frac{2}{3}} - \delta' \Delta'^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que

$$\Delta\Delta' \frac{(a' + b' - 2h' \cos \omega) \Delta^{\frac{1}{3}} - (a + b - 2h \cos \omega) \Delta'^{\frac{1}{3}}}{\delta \Delta^{\frac{2}{3}} - \delta' \Delta'^{\frac{2}{3}}} > 0$$

et que, en outre, R calculé par la formule (36) soit, pour chacune des deux coniques, compris entre le maximum et le minimum qui lui conviennent.

Si les cercles orthoptiques des deux coniques sont égaux, la formule (35) devient

$$(37) \quad \left(\frac{C}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\Gamma}{S} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\Gamma}{S'} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour terminer, je donnerai l'équation différentielle intrinsèque des coniques semblables, correspondant à l'équation différentielle ordinaire (22). Ici $\frac{\Gamma}{S}$ doit avoir une valeur constante; mais

$$\frac{\Gamma}{S} = - \frac{(a + b - 2h \cos \omega)}{\delta^2 \sin \omega}.$$

Comparant avec (25) et (27), il vient

$$(38) \quad (18R^2 - 3R\rho_2 = 5\rho_1^2)^2 = 9 \frac{\Gamma^2}{S^2} R^2 (9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2),$$

ce qu'on peut écrire plus simplement

$$(39) \quad S^2 \mathcal{J}^2 - 9\Gamma^2 \mathcal{Q}^2 \mathcal{Q}' = 0,$$

en désignant par $\mathcal{J} = 0$, $\mathcal{Q} = 0$, $\mathcal{Q}' = 0$ les équations différentielles intrinsèques des hyperboles équilatères, des points ($R = 0$) et des paraboles. Si ces coniques semblables sont des cercles, pour lesquels $\rho_1 = \rho_2 = 0$, l'équation (38) exige que $\Gamma^2 = 4S^2$, comme cela devait être.

SUR L'EMPLOI SIMULTANÉ DE LOIS DE SURVIE DISTINCTES;

Par M. ALBERT QUIQUET.

Dans deux Communications faites à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, j'ai établi, il y a déjà plusieurs années, comment une formule, indiquée par Gompertz pour interpoler les Tables de survie, puis généralisée par Makeham, était susceptible d'une nouvelle généralisation. La fonction trouvée par les deux actuaires anglais jouit d'une propriété fort utile dans les assurances sur la vie, et j'avais surtout cherché à étendre cette propriété. Par l'emploi d'une loi de survie de Gompertz et de Makeham, en effet, on peut exprimer, à l'aide d'une seule variable, indépendante de x , la probabilité que dans x années un groupe quelconque d'individus, obéissant à cette loi, existera encore tout entier : la variable en question ne dépend que des âges de ces individus.

En employant les lois généralisées auxquelles conduisent les Communications précitées, on arrive à exprimer, à l'aide seulement de n variables, indépendantes de x , la probabilité que dans x années un groupe de $N = n + p$ individus, obéissant tous à une de ces lois généralisées, existera encore tout entier : les n variables ne dépendent que des $n + p$ âges, et p est un nombre entier positif absolument quelconque.

On conçoit l'intérêt pratique d'une propriété semblable, car, de cette probabilité, on passe aisément aux annuités viagères sur $n + p$ têtes et, de là, à diverses opérations usuelles d'assurances.

La loi de Gompertz et de Makeham n'est pas toujours suffisante comme biomètre, et en la généralisant ainsi j'offrais d'abord une plus grande variété de formules pour interpoler les Tables de survie; puis les efforts des calculateurs se dirigeaient dans une voie où ils retrouvaient, avec extension, une propriété célèbre de cette loi. Mais le problème de probabilité que j'avais résolu comportait une restriction : les $n + p$ individus devaient tous obéir à une même loi de survie.

Or les besoins croissants de l'industrie des assurances m'ont

(1) Voir *Comptes rendus*, 12 mai 1888 et 25 novembre 1889.

$F_0, F_1, \dots, F_n$ étant ce que deviennent F et ses n premières dérivées prises par rapport à x quand on y fait $x = 0$.

Mais les seconds membres de (3) sont au nombre de $n + 1$ et ne dépendent que de n variables, $\alpha, \beta, \dots, \theta$. Il y a donc une relation entre les premiers membres.

Ces premiers membres ne sont autre chose que $n + 1$ fonctions de $n + p$ variables indépendantes, $a, b, \dots, l$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait entre eux une relation indépendante de ces variables est, comme il résulte d'un Mémoire de Jacobi, que les déterminants fonctionnels de ces $n + 1$ fonctions par rapport à $n + 1$ quelconques des variables soient égaux à zéro.

L'un de ces déterminants fonctionnels est

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \psi'_1(a) & \psi'_2(b) & \dots \\ \psi''_1(a) & \psi''_2(b) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n+1)}(a) & \psi_2^{(n+1)}(b) & \dots \end{vmatrix}.$$

Pour que ce déterminant soit identiquement nul, il faut et il suffit qu'il y ait une même relation linéaire et homogène entre tous les éléments de chacune de ses lignes ou de ses colonnes. Soit en particulier, pour la première colonne,

$$A_0 \psi'_1(a) + A_1 \psi''_1(a) + \dots + A_n \psi_1^{(n+1)}(a) = 0;$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants de a et non tous nuls à la fois.

Comme a est un âge arbitraire, on peut dire que la fonction $\psi_1(z)$ satisfait à l'équation

$$A_0 \psi'_1(z) + A_1 \psi''_1(z) + \dots + A_n \psi_1^{(n+1)}(z) = 0.$$

Ce résultat a été obtenu avec la première colonne de (4). Si nous avons opéré avec la seconde, nous serions arrivés pareillement à

$$A_0 \psi'_2(z) + A_1 \psi''_2(z) + \dots + A_n \psi_2^{(n+1)}(z) = 0,$$

les $A_0, A_1, \dots, A_n$ étant *les mêmes* que ci-dessus.

En répétant toujours les mêmes raisonnements, soit avec une autre colonne de (4), soit avec une quelconque des colonnes des autres déterminants fonctionnels tels que (4) qui ont à intervenir,

nous voyons que toutes les conditions nécessaires et suffisantes de Jacobi se résument ici d'une manière bien simple :

Si $\psi_g(z)$ est une quelconque des fonctions $\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_N(z)$, cette fonction satisfait à

$$(5) \quad A_0 \psi'_g(z) + A_1 \psi''_g(z) + \dots + A_n \psi^{(n+1)}_g(z) = 0,$$

où les $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants de z et de g , c'est-à-dire constants.

(5) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre, et la suite du problème n'offre plus de difficultés. Aussi j'arrive de suite à l'expression générale des fonctions $\varphi_g(z)$.

Soit r_i une quelconque des racines de l'équation caractéristique

$$(6) \quad A_0 + A_1 r + \dots + A_n r^n = 0,$$

et λ_i son degré de multiplicité. On a

$$(7) \quad \varphi_g(z) = e^{A+Bz+\sum e^{r_i z} f_i(z)},$$

où $f_i(z)$ est un polynome de degré $\lambda_i - 1$ quand r_i n'est pas nulle et de degré $\lambda_i + 1$ quand r_i est nulle. Quant au signe Σ , il s'étend à toutes les racines distinctes de l'équation caractéristique.

Si l'équation caractéristique (6) est commune à toutes les fonctions (7) et par suite les racines r_i , par contre les constantes d'intégration A et B et les coefficients des polynomes $f_i(z)$, tout en étant des constantes par rapport à z , ne sont pas astreints à être identiques dans les diverses fonctions $\varphi_g(z)$. En d'autres termes, ces constantes peuvent passer pour des fonctions de g : de là les distinctions possibles entre les fonctions $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_N(z)$.

Comme applications, les cas où l'on fait intervenir des lois de survie distinctes commencent à être nombreux.

Lorsqu'il s'agit d'une rente de survie, les compagnies françaises usent de la Table de mortalité AF pour les assurés et de la Table RF pour les bénéficiaires.

Pour les rentes viagères sur deux ou plusieurs têtes, on essaie de tenir compte du sexe.

On étudie aussi la survie suivant l'âge à l'entrée.

L'assurance contre les accidents réclame des Tables de mortalité de valides et d'invalides, etc.

Pour ces divers objets on pressent les ressources de la variété presque indéfinie des fonctions (7), et, dans les calculs sur plusieurs têtes, les avantages de la propriété qui leur est commune.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS;

Par M. A. BOULANGER.

I. Je me propose de déterminer toutes les équations différentielles du troisième ordre

$$(1) \quad y''' = R(x, y, y', y''),$$

où R est rationnel en y'' , y' , analytique en y et x , qui admettent un groupe continu de transformations de la forme

$$(1) \quad X = x, \quad Y = F(x, y, a, b, c),$$

où F , rationnel en y , analytique en x , dépend essentiellement des trois paramètres a, b, c .

D'après un théorème très général de M. Painlevé (1), les équations qui admettent un tel groupe (1) transitif ont leurs points critiques fixes. A la vérité, de par la théorie des groupes, ces équations se ramènent à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures; mais on pourrait espérer que les inversions entraînées par cette réduction conduisent à des transcendentes uniformes nouvelles. Dans le cas du groupe (1), il n'en est rien, et nous allons établir ce résultat :

Les seules équations qui répondent à la question sont des équations linéaires ou se déduisent des équations linéaires par

(1) P. PAINLEVÉ, *Sur une relation entre la théorie des groupes continus et les équations différentielles à points critiques fixes* (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1171, 30 avril 1900); voir aussi *Acta Mathematica*, t. XXV.

une transformation homographique effectuée sur la fonction y , suivie ou non du changement de fonction $y = e^z$.

2. Les transformations infinitésimales de tout groupe (Γ) sont de la forme

$$(2) \quad X = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \xi = 0, \quad \tau_1 = \alpha + \beta y + \gamma y^2,$$

α, β, γ étant des fonctions analytiques de x . De plus, toute telle transformation peut, si l'on opère sur y une homographie convenable à coefficients fonctions de x , être ramenée à l'une des deux formes réduites

$$(3) \quad \xi = 0, \quad \tau_1 = \delta y,$$

$$(4) \quad \xi = 0, \quad \tau_1 = \varepsilon,$$

δ et ε dépendant de x .

D'autre part, d'après S. Lie ⁽¹⁾, tout groupe de transformations infinitésimales à trois paramètres peut, par un choix convenable de trois transformations indépendantes $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ prises dans la famille des transformations du groupe, être ramené à vérifier l'un des systèmes suivants :

$$(A) \quad (X_1 X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_3 f,$$

$$(B) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv c X_2 f \quad (c \neq 0, \neq 1),$$

$$(C) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_2 f,$$

$$(D) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f + X_2 f,$$

$$(E) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv 0,$$

$$(F) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv 0, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f,$$

$$(G) \quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv 0, \quad (X_2 X_3) \equiv 0.$$

Exprimons que trois transformations (2), distinguées par des indices, vérifient l'un de ces systèmes.

Les cas (B), (D), (E), (F) conduisent de suite à des impossibilités.

Dans le cas (G), $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ et $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ ne dépendent que de x ; les trois

⁽¹⁾ Voir, par exemple, S. LIE, *Th. der Transformationsgruppen*, t. III, p. 715, 716 ou LIE et SCHEFFERS, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, p. 490.

transformations se réduisent simultanément à la forme (3) ou à la forme (4); de là les deux types :

$$(\Gamma_1) \quad \boxed{X_1 f = \partial_1 y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = \partial_2 y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \partial_3 y \frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$(\Gamma_3) \quad \boxed{X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Dans le cas (C), $\frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}$ ne dépend que de x . On peut donc prendre

$$X_1 f = \partial_1 y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = \partial_2 y \frac{\partial f}{\partial y},$$

ou bien

$$X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les deuxième et troisième identités (C) conduisent alors à trois conditions entre les coefficients $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ de $X_3 f$, et qui sont contradictoires avec la première forme de $X_1 f, X_2 f$, tandis qu'elles donnent avec la seconde $X_3 f = (\alpha_3 - y) \frac{\partial f}{\partial y}$; en changeant y en $\alpha_3 - y$, on a le type canonique

$$(\Gamma_2) \quad \boxed{X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = y \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Enfin, dans le cas (A), on a neuf relations entre les coefficients α, β, γ de $X_1 f, X_2 f, X_3 f$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 &= \alpha_1, & \dots, \\ 2(\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) &= \beta_1, & \dots, \\ \beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2 &= \gamma_1, & \dots \end{aligned}$$

On reconnaît de suite qu'on ne peut supposer réductible à la forme ∂y ni τ_{11} , ni τ_{13} , pas plus que τ_{12} à la forme ε . Si τ_{12} est réductible à la forme $\partial_2 y$, on trouve d'abord $\partial_2 = \pm 1$; pour $\partial_2 = -1$, on est conduit à

$$X_1 f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{1}{\alpha_1} y^2 \frac{\partial f}{\partial y};$$

pour $\partial_2 = +1$, on obtient un système qui se ramène à celui-ci en

changeant y en $\frac{1}{y}$. Si η_3 est réductible à la forme ε_3 , on trouve

$$X_1 f = \frac{(z_2 + y)^2}{\varepsilon_3} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = (z_2 + y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial y},$$

et, en changeant y en $y - z_2$, on est ramené au type précédent. Résultat analogue avec $\eta_1 = \varepsilon$. On a donc la quatrième et dernière forme réduite

$$(\Gamma_1) \quad \boxed{X_1 f = \frac{1}{\varepsilon} y^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Les transformations infinitésimales prolongées jusqu'au troisième ordre sont

1° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta_1 = \varepsilon(x)$

$$\mathcal{V}f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon''' \frac{\partial f}{\partial y'''};$$

2° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta_1 = y$

$$\mathcal{V}f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} + y''' \frac{\partial f}{\partial y'''};$$

3° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta_1 = \partial y$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}f = & \partial y \frac{\partial f}{\partial y} + (\partial' y - \partial y') \frac{\partial f}{\partial y'} \\ & + (\partial'' y + 2\partial' y' + \partial y'') \frac{\partial f}{\partial y''} + (\partial''' y + 3\partial'' y' + 3\partial' y'' + \partial y''') \frac{\partial f}{\partial y'''} \end{aligned}$$

3. Considérons maintenant l'équation (1)

$$y''' = R(x, y, y', y''),$$

et supposons qu'elle admette un groupe (Γ) . La transformation homographique qui ramène les transformations infinitésimales de ce groupe à l'un des types canoniques $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ change cette équation en une autre de même forme

$$(5) \quad y''' = \mathcal{R}(x, y, y', y''),$$

où $\mathcal{R}$ est rationnel en y'' , y' , analytique en y , x . Nous allons

exprimer que cette équation (5) admet les trois transformations infinitésimales Γ_i .

Mais, en vertu du théorème de M. Painlevé, cette équation (5) doit avoir ses points critiques fixes, ce qui précise déjà la forme de $\mathcal{R}$, en tant que fonction de y'' et de y' . D'après les résultats démontrés par M. Painlevé ⁽¹⁾, l'équation (4) est de la forme

$$(6) \quad y''' = A y''^2 + B y'' + C;$$

de plus, A , regardé comme fonction de y' , n'a que des pôles simples, au nombre de trois au plus :

$$A = \frac{m}{y' + a} + \frac{n}{y' + b} + \frac{p}{y' + c},$$

m, n, p étant certains nombres commensurables, qui peuvent être nuls, et a, b, c étant des fonctions analytiques de x et y .

Enfin, B et C n'ont que des pôles simples en y' , coïncidant nécessairement avec ceux de A , et $\frac{B}{y'}, \frac{C}{y'^3}$ restent finis pour $y' = \infty$; d'où l'on déduit

$$B = \lambda y' + \mu + \frac{m_1}{y' + a} + \frac{n_1}{y' + b} + \frac{p_1}{y' + c},$$

$$C = \nu y'^3 + \varphi y'^2 + \tau y' + \tau + \frac{m_2}{y' + a} + \frac{n_2}{y' + b} + \frac{p_2}{y' + c};$$

$m_1, n_1, \dots, p_2$ sont des fonctions de x et de y telles que si $p = 0$ par exemple, on a aussi

$$p_1 = p_2 = 0;$$

$\lambda, \mu, \nu, \dots, \tau$ sont des fonctions de y et de x .

4. Examinons d'abord le cas où $A = 0$. L'équation est de la forme

$$y''' = (\lambda y' + \mu) y'' + \nu y'^3 + \varphi y'^2 + \tau y' + \tau.$$

Pour qu'elle admette la transformation prolongée

$$\zeta f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon''' \frac{\partial f}{\partial y'''},$$

(1) P. PAINLEVÉ, *Sur les équations du troisième ordre à points critiques fixes* (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 8-9; 2 avril 1900); voir aussi *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme* (*Soc. Math.*, t. XXVIII, 1900).

il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} -\varepsilon''' + \varepsilon''(\lambda y)' + \mu) &= \varepsilon'(\lambda y'' - 3\gamma y'^2 - 2\rho y' + \tau) \\ + \varepsilon \left(\gamma y'' \frac{\partial \lambda}{\partial y} + y'' \frac{\partial \mu}{\partial y} - y'^3 \frac{\partial \gamma}{\partial y} + y'^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} - y' \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\varepsilon \tau}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned}$$

De là les conditions

$$(e) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, & \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial y} - 3\varepsilon' \gamma = 0, & \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} - \varepsilon' \lambda = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} - 2\varepsilon' \rho - \varepsilon'' \lambda = 0, & \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} + \varepsilon' \tau + \varepsilon'' \mu - \varepsilon''' = 0. \end{cases}$$

1° Ces seules relations montrent que, s'il y a deux fonctions distinctes ε_1 et ε_2 les vérifiant (types Γ_2 et Γ_3), on doit avoir

$$\lambda = \gamma = \rho = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

et

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon''' - \varepsilon'' \mu(x) + \varepsilon' \tau(x)] = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\tau = \gamma f(x) + g(x).$$

L'équation se réduit à

$$y''' = \mu(x) y'' + \tau(x) y' + f(x) y + g(x);$$

c'est une équation linéaire non homogène. Les valeurs de ε vérifient l'équation sans dernier terme

$$\varepsilon''' = \mu(x) \varepsilon'' + \tau(x) \varepsilon' + f(x) \varepsilon.$$

2° Dans le cas du type (Γ_4) , les coefficients de l'équation doivent vérifier les relations (e) et aussi celles qui expriment que l'équation admet la transformation prolongée

$$yf = y \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - y''' \frac{\partial f}{\partial y'''};$$

c'est-à-dire qui expriment que l'on a identiquement

$$\begin{aligned} y \left(\gamma y'' \frac{\partial \lambda}{\partial y} - y'' \frac{\partial \mu}{\partial y} + y'^3 \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y'^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + y' \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\varepsilon \tau}{\partial y} \right) \\ - y'(\lambda y'' - 3\gamma y'^2 - 2\rho y' + \tau) - \gamma y'^3 - \rho y'^2 - \tau y' + \tau = 0. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$(e') \quad \begin{cases} \lambda = 0, & \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, & y \frac{\partial \nu}{\partial y} + 2\nu = 0, \\ y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho = 0, & \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, & y \frac{\partial \tau}{\partial y} - \tau = 0. \end{cases}$$

Les équations (e) et (e') entraînent

$$\lambda = \nu = \rho = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0,$$

et

$$\tau = y f(x).$$

L'équation (5) correspondante est donc linéaire et homogène.

Recherchons enfin les conditions pour que l'équation admette les transformations (Γ_4) . Elles résultent de l'identité

$$\begin{aligned} - & [\delta''' y + 3\delta'' y' + 3\delta' y'' + \delta(\lambda y'' y' + \mu y''' + \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau)] \\ & + (\delta'' y + 2\delta' y' + \delta y'')(\lambda y' + \mu) \\ & - (\delta' y + \delta y')(\lambda y'' + 3\nu y'^2 + 2\rho y' + \sigma) \\ & + \delta y \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} y'' y' + \frac{\partial \mu}{\partial y} y'' + \frac{\partial \nu}{\partial y} y'^3 + \frac{\partial \rho}{\partial y} y'^2 + \frac{\partial \sigma}{\partial y} y' + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

On obtient d'abord

$$\lambda + y \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad (\lambda y + 3) \delta' + \frac{\partial \mu}{\partial y} \delta = 0.$$

Cette seconde relation, devant être vérifiée par trois valeurs distinctes de δ , entraîne

$$\lambda = \frac{3}{y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

On a ensuite

$$2\nu + y \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0, \quad (2\lambda + 3\nu y) \delta' + \left(\rho + y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \delta = 0;$$

d'où

$$\nu = -\frac{2}{y^2}, \quad \frac{\partial(\rho y)}{\partial y} = 0.$$

En tenant compte de ces résultats, les conditions suivantes s'écrivent

$$\begin{aligned} 2(\mu + \rho y) \delta' + y \frac{\partial \sigma}{\partial y} \delta &= 0, \\ -\delta''' + \mu \delta'' + \sigma \delta' + \left(-\frac{\tau}{y} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \delta &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma = -\frac{\mu(x)}{y}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0,$$

$$y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{y} \right) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\tau}{y} = f(x) \operatorname{Log} y + g(x).$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$y''' = \frac{3yy'y'' - 2y'^3}{y^2} + \mu(x) \frac{yy'' - y'^2}{y} + \sigma(x)y' + f(x)y \operatorname{Log} y + yg(x),$$

ou

$$\left(\frac{y'}{y} \right)'' = \mu(x) \left(\frac{y'}{y} \right)' + \sigma(x) \frac{y'}{y} + f(x) \operatorname{Log} y + g(x).$$

En posant $y = e^z$, on est ramené à une équation linéaire en z .

5. Considérons maintenant le cas où $A \equiv 0$. En aucun cas, l'équation

$$\begin{aligned} y''' = & y''^2 \left(\frac{m}{y' + a} + \frac{n}{y' + b} + \frac{p}{y' + c} \right) \\ & + y'' \left(\frac{m_1}{y' + a} + \frac{n_1}{y' + b} + \frac{p_1}{y' + c} + \lambda y' + \mu \right) \\ & + \frac{m_2}{y' + a} + \frac{n_2}{y' + b} + \frac{p_2}{y' + c} + \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau \end{aligned}$$

ne saurait admettre les transformations (Γ_i) ($i = 2, 3, 4$). En effet, en prenant, dans l'identité qui exprime l'existence de la transformation prolongée

$$\mathfrak{U}f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} + y''' \frac{\partial f}{\partial y'''},$$

les termes en y''^2 et en annulant, on obtient

$$\sum \frac{m}{(y' + a)^2} \left(a - y \frac{\partial a}{\partial y} \right) = 0;$$

en opérant de même pour la transformation prolongée

$$\mathfrak{U}f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon''' \frac{\partial f}{\partial y'''},$$

on trouve

$$\sum \frac{m}{(y' + a)^2} \left(\varepsilon' + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} \right) = 0;$$

enfin, en prenant la transformation $Xf = \partial y \frac{\partial f}{\partial y}$, on arrive à

$$\sum \frac{m}{(y' + a)^2} \left[\partial \left(a - y \frac{\partial a}{\partial y} \right) - \partial' y \right] = 0.$$

Si m, n, p ne sont pas tous nuls, on aurait des identités de la forme

$$\varepsilon' + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

ou

$$\partial' y - \partial \left(a - y \frac{\partial a}{\partial y} \right) = c,$$

qui ne peuvent être vérifiées par plusieurs fonctions distinctes ε ou ∂ ; d'où l'impossibilité des groupes $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

Pour le type Γ_1 , si plus d'une des quantités m, n, p est différente de zéro, il y a aussi impossibilité; soit, par exemple, $mn \gtrless 0$, on a

$$\varepsilon' = -\varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}$$

et

$$a = y \frac{\partial a}{\partial y}, \quad b = y \frac{\partial b}{\partial y};$$

par suite $a = b$; ces deux pôles ne seraient pas distincts.

Il ne reste à examiner que le cas où m seul serait différent de zéro et où le groupe serait du type Γ_1 . Eu égard aux conditions

$$a - y \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon' + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

la considération des termes en y'' , dans les mêmes identités, conduit, pour la première transformation, à

$$\frac{\partial m_1}{\partial y} = m_1,$$

et, pour la seconde, à

$$2\varepsilon'' m + \varepsilon \frac{\partial m_1}{\partial y} = 0.$$

On conclut de là $\frac{\partial m_1}{\partial y} = 0$, puis $m = 0$, d'où contradiction.

6. En résumé, si $\Lambda \not\equiv 0$, l'équation (5) ne peut admettre un groupe (Γ) , et si $\Lambda \equiv 0$, elle ne le peut que si elle est linéaire ou réductible à une équation linéaire par le changement de fonction $y = e^z$.

Le théorème énoncé est donc complètement établi.

Ainsi, le groupe très simple (Γ) n'a pas conduit à des équations à points critiques fixes nouvelles. On pourrait alors se proposer d'étendre la question aux groupes

$$X = x, \quad Y = F(x, y),$$

où F est *algébrique* en y et dépend de trois paramètres distincts.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1903.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Communications :

M. Raffy : *Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces.*

M. Borel : *Sur les ensembles de droites.*

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1903.

PRÉSIDENTE DE M. PAINLEVÉ.

Élections :

MM. Louis Roche,	présenté par	MM. Blutel et Grévy ;
Niels Nielsen,	»	Picard et Painlevé ;
Zervos (Panaïotis),	»	Raffy et Estanave ;
G. Remoundos,	»	Painlevé et Raffy ;
F. Godey,	»	Raffy et Bricard ;
J.-O. Müller,	»	Hadamard et Borel ;
Fueter,	»	Hadamard et Borel ;
Lebeuf,	»	Bühl et Bricard,

sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines classes de surfaces isothermiques.*

M. Suchar : *Sur les équations différentielles du second degré, réciproques.*

M. Hadamard : *Sur les solutions à surface singulière des équations aux dérivées partielles linéaires* (solutions qui varient comme une puissance à exposant non entier; cas où la surface singulière est un conoïde caractéristique; applications aux solutions analogues à $\frac{1}{r}$).

M. Borel : *Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles au moyen de leurs singularités.*

M. HADAMARD fait la Communication suivante :

Sur les surfaces à courbure positive.

Un théorème bien connu d'Ossian Bonnet montre la connaissance de la courbure d'une surface comme capable de fournir, sur la forme d'une surface, des renseignements beaucoup plus précis qu'elle ne pourrait le faire sur la forme d'une courbe. Si, en effet, la courbure d'une surface est partout positive et supérieure à un nombre fixe, la surface est fermée et la plus grande distance géodésique de deux de ses points est inférieure à un nombre que l'on peut assigner. Rien de pareil ne peut être affirmé pour une courbe dont la courbure est toujours de même sens et limitée inférieurement. Celle-ci peut fort bien présenter un nombre quelconque de boucles (et, par conséquent, de points doubles) et ne se fermer jamais ou se fermer seulement au bout d'un trajet aussi long qu'on voudra.

Cette remarque montre que le théorème suivant :

Une surface S à courbure partout positive (laquelle est supposée dépourvue de singularités et de nappes infinies et, par conséquent, fermée) est un corps convexe, c'est-à-dire située entièrement d'un même côté d'un quelconque de ses plans tangents

n'est nullement évident *a priori*, l'énoncé correspondant relatif aux courbes étant faux.

Pour les surfaces, au contraire, la conclusion est exacte. Elle s'établit aisément en partant de ce théorème :

Une surface fermée S à courbure positive correspond d'une manière univoque à sa représentation sphérique.

Considérons, en effet, un point O de la surface S et supposons que le plan tangent en ce point (plan que nous supposerons horizontal) traverse S.

Le point le plus haut et le point le plus bas de S seront alors distincts de O; leurs normales intérieures seront verticales et de sens différents. L'une d'elles devrait donc être de même sens que la normale intérieure en O, de sorte qu'il devrait exister deux points ayant même représentation sphérique.

Il est à remarquer que le raisonnement précédent ne suppose nullement la non existence de lignes doubles où deux nappes de surface se traverseraient l'une l'autre pourvu que chacune de ces nappes reste régulière. *L'impossibilité de telles lignes est, au contraire, démontrée par cette voie* : elle est manifestement contradictoire avec la convexité de la surface.

La correspondance univoque qui existe entre la surface S et sa représentation sphérique est démontrée dans un Mémoire : *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* ⁽¹⁾. On peut également la déduire du théorème de M. W. Dyck sur la *curvatura integra* d'une surface fermée. Cette courbure totale est, en effet, d'après le théorème en question, au plus égale à 4π . Or il est clair qu'on obtiendrait, au contraire, un total supérieur à 4π si, la courbure étant positive, certaines parties de la sphère figuraient deux fois dans la représentation sphérique.

La limitation de la *curvatura integra* apparaîtrait ainsi comme étant en relation avec la convexité, la conclusion contraire relative aux courbes étant liée à ce fait que la rotation totale de la tangente peut être d'un nombre quelconque de circonférences.

(¹) *Journal de Mathém.*, 3^e série, t. III, 1857, p. 352-353, n° 23.

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1903.

PRÉSIDENTE DE M. PAINLEVÉ.

Communications :

M. Bioche : *Sur un problème d'analyse combinatoire.*

M. Borel : *Sur les séries convergentes de fonctions continues.*

M. Andoyer : *Sur les coordonnées polaires dans l'espace.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1903.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Élections :

MM. Walter Ford, présenté par MM. Laisant et Hadamard;
Marotte, » Painlevé et Bricard,
sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres
présents.

Correspondance :

M. de Sparre adresse des *Remarques sur la question de Mécanique posée au Concours d'agrégation en 1903.*

Communications :

M. Raffy : *Sur deux classes de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires.*

M. Lecornu : *Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide.*

M. Estanave : *Sur un hyperbolographe à liquide.*

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du
Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.)

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1903.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[J 1 a 3]	André (D.). — Mémoire sur les couples actifs de per- mutations.....	105
[S 2 x]	Appell (P.). — Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des com- posantes de la vitesse.....	68
[B 2 c x]	Autonne (L.). — Sur l'hypohermitien.....	149
[B 11 x]	Autonne (L.). — Sur quelques propriétés des matrices hypohermitiennes n -aires.....	268
[11]	Borel (E.). — Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques.....	157
[J 5]	Borel (E.). — Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans.....	272
[J 4 f]	Boulanger (A.). — Sur les équations différentielles du troisième ordre, qui admettent un groupe continu de transformations.....	299
[O 5 j x]	Bühl (A.). — Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée.....	47
[D 6 c z]	Estanave (E.). — Sur les coefficients des développe- ments en série de $\tan x$, $\sec x$ et d'autres fonctions...	203
[D 1]	Goursat (E.). — Sur la théorie des fonctions impli- cites.....	184
[H 9 z]	Hadamard (J.). — Sur un problème mixte aux dérivées partielles.....	268
[O 5 p]	Hadamard (J.). — Sur les surfaces à courbure po- sitive.....	300
[A 5 b]	Laisant (C.-A.). — Note sur un problème d'interpo- lation.....	66
[R 7 3]	Laisant (C.-A.). — Sur une propriété des mouvements	

		Pages.
	dus à une force centrale.....	156
[O 2 a]	Lebesgue (H.) . — Sur le problèmes des aires.....	197
[O 5 j α]	Lecornu (L.) . — Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.....	192
[R 2 a]	Lecornu (L.) . — Propriétés géométriques des milieux continus.....	258
[D 3 β]	Maillet (E.) . — Sur les fonctions monodromes à point singulier isolé.....	27
[O 6 k]	De Montcheuil (M.) . — La développée moyenne et les surfaces applicables.....	1
[O 7 b]	De Montcheuil (M.) . — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis.....	233
[O 2 g]	Perrin (R.) . — Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques.....	54
[O 2 g]	Perrin (R.) . — Sur les intégrales de l'équation différentielle des coniques, et leur interprétation géométrique.	275
[J 2 g]	Quiquet (A.) . — Sur l'emploi simultané de lois de survie distinctes.....	286
[O 5 k α]	Raffy (L.) . — Détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré.....	77
[H 7 a]	Saltykow (N.) . — Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.....	224
[J 4 a α]	De Séguier (J.-A.) . — Sur une proposition de Mathieu.	65

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

Comptes rendus des séances.....	74, 229 et	299
Table des matières du Tome XXXI.....		303

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXI.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

34636 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

194
BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-DEUXIÈME. — ANNÉE 1904.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—
1904

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1904 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	{ MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE HUMBERT. JORDAN. MANNHEIM. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	--

Président.....	MM. CARVALLO.
Vice-Présidents	{ BIOCHE. BLUTEL. BOREL. HADAMARD.
Secrétaires	{ BRICARD. GRÉVY.
Vice-Secrétaires.....	{ LEAU. SERVANT.
Archiviste.....	RAFFY.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ ANDOYER, 1907. ANDRÉ, 1907. FOURET, 1907. GOURSAT, 1905. KOENIGS, 1906. LAISANT, 1905. LECORNU, 1906. LEVY (L.), 1905. D'OCAGNE, 1905. PAINLEVÉ, 1907. PERRIN (R.), 1906. TOUCHE, 1906.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17^e).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7^e).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, 121, boulevard de la Liberté, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5^e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, 1, rue de la Mouillière, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6^e).
1901. **ANGIBOUST**, rue d'Assas, 104, à Paris (6^e).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6^e).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1896. **BAKER**, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur à Métlaoui (Tunisie).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7^e).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie maritime en réserve, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9^e).
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), 1910, Addison street, à Berkeley, Californie (U. S. A.).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Herzberger chaussée, 49, à Göttingen.
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1895. **BOREL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, 2, boulevard Arago, à Paris (13^e).
1896. **BOULANGER**, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14^e).
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44 (6^e).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14^e).
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, 4, rue de Villefranche, à Montpellier (Hérault).

Date
de
l'admission.

1893. BURKHARDT, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
1897. CABREIRA, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16^e).
1893. CALDARERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16^e).
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17^e).
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. CARVALLO, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5^e).
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Unionsgatan, 4, à Helsingfors.
1892. CELLÉRIER (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, Piazza S. Pietro in Vincoli, 5, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5^e).
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10^e).
1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8^e).
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. CLAIRIN, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de l'Université, 57 bis, rue Jacquemars-Gielée, à Lille (Nord).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9^e).
1890. COLOT, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. COMBEBIAC, capitaine du génie, docteur ès sciences, à Limoges.
1900. CONTE (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
1896. COSSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. COSSERAT (F.), ingén. en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10^e).
1900. COTTON (Émile), maître de conférences à l'Université de Grenoble.
1872. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5^e).
1885. DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1901. DELASSUS, chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue Alsace-Lorraine, 39, à Grenoble (Isère).
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
1899. DELEMER, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille (Nord).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. DENIS (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris (6^e).
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900. DICKSTEIN, 117, Marszatkowska, Varsovie.
1902. DIEGUEZ (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3^o, à La Corogne (Espagne).
1899. DRACH (Jules), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Bourbeau, 2, à Poitiers.

Date
de
l'admission.

1896. DUMAS (G.), licencié ès sciences, à Gland, canton de Vaud (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1897. DURAN-LORIGA, command. d'artillerie, 20, plaza de Maria Pita, à la Corogne (Espagne).
1885. DYCK (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1902. EGOROFF (Dimitri), professeur à l'Université de Moscou, rue Palianka, Institut des Maîtres.
1903. ESPANET, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5°).
1900. ESTIENNE, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, 21, Liberty Str., à Hamilton (Canada).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, boulevard de Clichy, 6, à Paris (18°).
1891. FONTVILANT (DE), profes. à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil (16°).
1903. FORD WALTER, professeur à l'Université de Michigan, rue Notre-Dame-des-Champs, 99, à Paris (6°).
1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°).
1903. FRAÏSSÉ, agrégé de l'Université, rue Vavin, 10 bis, à Paris (6°).
1892. FROLOV (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1903. FUETER, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.
1872. GARIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7°).
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. GERRANS, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1903. GODEY, rue du Bois-de-Boulogne, 6, à Paris (16°).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14°).
1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

Date
de
l'admission.

1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7°).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1900. GUICHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. GUIMARAES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7°).
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HADAMARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1901. HANCOCK (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. HARDEL, élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1900. HOFFBAUER, ancien lieut. d'art., rue du Châtelet, 22, à Fontenay-sous-Bois (Seine).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St^e-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11°).
1903. L'ABBÉ ISSALY, rue PoqueLin-Molière, 9, à Bordeaux.
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Ludwigskirstrasse, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°).
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris (5°).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1890. KOBÉ (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).

Date
de
l'admission.

1897. LACAUCHE, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).
1893. LANCELIN, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU (Edmond), privat-docent à l'Université, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.
1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, cité Martignac, 5, à Paris (7°).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°).
1896. LEBEL, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1902. LEBESGUE, docteur ès sciences, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Pougirard, 4, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1903. LEBEUF, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 4, à Paris (15°).
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. LE ROY, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6°).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors.
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1900. LOVETT (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, ing^r des manufactures de l'État, Manufacture des Tabacs, à Châteauroux.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Marbeuf, 8, à Paris (8°).
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).

Date
de
l'admission.

1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16^e).
1903. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12^e).
1884. **MARTIN** (Artemas), 915, N. Street, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5^e).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).
1897. **MEHNKE**, professeur à l'École technique supérieure, Weisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7^e).
1902. **MERLIN** (E.), avenue Négrié, 46, à Forest-lès-Bruxelles (Belgique).
1902. **MESNY** (R.), enseigne de vaisseau, rue de la Rampe, 4, à Brest.
1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Perdonnet, 12, à Paris (10^e).
1899. **MILLER** (Dr G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), rue du Vieux-Raisin, 11, à Toulouse (Haute-Garonne).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), rue Berthollet, 6, Paris (5^e).
1898. **NAUD** (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6^e).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Université, rue de l'Arbalète, 35 (5^e).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e).
1873. **OIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6^e).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, avenue de l'Observatoire, 1 (5^e).
1874. **PERCIN**, général de brigade, chef du cabinet du ministre de la guerre.
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris (16^e).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17^e).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect, 17, log. 15, à Saint-Petersbourg.

Date
de
l'admission.

1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6^e).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6^e).
1896. PIÉRON, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6^e).
1899. PIERPONT (James), prof. de l'Université Yale, 42, Mansfield st., New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5^e).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. PRINGSHEIM, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. PRUVOST, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16^e).
1872. PUTZ, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1902. PUX (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5^e).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9^e).
1898. RABUT (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. RADAU, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6^e).
1883. RAFFY, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris (5^e).
1903. REMOUNDOS, agrégé de l'Université d'Athènes, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1900. RENARD, rue de la Tour, 7, à Paris (16^e).
1903. RICHARD, professeur au lycée de Dijon, place du Rosoir, 1, à Dijon.
1893. RIVEREAU (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1903. ROCHE, agrégé de l'Université, rue Madame, 69, à Paris (6^e).
1872. ROUART, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8^e).
1872. ROUCHÉ, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7^e).
1896. ROUGIER, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1885. ROUQUET (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. SALTYKOW, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique à Tomsk (Russie).
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. SCHOU (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. SEE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7^e).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. SERVANT, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7^e).
1900. SPARRE (comte Magnus DE), château de Vallière, à St-Georges-de-Rencins (Rhône).
1881. STARKOFF, Maximilianovskiy pereonlok, 19, log. 12, à Saint-Petersbourg (Russie).
1879. STEPHANOS (D^r Cyparissos), professeur à l'Université à Athènes (Grèce).

Date
de
l'admission.

1901. STETSON (Orlando), à Franklin (Massachusetts).
1898. STÖRMER (Carl), professeur à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania.
1903. SUCHAR, docteur ès sciences, rue Lafayette, 60, à Paris.
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. TANNENBERG (DE), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1882. TARRY (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).
1897. TARRY (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).
1899. THYBAUT (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8^e).
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. TORRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17^e).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1896. TRESSE, doct. ès sciences, prof. au collège Rollin, rue Caulaincourt, 20, à Paris (18^e).
1893. VALLÉE-POUSSIN (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, chemin des Granges, 45, à Lyon (Rhône).
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université de Rome, via Lucina, 11.
1900. VUIBERT, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain (5^e).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16^e).
1880. WALCKENAER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7^e).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^e).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8^e).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenakaja, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, docteur de l'Université d'Athènes, rue Claude-Bernard, 25, à Paris (5^e).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kanntkestrøede, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, Ann Arbor (Michigan) (Etats-Unis).
1902. ZOUKIS (Aristide), professeur à l'École militaire des Evelpides, rue Scoufa, 6, à Athènes.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAYME (décédé). — BIOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BOBERIL (vicomte R. du), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Austin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico. — MERCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. de), à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SALTYKOW, à Tomsk. — SELIVANOFF, à Saint-Petersbourg. — SPARRE (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul), à Paris. — TARRY (G.), à Alger. — TCHEBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1875	BIENAYMÉ.	1891	COLLIGNON.
1876	DE LA GOURNERIE.	1892	VICAIRE.
1877	MANNHEIM.	1893	HUMBERT.
1878	DARBOUX.	1894	PICQUET.
1879	O. BONNET.	1895	GOURSAT.
1880	JORDAN.	1896	KÉNIGS.
1881	LAGUERRE.	1897	PICARD.
1882	HALPHEN.	1898	LECORNU.
1883	ROUCHÉ.	1899	GUYOU.
1884	PICARD.	1900	POINCARÉ.
1885	APPELL.	1901	D'OCAGNE.
1886	POINCARÉ.	1902	RAFFY.
1887	FOURET.	1903	PAINLEVÉ.
1888	LAISANT.		

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	Johns Hopkins University.	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Göttingen.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences, à l'Université.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.

Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	<i>American mathematical Society.</i>	États-Unis.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	Bibliothèque de la Sorbonne.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

1

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR LE THÉORÈME DE M. JENSEN;

Par M. G. MITTAG-LEFFLER.

M. Goursat vient de publier (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1902) une nouvelle démonstration du théorème de M. Jensen (*Acta math.*, t. XXII), qui rattache ce théorème au théorème fondamental de Cauchy. J'ai employé dans mon enseignement une démonstration analogue qui paraît plus directe.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé S , comprenant dans son intérieur le point x sur lequel nous faisons, pour simplifier, la supposition qu'il ne sera ni un zéro ni un pôle. Supposons encore, pour simplifier, que $f(z)$ soit holomorphe et différent de zéro sur le contour même. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les zéros de $f(z)$ intérieurs au contour, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité, et $b_1, b_2, \dots, b_m$ les pôles de $f(z)$ intérieurs à S , chacun d'eux étant encore compté avec son degré de multiplicité.

Je me propose d'évaluer l'intégrale

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz$$

prise le long du contour S dans le sens direct. Je suppose que la variable part d'un point A sur le contour, $\log f(z)$ ayant une valeur initiale déterminée. Je considère le contour fermé $\bar{S}$ formé de la courbe S , des circonférences c_v, k_v , de rayon ε , ayant pour centres les différents points a_v, b_v , et des lignes infiniment voisines tracées de part et d'autre d'un nombre de lignes situées entièrement à l'intérieur de S et reliant chacune un des points a_v et b_v avec le point A , en laissant les autres points a_v, b_v , ainsi que les points x , en dehors.

La fonction $\log f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour $\bar{S}$.
En lui appliquant le théorème de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^n \left[\int_{\Lambda}^{\alpha'_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{c_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\alpha'_v}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^m \left[\int_{\Lambda}^{\beta'_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{k_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\beta'_v}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x). \end{aligned}$$

α'_v et β'_v étant des points sur les circonférences c_v et k_v . En allant à la limite zéro avec ε et en observant que les intégrales $\int^{c_v}$, $\int^{k_v}$ deviennent alors zéro, on obtient

$$- \sum_{v=1}^n \int_{\alpha_v}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \sum_{v=1}^m \int_{\beta_v}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x).$$

On en tire

$$(2) \quad \log f(x) = \sum_{v=1}^n \log \frac{\alpha_v - x}{\Lambda - x} - \sum_{\mu=1}^m \log \frac{\beta_{\mu} - x}{\Lambda - x} + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz.$$

Il s'ensuit

$$(3) \quad f(x) = \frac{(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)}{(b_1 - x)(b_2 - x) \dots (b_m - x)} (\Lambda - x)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz}$$

et encore, en faisant $z - x = re^{i\theta}$ et en supposant que S soit un cercle de rayon r , ayant pour centre le point x ,

$$(4) \quad |f(x)| = \frac{|a_1 - x| |a_2 - x| \dots |a_n - x|}{|b_1 - x| |b_2 - x| \dots |b_m - x|} r^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\theta}.$$

Cette dernière formule devient celle de M. Jensen si l'on y fait $x = 0$.

On a

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z} \right) dz.$$

En faisant dans la formule (3) $x = 0$ et en supposant que ce

point ne soit ni un zéro ni un pôle, on obtient

$$(5) \quad f(0) = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} \Lambda^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz}.$$

En divisant (3) par (5), on obtient donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) \frac{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}{\left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \left(1 - \frac{x}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{b_m}\right)} \\ &\times \left(1 - \frac{x}{\Lambda}\right)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right) dz}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut facilement être généralisée en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{x}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz + \dots \\ &+ \frac{x^p}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz + \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz \end{aligned}$$

et, en appliquant aux différentes intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^3} dz, \quad \dots, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz$$

le même procédé que nous avons employé auparavant pour les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz,$$

on obtient alors la formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p} x^p} \\ &\times \frac{\prod_{v=1}^n E\left(\frac{x}{a_v}, p\right)}{\prod_{v=1}^m E\left(\frac{x}{b_v}, p\right)} E\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz} \end{aligned} \right.$$

en ayant posé

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E(z, p) &= (1-z) e^{z + \frac{1}{2} z^2 + \dots + \frac{1}{p} z^p} \\ E(z, 0) &= 1-z. \end{aligned} \right.$$

La formule (7) doit être mise à côté d'une autre qu'on obtient en partant de l'égalité (1)

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(0)}{f(0)} + D \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x}{1} + \dots \\ &+ D^{(p-1)} \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x^{p-1}}{p-1} + \sum_{v=1}^n \frac{1}{x-a_v} \left(\frac{x}{a_v} \right)^p \\ &- \sum_{v=1}^m \frac{1}{x-b_v} \left(\frac{x}{b_v} \right)^p + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z} \right)^p dz. \end{aligned} \right.$$

En faisant l'intégration par rapport à x , et en observant que

$$\begin{aligned} &\int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\int_0^x \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z} \right)^p dx \right] dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log \left(1 - \frac{x}{z} \right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z} \right)^p \right] dz, \end{aligned}$$

on obtient

$$(10) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p} x^p} \\ &\times \frac{\prod_{v=1}^n E\left(\frac{x}{a_v}, p\right)}{\prod_{v=1}^m E\left(\frac{x}{b_v}, p\right)} e^{-\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log \left(1 - \frac{x}{z} \right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z} \right)^p \right] dz}. \end{aligned} \right.$$

On revient immédiatement de la formule (10) à la formule (7) en intégrant

$$\int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log \left(1 - \frac{x}{z} \right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z} \right)^p \right] dz$$

par parties.

(1) Voir ma Note aux *Comptes rendus*, 20 février 1882.

RECHERCHES SUR LA DIVISIBILITÉ DU NOMBRE $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n!}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)^n}$
PAR LES PUISSANCES DE LA FACTORIELLE $1 \cdot 2 \dots n$;

Par M. C. DE POLIGNAC.

§ 1.

Avant d'entrer en matières, rappelons quelques résultats bien connus.

Désignant par $\left[\frac{a}{b} \right]$ le quotient entier de la division de a par b , notation usitée par Lejeune-Dirichlet, et appelant e l'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$, en sorte que ce produit est supposé divisible par p^e , mais non par p^{e+1} , on a la formule classique

$$e = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right].$$

La limite $i = \infty$ est symbolique; elle se justifie en remarquant que, dès que $p^i > x$, on a $\left[\frac{x}{p^i} \right] = 0$.

De plus, on a toujours

$$\left[\left[\frac{x}{a} \right] \frac{1}{b} \right] = \left[\frac{x}{ab} \right] \quad (1).$$

Il en résulte

$$\left[\frac{x}{p^2} \right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{p} \right]}{p} \right]; \quad \left[\frac{x}{p^3} \right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{p^2} \right]}{p} \right], \quad \dots$$

Par suite, si l'on écrit,

$$\begin{aligned} x &= pq_1 + r_1 \quad \left(r_1 < p, \quad q_1 = \left[\frac{x}{p} \right] \right), \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \quad \left(r_2 < p, \quad q_2 = \left[\frac{q_1}{p} \right] = \left[\frac{x}{p^2} \right] \right), \\ q_2 &= pq_3 + r_3 \quad \left(r_3 < p, \quad q_3 = \left[\frac{q_2}{p} \right] = \left[\frac{x}{p^3} \right] \right), \quad \dots, \end{aligned}$$

(1) Voir, entre autres, LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie*, § 15, édition 1863.

on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right] = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

Cela posé, je commencerai par démontrer trois propositions :

Soit x un nombre entier écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p , en sorte que

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

avec $a < p$ à un rang quelconque.

Désignons par $\sum x$ la somme des chiffres de x :

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

PROPOSITION 1. — L'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le produit $1.2.3\dots x$ est $\frac{x - \sum x}{p - 1}$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il suffira d'établir l'égalité

$$\frac{x - \sum x}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right].$$

Conservant les notations adoptées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} q_1 &= a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 = \left[\frac{x}{p} \right], \\ \left[\frac{q_1}{p} \right] = q_2 &= a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_3 p + a_2 = \left[\frac{x}{p^2} \right], \\ \left[\frac{q_2}{p} \right] = q_3 &= a_n p^{n-3} + a_{n-1} p^{n-4} + \dots + a_3 = \left[\frac{x}{p^3} \right], \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\frac{q_{n-2}}{p} \right] = q_{n-1} &= a_n p + a_{n-1} = \left[\frac{x}{p^{n-1}} \right], \\ \left[\frac{q_{n-1}}{p} \right] = q_n &= a_n = \left[\frac{x}{p^n} \right], \\ \left[\frac{q_n}{p} \right] = q_{n+1} &= 0 = \left[\frac{x}{p^{n+1}} \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Chaque colonne de ce Tableau se compose de termes en progression géométrique. Faisant donc la sommation par colonnes et introduisant pour la symétrie le terme nul $\frac{a_0 - a_0}{p - 1}$, il vient

$$\frac{n(p^n - 1) + a_{n-1}(p^{n-1} - 1) + \dots + a_3(p^3 - 1) + a_2(p^2 - 1) + a_1(p - 1) + a_0 - a_0}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right],$$

c'est-à-dire, d'après nos notations,

$$\frac{x - \sum x}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right]. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

PROPOSITION 2. — Soit n un second nombre entier écrit dans le système numérique de base p ; faisant l'addition $x + n$, on aura

$$\sum (x + n) = \sum x + \sum n - k(p - 1),$$

où k désigne le nombre total d'unités que, dans l'addition, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration.

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots & a < p, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots & b < p. \end{aligned}$$

L'addition, membre à membre, donne

$$\begin{array}{r} x + n = a_0 + a_1 \left| \begin{array}{l} p + a_2 \\ + b_2 \end{array} \right| p^2 + \dots + a_m \left| \begin{array}{l} p^m \\ + b_m \end{array} \right| p^m, \\ \quad \quad \quad + b_0 + b_1 \end{array}$$

expression dans laquelle il faut ramener dans chaque colonne la somme des deux chiffres à un nombre inférieur à p . Ces réductions faites, on obtiendra

$$x + n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots \quad (c_i < p).$$

Comparons ces deux expressions.

Comme dans la première, chacun des deux chiffres a_i , b_i d'une colonne quelconque est moindre que p , leur somme est moindre que $2p$. On a même partout

$$a_i + b_i + 1 < 2p,$$

puisque le maximum est $p - 1 + p - 1 + 1 = 2p - 1$. D'après

cette remarque, on peut composer de proche en proche le Tableau suivant :

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + b_0 = k_0 p + c_0 \\ a_1 + b_1 + k_0 = k_1 p + c_1 \\ a_2 + b_2 + k_1 = k_2 p + c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_m + b_m + k_{m-1} = k_m p + c_m \\ k_m = c_{m+1} = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} c_i < p \quad (k_i = 0 \text{ ou } 1),$$

par suite

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_m + b_0 + b_1 + \dots + b_m + k_0 + k_1 + \dots + k_m \\ = (k_0 + k_1 + \dots + k_m) p + c_0 + c_1 + \dots + c_m + c_{m+1}. \end{aligned}$$

Or, comme chacun des nombres $k_0, k_1, \dots, k_m$ est égal à zéro ou à un, leur somme est égale au nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante, soit k . D'autre part, on a par définition

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m &= \sum x, \\ b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_m &= \sum n, \\ c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_m + c_{m+1} &= \sum (x + n). \end{aligned}$$

Il en résulte donc bien

$$\sum (x + n) = \sum x + \sum n - k((p - 1) \text{ } ^{(1)}). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On trouverait de même

$$\sum (x - n) = \sum x - \sum n + k(p - 1),$$

k étant ici le nombre d'unités empruntées au chiffre d'une

(¹) Arithmétiquement, l'opération s'indiquerait ainsi :

$$\begin{array}{llllll} \dots & a_i & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_i < p, \\ \dots & b_i & \dots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_i < p, \\ \dots & c_i & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_i < p. \end{array}$$

Dans chaque colonne, l'addition de deux chiffres ne peut surpasser $2p - 2$ (18 dans le système décimal). On ne peut donc jamais reporter plus d'une unité dans la colonne suivante. Le chiffre de cette colonne augmente de 1, celui de la précédente diminue de p à chaque report; d'où la formule.

colonne et reportées dans la précédente suivant les règles de l'arithmétique élémentaire.

On voit d'ailleurs qu'en posant $x + n = m$, d'où $x = m - n$, la formule d'addition devient

$$m \sum = \sum (m - n) + \sum n - k(p - 1),$$

d'où

$$\sum (m - n) = \sum m - \sum n + k(p - 1).$$

PROPOSITION 3. — Faisant le produit nx , on aura

$$\sum nx = \sum n \cdot \sum x - k(p - 1),$$

où k représente encore le nombre d'unités que, dans le produit, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration. — Soient

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots & a_i < p, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots & b_i < p, \\ nx &= c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots & b_i < p. \end{aligned}$$

La multiplication, membre à membre, donne

$$\begin{array}{r|l} nx = a_0 b_0 + a_0 b_1 & p + a_0 b_2 \\ + a_1 b_0 & + a_1 b_1 \\ & + a_2 b_0 \end{array} \left| \begin{array}{l} p^2 + \dots, \\ \\ \end{array} \right.$$

résultat que, pour abréger, nous écrirons

$$nx = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots$$

Observons que, par définition,

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots = \sum n \cdot \sum x.$$

Si $a_0 b_0 < p$, on a $C_0 = c_0$; mais, en général,

$$C_0 = pk_0 + c_0$$

et l'on reporte k_0 unités à la colonne suivante, et cela quand bien même cette colonne ferait défaut dans le produit membre à

membre nx ; ce qui arriverait par exemple si l'on avait $a_1 = b_1 = 0$.

On a donc jusqu'ici

$$\begin{array}{l} nx = c_0 + C_1 \mid p + C_2 p^2 + \dots \\ \quad + k_0 \mid \end{array}$$

On posera de même

$$C_1 + k_0 = pk_1 + c_1$$

et l'on reportera k_1 unités à la colonne suivante. Observons qu'ici on pourrait avoir $k_1 > p$, ce qui ne change rien à la marche du calcul.

On obtiendra ainsi successivement

$$\begin{array}{ll} C_0 & = c_0 + k_0 p, \\ C_1 + k_0 & = c_1 + k_1 p, & C_0 + C_1 = c_0 + c_1 + k_0(p-1) + k_1 p, \\ C_2 + k_1 & = c_2 + k_2 p, & C_0 + C_1 + C_2 = c_0 + c_1 + c_2 + (k_0 + k_1)(p-1) + k_2 p, \\ \dots & \dots & \dots \\ C_i + k_{i-1} & = c_i + k_i p, & C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_i \\ & & = c_0 + c_1 + c_2 + \dots \\ & & + c_i + (k_0 + k_1 + \dots + k_{i-1})(p-1) + k_i p. \end{array}$$

Mais, comme le produit est fini, il arrivera un moment où l'on trouvera $k_i = 0$; on aura alors

$$C_0 + C_1 + \dots + C_i = c_0 + c_1 + \dots + c_i + (k_0 + k_1 + \dots + k_{i-1})(p-1),$$

c'est-à-dire

$$\sum n. \sum x = \sum nx + k(p-1)$$

ou

$$\sum nx = \sum n. \sum x - k(p-1). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La Proposition 1 exige que p soit un nombre premier. Dans les deux autres propositions, p peut être quelconque.

§ 2.

Nous allons maintenant faire quelques applications de ces trois propositions.

THÉORÈME. — x et n étant, comme ci-dessus, écrits dans le

ystème de base p nombre premier, si le produit

$$1.2.3\dots(n-1)n$$

est divisible par p^α , — α exposant maximum —

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

sera divisible par p^{x+k} ; où k représente le nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans l'addition $x+n$.

Démonstration. — Par la proposition 1, on a

$$\alpha = \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et, par la même proposition, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

$$1.2\dots x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

est

$$\frac{x+n - \sum (x+n)}{p-1}.$$

De même, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

$$1.2\dots x$$

est

$$\frac{x - \sum x}{p-1}.$$

Le nombre premier p entrera donc dans le produit

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

avec un exposant égal à la différence des deux précédents, soit

$$\frac{x+n - \sum (x+n) - x - \sum x}{p-1} = \frac{n - \sum (x+n) + \sum x}{p-1},$$

D'ailleurs, par la proposition 2, on a

$$\sum (x+n) = \sum x + \sum n - k(p-1):$$

l'exposant considéré est donc

$$\frac{n - \sum x - \sum n + \sum x}{p-1} + k = \frac{n - \sum n}{p-1} + k = \alpha + k.$$

C. Q. F. D.

En vue d'une application de la proposition 3, partons de l'identité

$$\frac{1.2\dots N - 1.N}{1.2\dots N - 1.N} = 1.$$

Posant $N = a_1 + a_2$, elle devient, en admettant $a_1 < a_2$,

$$\frac{1.2\dots(a_1 + a_2 - 1)(a_1 + a_2)}{1.2\dots a_1.(a_1 + 1)(a_1 + 2)\dots(a_1 + a_2)} = 1,$$

et comme, d'après un théorème classique, le produit

$$(a_1 + 1)(a_1 + 2)\dots(a_1 + a_2)$$

est divisible par $1.2\dots a_2$, on a

$$(1) \quad \frac{1.2.3\dots(a_1 + a_2)}{1.2\dots a_1.1.2\dots a_2} = \text{entier}.$$

On trouvera de même généralement avec $N = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$(2) \quad \frac{1.2.3\dots(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{1.2\dots a_1.1.2\dots a_2\dots 1.2\dots a_n} = \text{entier}.$$

Si l'on pose dans (1) $a_1 = x$, $a_2 = (n - 1)x$, on a $N = nx$ et

$$(3) \quad \frac{1.2\dots nx}{1.2\dots x.1.2\dots (n-1)x} = \text{entier}.$$

D'autre part si dans (2) on pose $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = x$ on a

$$(4) \quad \frac{1.2.3\dots nx}{(1.2.3\dots x)^n} = \text{entier} \quad (1),$$

relation qui résulte de (3) *a fortiori*. Pour le faire voir mettons (4)

(1) Les expressions (1), (2), (3), (4) sont bien connues mais en vue de ce qui suit il y avait intérêt à montrer qu'elles résultent de l'identité initiale par la suppression de certains facteurs au dénominateur.

ou

$$(5a) \quad \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n} = 1.2.3 \dots n \cdot q_1 q_2 \dots q_{n-2} q_{n-1}.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 décembre 1881, M. Mathieu Weill a démontré par un procédé d'analyse combinatoire la divisibilité du nombre $\frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ par la factorielle $1.2 \dots n$. L'équation (5a) implique ce théorème et de plus fait connaître explicitement le résultat de la division. On voit que le théorème en question, tout comme ceux qu'expriment les égalités (1), (2), (3), (4), résulte de l'identité initiale avec $N = nx$, par la suppression de différents facteurs au dénominateur. Ils se trouvent restitués dans l'équation (5a) qui, en y remplaçant les quantités $q_1, q_2, \dots$, par leurs valeurs, reproduira l'identité initiale.

On peut pousser plus loin cette investigation et montrer que l'entier

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$$

est en général divisible par une puissance de la factorielle $1.2 \dots n$ supérieure à l'unité, soit $(1.2 \dots n)^h$ avec $h > 1$. La proposition 3 trouvera ici son application.

Soit p un nombre premier non supérieur au plus grand des deux nombres x et n ; p^ε la plus grande puissance de p qui divise E . Évaluons d'abord ε .

Par la proposition 1, p entre dans le numérateur de E avec un exposant

$$\varepsilon_1 = \frac{nx - \sum nx}{p - 1},$$

et dans la factorielle $1.2 \dots x$ avec un exposant

$$\varepsilon_2 = \frac{x - \sum x}{p - 1},$$

par suite p entre dans le dénominateur de E avec l'exposant $n\varepsilon_2$ et l'on a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon = \frac{n \sum x - \sum nx}{p - 1}.$$

D'ailleurs par la proposition 3

$$\sum nx = \sum n \sum x - k(p-1).$$

Par conséquent

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k,$$

telle est la valeur exacte de l'exposant cherché, ou, comme on dit aussi, le nombre de fois que le nombre premier p entre comme facteur dans l'entier E .

Si l'on se contente d'une valeur approchée on peut écrire

$$\varepsilon \approx \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x.$$

On retrouve ainsi une formule approximative déjà obtenue par M. Désiré André ⁽¹⁾.

Cherchons maintenant avec quel exposant ε' , p entre dans l'expression

$$E' = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n 1.2 \dots n}.$$

Par la proposition 1, p entre dans $1.2 \dots n$ avec un exposant

$$\varepsilon_3 = \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Conservant les notations précédentes on aura donc

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

et, comme nous avons trouvé

$$\varepsilon_1 - n\varepsilon_2 = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k,$$

(1) Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 13 février 1882, M. Désiré André a donné ce résultat sous la forme

$\varepsilon \approx (\alpha + \beta + \gamma + \dots)P(n)$ où ε désigne l'exposant ε , $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \sum x$ et où $P(n)$ représente le nombre de fois que p , nombre premier, entre comme

facteur dans $1.2 \dots n$, c'est-à-dire $\frac{n - \sum n}{p-1}$ d'après la proposition 1.

il vient

$$\varepsilon' = \frac{n - \sum^n}{p - 1} \left(\sum x - 1 \right) + k.$$

Cette valeur ne doit jamais être négative puisque nous avons trouvé plus haut que E' est un nombre entier; et en effet il résulte de nos notations que l'on a toujours

$$\sum x \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Par une généralisation immédiate, p entrera dans l'expression

$$E'' = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n (1 \cdot 2 \dots n)^h}$$

avec un exposant

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - h\varepsilon_3,$$

soit

$$(7) \quad \varepsilon'' = \frac{n - \sum^n}{p - 1} \left(\sum x - h \right) + k,$$

et pour que E'' soit un nombre entier il faut et il suffit que cette expression soit nulle ou positive quel que soit p parmi les nombres premiers non supérieurs au plus grand des deux nombres x et n .

Dans le cas d'un nombre premier p supérieur à la fois à x et à n les développements du Paragraphe 1

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + \dots & (a_i < p), \\ n &= b_0 + b_1 p + \dots & (b_i < p), \end{aligned}$$

se réduisent à leurs premiers termes a_0, b_0 . On a

$$\sum x = x; \quad \sum n = n,$$

et l'expression (7) donne simplement

$$\varepsilon'' = k.$$

Dans ce cas aussi les valeurs ci-dessus trouvées pour les exposants $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ se réduisent à zéro comme cela devait être, eu égard aux hypothèses $x < p, n < p$; par suite l'égalité

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - k\varepsilon_3$$

se réduit à

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1,$$

d'où l'on conclut

$$\varepsilon_1 = k.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la formule classique $\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i} \right]$. En effet, dans les notations du Paragraphe 1, la multiplication nx se réduit aussi au seul terme

$$nx = C_0$$

et pour déterminer k on a d'abord (voir § 1)

$$C_0 = nx = pk_0 + c_0 \quad (c_0 < p);$$

d'ailleurs, puisque $x < p$, $n < p$, on a $nx < p^2$; donc $k_0 < p$, par suite $k = k_0 = \left[\frac{nx}{p} \right]$, terme unique auquel dans ce cas se réduit la série $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i} \right]$.

Désignons maintenant par σ le minimum de $\sum x$ pour tous les nombres premiers considérés quand x est mis sous la forme

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a_i < p; \quad p = (2, 3, 5, 7, 11 \dots)).$$

Alors pour un nombre premier quelconque de cette suite on aura assurément

$$\sum x \geq \sigma.$$

Si donc on remplace h par σ dans la valeur de ε'' , la nouvelle expression

$$(8) \quad \frac{n - \sum_{p=1}^n}{p-1} \left[\sum x - \sigma \right] + k$$

ne sera jamais négative et il en résulte, remplaçant h par σ dans E'' ,

que la quantité

$$(9) \quad F = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n (1.2 \dots n)^\sigma}$$

est toujours un nombre entier (¹).

Remarque. — Si $\sum x = 1$ pour un certain nombre premier on a nécessairement $\sigma = 1$. Écartant le cas illusoire $x = 1$ cette circonstance ne peut se présenter que si $x = p^i$. Alors l'expression (8) s'évanouit. En effet, le premier terme s'annule en vertu de l'hypothèse $\sum x = 1 = \sigma$. Quant à k , remarquons qu'en mettant n sous la forme

$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$$

le produit nx s'effectuera par la simple addition de i à chacun des exposants de p dans l'expression de n . On n'aura donc rien à reporter d'une colonne à la suivante, par suite $k = 0$. Dans ce cas on a simplement

$$F = E' = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n (1.2 \dots n)}.$$

§ 3.

Dans les notations des Paragraphes 1 et 2, un nombre entier quelconque x étant écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p , savoir

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a < p),$$

(¹) M. DÉSIRE ANDRÉ, *loc. cit.*, pose $Q = \frac{nx!}{(x!)^n}$ et énonce ainsi qu'il suit le théorème qu'implique l'égalité (9):

« S'il est impossible d'exprimer x par une somme de moins de k puissances d'un même nombre premier le quotient Q est divisible par la puissance $k^{\text{ième}}$ de la factorielle n . »

Dans la notation de M. André $x = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \dots$ doit être considéré comme exprimé par la somme de $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ puissances de p ; savoir α puissances égales à zéro, β puissances égales à 1, γ puissances égales à 2, etc. Si x ne peut être exprimé par moins de k puissances on a $k = \text{minimum}(\alpha + \beta + \gamma + \dots) = \sigma$ de notre texte. L'égalité (9) correspond donc bien à l'énoncé de M. André; mais dans cet énoncé la signification de la lettre k est toute différente de celle qui est attribuée à la même lettre dans le présent Mémoire.

on a par définition

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$\sigma =$ le minimum $\sum x$ que donnent les diverses expressions de x quand p parcourt la suite indéfinie des nombres premiers.

Ce minimum ne peut se rencontrer qu'avec un nombre premier non supérieur à x . Car avec un nombre premier quelconque supérieur à x , l'expression de x se réduit à son premier terme a_0 et donne $\sum x = x$, tandis que, pour tout autre nombre premier non supérieur à x , on a $\sum x < x$. Le nombre x lui-même ne saurait donc être égal à σ .

Nous avons vu également que le nombre entier

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$$

est toujours divisible par $(1.2 \dots n)^\sigma$. Mais la puissance σ est-elle une limite supérieure et sinon, dans quels cas est-il possible de déterminer de combien la puissance limite surpasse σ ? C'est ce que nous nous proposons de rechercher.

Reprenons à cet effet l'expression

$$(1) \quad \varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p-1} \left(\sum x - h \right) + k \quad [\S 2; (7)]$$

qui fait connaître l'exposant ε'' de la puissance du nombre premier p dans le quotient

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n (1.2 \dots n)^h},$$

exposant qui selon la valeur de h pourra être positif, nul ou négatif.

Remplaçant, dans (1), h par $\sigma + \mu$, où μ représente un nombre entier positif quelconque, il vient

$$\varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p-1} \left(\sum x - \sigma - \mu \right) + k,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2) \quad \varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p - 1} \left(\sum x - \tau \right) + k - \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Cette formule est exacte quels que soient x et n et jusqu'ici nous n'avons rien stipulé sur les grandeurs relatives de ces deux nombres. Or, pour déterminer τ , nous pouvons nous borner, ainsi qu'il vient d'être dit, à faire varier le nombre premier p sans dépasser x . D'autre part, lorsque $p > n$, on a $\sum n = n$ et la formule (2) se réduit à $\varepsilon'' = k$. Si l'on suppose $x > n$, alors pour tout nombre premier compris entre n et x cette formule est indépendante de μ et par conséquent illusoire en ce qui concerne l'examen de cette quantité. Nous introduirons donc la restriction suivante :

Convention restrictive : x est au plus égal à n .

D'après la signification de ε'' , tant qu'en donnant à μ des valeurs croissantes l'expression (2) ne sera pas négative le nombre E sera divisible par $p^{\sigma+\mu}$; il ne le sera plus à partir du moment où ε'' deviendra négatif.

Or le premier terme de ε'' dans (2) étant essentiellement positif (ou nul) quel que soit p , les valeurs de μ susceptibles de rendre ε'' négatif ne se rencontrent que parmi celles pour lesquelles

$$k < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et, si p est un des nombres premiers qui donnent $\sum x = \tau$, on a

$$\varepsilon'' = k - \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Dans ce cas, si l'on trouve

$$(\mu - 1) \frac{n - \sum n}{p - 1} \leq k < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

le nombre

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$$

sera divisible par $p^{\sigma+\mu-1}$ et ne le sera pas par $p^{\sigma+\mu}$, et cela suffit pour que E soit divisible tout au plus par la puissance $\sigma + \mu - 1$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Nous sommes donc amenés en définitive à comparer les valeurs

de k et de $\frac{n - \sum n}{p - 1}$. Cette comparaison se fera aisément dans chaque cas particulier par un calcul direct, mais il n'existe aucune formule susceptible de rattacher à la variation de x et de n ni la variation de k , ni celle des nombres premiers pour lesquels $\sum x$ est minimum. Il faut donc se créer une méthode indirecte d'investigation; celle dont nous ferons usage repose sur la remarque suivante :

Remarque. — Lorsque n augmente, p restant constant, la quan-

tité $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ ne peut pas diminuer.

La démonstration directe serait facile, mais elle n'est pas néces-

saire. Puisque $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ représente par la proposition I (§ 1) l'exposant de la plus grande puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans la factorielle $1.2 \dots n$, il est clair que, si l'on fait croître n sans faire varier p , cet exposant ne peut décroître.

Comme conséquence immédiate, quand n croît, p restant constant, $n - \sum n$ ne peut décroître.

Voici comment cette remarque peut être utilisée :

Exposé de la méthode d'investigation.

Soient x et n deux nombres donnés respectivement compris entre des limites pour le moment indéterminées

$$x_0 \leq x \leq X,$$

$$n_0 \leq n \leq N.$$

Pour satisfaire à la convention générale $x \leq n$, nous supposons $n_0 \leq X$.

Soit encore p un nombre premier quelconque non supérieur à n .

D'après la remarque la quantité $\frac{n - \sum n}{p-1}$ ne pourra jamais décroître quand n croît jusqu'à N , donc $\frac{N - \sum N}{p-1}$ sera un maximum.

Imaginons qu'on puisse déterminer X et N de façon que, dans le produit nx , variable dans les limites fixées, la quantité k qui correspond à NX soit un maximum. Le désignant par K nous poserons

$$(3) \quad K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1};$$

comparant, à dessein, K non avec la valeur maxima correspon-

dante $\frac{N - \sum N}{p-1}$ mais avec la quantité minima $\frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$. Supposons qu'on ait déterminé le minimum de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite, on aura *a fortiori*

$$K < \mu \frac{N - \sum N}{p-1}$$

et il en résulte que pour cette même valeur de μ on aura partout dans le produit variable nx

$$k < \mu \frac{n - \sum n}{p-1},$$

puisque d'une part k est égal ou inférieur à K et que d'autre part

$$\frac{n - \sum n}{p-1} \text{ est égal ou supérieur à } \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}.$$

Le nombre p désigne ici un nombre premier quelconque non supérieur à n . Si nous le prenons inférieur à x et si pour ce nombre premier on a $\sum x = \tau$ on pourra conclure, ainsi qu'il a été dit plus haut, que le nombre $E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ n'est pas divisible par

$(1.2\dots n)^{\sigma+\mu}$. Mais si avec p on n'a point $\sum x = \tau$ l'inégalité

$k < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$ cesse d'être un criterium de non-divisibilité. C'est pourquoi il faut concevoir théoriquement le procédé que nous venons de décrire appliqué successivement à tous les nombres premiers non supérieurs à x . Soit p' l'un d'entre eux différent de p . Partant toujours des deux nombres donnés x et n on déterminera de nouvelles limites x'_0 X' ; n'_0 N' remplissant les conditions précédemment imposées à x_0 X et n_0 N et l'on en inférera un nouveau nombre μ' déterminé par l'inégalité

$$K' < \mu' \frac{n'_0 - \sum n'_0}{p' - 1}.$$

En continuant ainsi on obtiendra une série de nombres

$$\mu, \mu', \mu'', \dots$$

Soit M le plus grand nombre qui se rencontre, une ou plusieurs fois, dans cette suite. On aura l'inégalité

$$k < M \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

dans laquelle k se rapporte au produit nx des deux nombres donnés et p à tous les nombres premiers non supérieurs à x ; par conséquent aussi à ceux pour lesquels $\sum x = \tau$. Pour ceux-ci l'inégalité précédente est, exactement ou *a fortiori*, un criterium de non-divisibilité; on pourra donc conclure que le nombre E n'est pas divisible par la puissance $\sigma + M$ de la factorielle $1.2\dots n$.

Telle est la conception théorique de la méthode d'investigation; il s'agit maintenant de montrer qu'elle est réalisable.

Déterminons d'abord les limites supérieures X et N .

x étant un nombre entier quelconque, p un nombre premier non supérieur à x , il existera toujours un nombre entier i tel que

$$p^{i-1} \leq x < p^i,$$

et l'expression générale de x sera

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{i-1} p^{i-1},$$

où a_{i-1} n'est pas nul et où le minimum de i est 2, eu égard à la condition $p \leq x$.

Dans cette formule, le minimum de x correspond à

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{i-2}, \quad a_{i-1} = 1.$$

On a donc

$$\text{minimum } x = p^{i-1}.$$

Le maximum s'obtient en donnant à chaque coefficient sa valeur maximum $p - 1$, d'où

$$\text{maximum } x = p - 1 + \overline{p - 1} \cdot p + \dots + \overline{p - 1} \cdot p^{i-1} = p^i - 1.$$

Prenons maintenant pour n un nombre quelconque au moins égal au maximum de x , soit

$$n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{i-1} p^{i-1} + b_i p^i + \dots;$$

alors, dans le produit nx où n est fixe et x variable dans ses limites, on aura un maximum pour k en prenant x maximum. En effet, k étant par définition le nombre total d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans la multiplication membre à membre des deux expressions

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + \dots & (a_0, a_1, \dots \text{ variables}), \\ n &= b_0 + b_1 p + \dots & (b_0, b_1, \dots \text{ constants}), \end{aligned}$$

ce nombre total ne saurait être plus grand que lorsque chaque coefficient $a_0, a_1, \dots$ est le plus grand possible, c'est-à-dire égal à $p - 1$, auquel cas x est égal à son maximum $p^i - 1$.

Nous pouvons donc prendre

$$x_0 = p^{i-1}, \quad X = p^i - 1,$$

et les limites de x se trouvent déterminées.

Passons à la détermination des limites de n et prenons, sauf justification,

$$n_0 = \lambda p^h, \quad N = (\lambda + 1) p^h - 1 \quad \text{avec} \quad h \leq i,$$

où λ peut varier de 1 à $p - 1$.

Il s'agit de justifier le choix de N , eu égard à la règle donnée dans la méthode d'investigation.

On peut écrire

$$N = p^h - 1 + \lambda p^h,$$

d'où résulte immédiatement

$$N = p - 1 + \overline{p - 1} \cdot p + \overline{p - 1} \cdot p^2 + \dots + \overline{p - 1} \cdot p^{h-1} + \lambda p^h,$$

formule exacte puisque $\lambda < p$.

Pour un autre nombre n quelconque de n_0 à N , on aura

$$n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{h-1} p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Mais dans le produit nx , où x est supposé fixe dans ses limites et n variable, la quantité k est maximum quand chaque coefficient de n est le plus grand possible, c'est-à-dire quand $n = N$.

La limite N est ainsi justifiée et l'on voit que le maximum maximorum de k correspond au produit maximum NX .

D'autre part, n étant donné, il existera pour tout nombre premier p un nombre h tel que

$$p^h \leq n < p^{h+1} - 1,$$

et, par conséquent aussi, une valeur de λ pour laquelle

$$\lambda p^h \leq n < (\lambda + 1)p^h - 1 \quad (1 \leq \lambda < p - 1).$$

Si l'on fait $h = i$ et $\lambda = 1$, on a

$$n = |p^i, p^{i+1}, \dots, 2p^i - 1|.$$

Avec $h = i$ et *exceptionnellement* $\lambda = 0$, on a

$$n = p^i - 1;$$

c'est, d'après nos conventions, le minimum absolu de n égal à X maximum de x . Ici $n_0 = n = N$.

Faisant varier h à partir de i , on peut résumer l'ensemble des valeurs simultanées de x et de n dans le Tableau suivant. Il se compose de *divisions* indiquées par des accolades $\{$ et de *subdivisions* indiquées par des barres verticales $|$. Les divisions cor-

du paragraphe I, toutes réductions faites,

$$nX = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots, \quad c \leq p,$$

et comme $n = X = p^i - 1$, on a ici

$$nX = (p^i - 1)^2 = 1 - 2p^i + p^{2i}.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$1 - 2p^i + p^{2i} = 1 + \overline{p-2} \cdot p^i + \overline{p-1} \cdot p^{i+1} \\ + \overline{p-1} \cdot p^{i+2} + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{2i-2} + \overline{p-1} \cdot p^{2i-1};$$

d'où résulte immédiatement

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = \dots = c_{i-1} = 0, \\ c_i = p - 2, \quad c_{i+1} = c_{i+2} = \dots = c_{2i-1} = p - 1$$

et

$$\sum nX = i(p - 1).$$

Nous pouvons maintenant évaluer K par la formule générale

$$\sum nx = \sum n \cdot \sum x - k(p - 1) \quad [\text{Proposition 3, § 1}],$$

qui devient ici

$$\sum nX = \left(\sum n \right)^2 - K(p - 1),$$

c'est-à-dire

$$i(p - 1) = i^2(p - 1)^2 - K(p - 1), \\ K = i^2(p - 1) - i.$$

n se confondant ici avec ses limites n_0, N , nous avons, conformément à la méthode générale, à déterminer le minimum de μ dans l'inégalité

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Or, on a ici

$$\frac{n - \sum n}{p - 1} = \frac{p^i - 1 - i(p - 1)}{p - 1} = \frac{p^i - 1}{p - 1} - i = 1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1} - i,$$

et l'inégalité devient

$$i^2(p - 1) - i < \mu(1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}) - i\mu$$

ou

$$(4) \quad i^2(p-1) + i(\mu-1) < \mu(1+p+p^2+\dots+p^{i-1}),$$

que nous indiquerons brièvement ainsi

$$V_1 < V_2.$$

Notre but est de trouver le minimum numérique de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite quel que soit p , nombre premier, et i nombre entier ≥ 2 .

Or pour $i = 2$, $p = 2$ l'inégalité devient

$$4 + 2(\mu - 1) < 3\mu; \quad \mu > 2.$$

La limite inférieure cherchée ne peut donc être moindre que 3 et l'inégalité (4) est satisfaite par les valeurs minima $i = 2$, $p = 2$ avec $\mu \geq 3$.

Nous chercherons maintenant à la vérifier avec i et p nombres entiers quelconques, à partir de 2; par implication elle se trouvera vérifiée pour $p =$ nombre premier quelconque.

A cet effet nous remplacerons successivement dans l'inégalité (4) i et p par $i + 1$, $p + 1$ et nous comparerons dans les deux cas l'accroissement δV_1 du premier membre avec l'accroissement δV_2 du second. Tant que l'accroissement du premier membre sera égal ou inférieur à l'accroissement du second l'inégalité sera encore satisfaite et la condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ donnera dans chaque cas un minimum pour μ qui pourra être supérieur au minimum 3 déjà trouvé avec les valeurs initiales $i = p = 2$. Le maximum minimorum ainsi obtenu sera la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

1° Changement de i en $i + 1$ dans (4).

On a

$$\delta V_1 = (2i + 1)(p - 1) + \mu - 1; \quad \delta V_2 = \mu p^i.$$

La condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ est

$$(2i + 1)(p - 1) + \mu - 1 \leq \mu p^i.$$

Elle peut s'écrire

$$(2i + 1)(p - 1) \leq \mu(p^i - 1) + 1,$$

ou

$$2i + 1 \geq \mu \frac{p^i - 1}{p - 1} \geq \frac{1}{p - 1}$$

et sera satisfaite *a fortiori* si l'on pose

$$2i + 1 \geq \mu \frac{p^i - 1}{p - 1},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad 2i + 1 \geq \mu (1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}).$$

Dans l'examen de cette nouvelle condition et de celles que nous rencontrerons par la suite, nous aurons à opérer identiquement comme avec l'inégalité (4) : chercher d'abord les valeurs initiales minima de i , p , μ qui y satisfont et comparer ensuite les accroissements des deux membres quand i et p augmentent séparément d'une unité.

Or la forme de la condition (5) montre que, si elle est satisfaite par trois valeurs i , p , μ , elle le sera encore par les mêmes valeurs i , μ et toute valeur supérieure de p . Il suffit donc de l'examiner avec $p = 2$; elle devient alors

$$2i + 1 \geq \mu (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{i-1})$$

et pour le minimum $i = 2$ on trouve

$$5 \geq 3\mu; \quad \mu \geq 2.$$

Changeons maintenant dans (5) i en $i + 1$. On a

$$\text{Accroissement du 1^{er} membre} = 2,$$

$$\text{Accroissement du 2^e membre} = \mu \cdot 2^i,$$

et la condition

$$2 \geq \mu \cdot 2^i$$

est toujours satisfaite quels que soient μ et i .

La condition $\delta V_1 \geq \delta V_2$ est donc satisfaite quels que soient i et p avec $\mu \geq 2$ et *a fortiori* avec $\mu \geq 3$. On en conclut que l'inégalité (4), satisfaite avec $\mu \geq 3$, $p = 2$, $i = 2$, le sera encore avec $\mu \geq 3$, $p = 2$, i quelconque.

2° Changement de p en $p + 1$ dans (4). On a ici

$$\delta V_1 = i^2; \quad \delta V_2 = \mu \left\{ 1 + p + 1 + (p + 1)^2 + \dots + (p + 1)^{i-1} - (1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}) \right\}.$$

La condition à satisfaire : $\delta V_1 \lesseqgtr \delta V_2$ devra être traitée identiquement comme la condition correspondante dans 1° et comme l'inégalité (4). Nous appliquerons le procédé sans répéter les raisonnements.

On voit d'abord que δV_2 croît avec p . Car en groupant les termes deux à deux on a

$$\delta V_2 = \mu \left\{ 1 + (p + 1)^2 - p^2 + (p + 1)^3 - p^3 + \dots + (p + 1)^{i-1} - p^{i-1} \right\}$$

et la différence des deux termes d'un groupe quelconque

$$(p + 1)^m - p^m = 1 + mp + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} p^2 + \dots + mp^{m-1}$$

est positive et augmente avec p . Il suffit donc encore d'étudier la condition $\delta V_1 \lesseqgtr \delta V_2$ avec $p = 2$; elle devient alors

$$i^2 \lesseqgtr \mu \left(\frac{3^i - 1}{2} - (2^i - 1) \right)$$

ou

$$(6) \quad i^2 \lesseqgtr \frac{\mu}{2} (1 + 3^i - 2^{i+1})$$

et pour le minimum $i = 2$ on trouve

$$\mu \lesseqgtr 4,$$

limite plus élevée que celles obtenues jusqu'ici.

Changeant maintenant i en $i + 1$ dans (6) on trouve

$$\text{Accroissement du 1}^{\text{er}} \text{ membre} = 2i + 1,$$

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 2}^{\text{e}} \text{ membre} &= \frac{\mu}{2} \{ 3^{i+1} - 2^{i+2} - (3^i - 2^{i+1}) \} \\ &= \frac{\mu}{2} \{ 2 \cdot 3^i - 2^{i+1} \} = \mu (3^i - 2^i). \end{aligned}$$

La condition

$$2i + 1 \lesseqgtr \mu (3^i - 2^i)$$

est satisfaite avec $i = 2$, $\mu = 1$; *a fortiori* avec $\mu \lesseqgtr 4$; elle le sera

aussi quel que soit i ; car changeant encore i en $i + 1$ on a

Accroissement du 1^{er} membre = 1,

Accroissement du 2^e membre = $\mu (3^{i+1} - 2^{i+1} - (3^i - 2^i)) = \mu (2 \cdot 3^i - 2^i)$

et la condition

$$1 \leq \mu (2 \cdot 3^i - 2^i)$$

est évidemment toujours satisfaite.

En résumé nous trouvons 4 comme maximum minimorum; telle est donc la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

De l'examen du cas 2^e considéré isolément résulte que l'inégalité (4) satisfaite avec $\mu \geq 4$, $i = 2$, $p = 2$ le sera encore avec $\mu \geq 4$, $i = 2$, p quelconque.

Associant les résultats de 1^o et de 2^o, la conclusion finale est la suivante :

L'inégalité (4) est toujours satisfaite avec $\mu = 4$ et i, p nombres entiers quelconques, sauf l'unité.

Elle est donc aussi satisfaite avec p nombre premier quelconque.

D'ailleurs l'inégalité (4) est identique à la condition

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

avec

$$n = p^i - 1,$$

par suite on a

$$K < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et il en résulte, comme dans l'exposé de la méthode, que dans tout produit nx , où

$$n = p^i - 1 \quad \text{et} \quad p^{i-1} \leq x \leq p^i - 1,$$

on a

$$k < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque n est constant et $k \leq K$.

Remarquons enfin que la limite $\mu = 4$ convient à toutes les

valeurs de i , le minimum $i = 2$ inclus. Pour des valeurs de i supérieures à 2, la limite s'abaisserait.

Ainsi, en reprenant l'investigation avec $i \geq 3$, on trouverait, quel que soit p , minimum $\mu = 2$; avec $i \geq 5$, minimum $\mu = 1$.

Généralisation. — Passons maintenant au cas général

$$\begin{aligned} n &= |\lambda p^h, \lambda p^{h+1}, \dots, (\lambda + 1)p^{h-1}|, \\ X &= p^i - 1, \quad n_0 = \lambda p^h, \quad N = (\lambda + 1)p^{h-1}, \end{aligned}$$

et, comme ci-dessus,

$$N = p - 1 + \overline{p-1} \cdot p + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Notons

$$\sum X = i(p-1), \quad \sum N = h(p-1) + \lambda,$$

$$\sum n_0 = \lambda, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1} = \lambda \frac{p^h - 1}{p-1}.$$

Formons le produit NX

$$NX = [(\lambda + 1)p^{h-1} - 1][p^i - 1] = 1 - p^i - (\lambda + 1)p^h + (\lambda + 1)p^{h+i},$$

et l'on a identiquement

$$\begin{aligned} NX &= 1 + (p-1)p^i + (p-1)p^{i+1} + \dots + (p-1)p^{h-1} + (p-\lambda-2)p^h \\ &\quad + (p-1)p^{h+1} + \dots + (p-1)p^{h+i-1} + \lambda p^{h+i}. \end{aligned}$$

Pour la valeur limite $\lambda = p - 1$, le coefficient de p^h devient égal à -1 et la formule est en défaut. On la corrige immédiatement en écrivant ce terme et le suivant

$$\overline{p-1} \cdot p^h + \overline{p-2} \cdot p^{h+1},$$

sans changer les autres termes, sauf le dernier qui devient

$$(p-1)p^{h+i}.$$

Notons ici

$$\lambda = p - 1, \quad N = p^{h+1} - 1, \quad \sum N = (h+1)(p-1),$$

$$n_0 = (p-1)p^h, \quad \sum n_0 = p - 1, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1} = p^h - 1,$$

$$NX = (p^{h+1} - 1)(p^i - 1) = 1 - p^i - p^{h+1} + p^{h+i+1},$$

et l'on a bien

$$NX = 1 + (p-1)p^i + (p-1)p^{i+1} + \dots + (p-1)p^h + (p-2)p^{h+1} \\ + (p-1)p^{h+2} + \dots + (p-1)p^{h+i}.$$

Procédant, nous trouvons

$$\lambda < p-1, \quad \sum NX = h(p-1), \\ \lambda = p-1, \quad \sum NX = (h+1)(p-1).$$

Évaluons maintenant dans les deux cas la quantité K qui correspond au produit NX par la formule

$$\sum NX = \sum N \cdot \sum X = K(p-1).$$

On trouve d'abord

$$\lambda < p-1, \quad h(p-1) = [h(p-1) + \lambda] \cdot i(p-1) - K(p-1), \\ K = i[h(p-1) + \lambda] - h,$$

et la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ est

$$(7) \quad i[h(p-1) + \lambda] - h < \mu \lambda \frac{p^h - 1}{p-1}.$$

Ensuite

$$\lambda = p-1, \quad (h+1)(p-1) = (h+1)(p-1) \cdot i(p-1) - K(p-1), \\ K = i(h+1)(p-1) - (h+1),$$

et la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ est ici

$$(7^a) \quad i(h+1)(p-1) - (h+1) < \mu(p^h - 1).$$

Or, en faisant $\lambda = p-1$ dans l'inégalité (7), on aurait

$$i(h+1)(p-1) - h < \mu(p^h - 1),$$

et il est clair que si cette dernière inégalité est satisfaite, l'inégalité (7^a) le sera *a fortiori*. Il suffit donc d'examiner l'inéga-

lité (7) en y comprenant la valeur limite $\lambda = p - 1$. De la sorte, le cas exceptionnel rentre dans le cas général.

L'inégalité (7) contient deux nouvelles indéterminées h et λ . Montrons d'abord que si elle est satisfaite avec deux valeurs particulières h, λ , elle le sera encore avec toutes valeurs supérieures de ces deux quantités.

Nous procéderons comme avant, changeant successivement h en $h + 1$ et λ en $\lambda + 1$, et comparant les accroissements des deux membres.

Changement de h en $h + 1$ dans (7). — L'inégalité (7) peut s'écrire

$$h[i(p-1)-1] + i\lambda < \mu\lambda \frac{p^h-1}{p-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 1}^{\text{er}} \text{ membre} &= i(p-1)-1, \\ \text{» 2}^{\text{e}} \text{ »} &= \mu\lambda p^h. \end{aligned}$$

La condition à remplir est

$$i(p-1) \geq \mu\lambda p^h + 1,$$

et si elle est satisfaite pour une valeur quelconque de h , elle le sera *a fortiori* pour une valeur plus grande. Il suffit donc de la vérifier pour $h = i$, valeur minima. Elle devient alors

$$i(p-1) \geq \mu\lambda p^i + 1,$$

et comme on a toujours

$$ip \geq p^i,$$

la condition est, *a fortiori*, toujours satisfaite.

Changement de λ en $\lambda + 1$ dans (7).

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 1}^{\text{er}} \text{ membre} &= i, \\ \text{» 2}^{\text{e}} \text{ »} &= \mu \frac{p^h-1}{p-1}. \end{aligned}$$

La condition est

$$i \geq \mu \frac{p^h-1}{p-1},$$

et il suffit encore d'y remplacer h par i ; elle devient alors

$$i \geq \frac{p^i-1}{p-1}.$$

Le premier membre est indépendant de p ; le second, qui est égal à $1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}$, croît avec p ; on peut donc y remplacer p par son minimum 2, et il vient finalement

$$i < \mu(2^i - 1),$$

condition qui est satisfaite avec $i = 2$, $\mu \geq 1$.

Elle le sera encore avec $i > 2$; car, changeant i en $i + 1$, l'accroissement du premier membre est 1, celui du second est $\mu \cdot 2^i$, toujours supérieur.

Notre assertion est donc justifiée, et il suffit, pour déterminer μ dans (7), d'y faire $h = i$, $\lambda = 1$.

L'inégalité est alors

$$i[i(p-1)+1]-i < \mu \frac{p^i-1}{p-1}$$

ou

$$(8) \quad i^2(p-1) < \mu(1+p+p^2+\dots+p^{i-1}).$$

En la comparant avec l'inégalité (4), qui se rapporte au cas particulier $n = X = p^i - 1$, on voit que si (4) est satisfaite, (8) le sera *a fortiori*. Il en sera donc de même de (7). Un nouvel examen est, par suite, inutile, et nous pouvons prendre $\mu = 4$ comme limite inférieure valable dans tous les cas.

Première conclusion. — Quels que soient, dans le Tableau général ci-dessus, x , n , i et p , on trouvera dans le produit nx

$$(9) \quad k < 4 \frac{n - \sum n}{p-1},$$

x et n étant donnés, si l'on fait parcourir à p la suite des nombres premiers non supérieurs à x , on obtiendra pour chaque nombre premier un nouveau tableau, et, quelle que soit la subdivision à laquelle n appartienne dans ces différents tableaux, la condition (9) sera toujours satisfaite.

Cela étant, elle subsistera aussi lorsque le nombre premier p sera un de ceux pour lesquels $\sum x$ est minimum. Mais dans ce cas, c'est-à-dire avec $\sum x = 6$, il a été expliqué en détail dans ce Paragraphe, notamment dans l'exposé de la méthode d'investi-

gation, que l'inégalité (9) est un criterium de non-divisibilité du nombre

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.1 \dots x)^n}$$

par $(1.2 \dots n)^{\sigma+1}$ et il en résulte enfin que le nombre E sera divisible tout au plus par la puissance $\sigma + 3$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Toutefois $\mu = 4$ n'est qu'une première approximation et il est possible d'abaisser cette limite.

Cas dans lesquels $\mu = 1$. Faisant $\mu = 1$ dans l'inégalité (7) qui exprime la condition générale

$$K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1},$$

on obtient

$$(10) \quad i[h(p-1) + \lambda] - h < \lambda(1 + p + p^2 + \dots + p^{h-1}) \\ (h \geq i; 1 \leq \lambda \leq p-1).$$

Rappelons que la quantité maxima K correspond ici aux valeurs maxima $X = p^i - 1$, $N = (\lambda + 1)p^h - 1$ (voir généralisation).

Nous avons vu que si cette inégalité est satisfaite pour certaines valeurs i, p, h, λ elle sera satisfaite pour toutes valeurs supérieures de h et de λ , les autres quantités restant constantes.

Introduisant dans l'inégalité l'hypothèse

$$h = i + 1$$

elle devient

$$i[(i+1)(p-1) + \lambda] - (i+1) < \lambda(1 + p + \dots + p^i).$$

Pour les valeurs minima $i = 2 = p$, ce qui implique $\lambda = 1$ il vient

$$5 < 7.$$

L'inégalité est donc satisfaite pour des valeurs quelconques de i, p, λ , avec $h \geq i + 1$.

Conclusion. — Si l'on a

$$p^{i-1} \leq x < p^i; \quad p^{i+1} \leq n$$

pour tout nombre premier non supérieur à x , σ sera la puissance la plus élevée de la factorielle $1.2 \dots n$ qui divise le nombre $\frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$.

Dans le tableau des valeurs simultanées de x et de n la conclusion précédente qui résulte de l'hypothèse $h = i + 1$ s'applique à tout nombre n situé dans la troisième division du tableau ou dans une division supérieure. Avec $i = 2$, par exemple, le tableau est

$$\begin{array}{c} x \\ \{ \overline{p p + 1 \dots p^2 - 1} \} \\ \{ | p^2 p^2 + 1 \dots 2 p^2 - 1 | 2 p^2 \dots 3 p^2 - 1 | \dots | (p - 1) p^2 \dots p^3 - 1 | \} \\ n \\ \{ \overline{p^3 p^3 + 1 \dots 2 p^3 - 1} | 2 p^3 \dots \end{array}$$

Examen du cas $h = i$. Le nombre n dans cette hypothèse appartient à la seconde division du Tableau, qui se réduit à

$$\begin{array}{c} x \\ \{ \overline{p^{i-1} p^{i-1} + 1 \dots p^i - 1} \} \\ n \\ \{ \overline{p^i \dots 2 p^i - 1 | 2 p^i \dots 3 p^i - 1 | \dots | (p - 1) p^i \dots p^{i+1} - 1 |} \} \end{array}$$

Pour l'examen de ce cas il faut faire dans (10) $h = i$, d'où

$$(11) \quad i^2(p - 1) + i(\lambda - 1) < \lambda(1 + p + \dots + p^{i-1}).$$

Cette inégalité doit être satisfaite avec $\lambda < p$, et son exactitude dépendra des valeurs relatives des indéterminées qui y figurent.

Ci-joint l'énumération de tous les cas possibles. Les valeurs correspondantes de p et de λ sont inscrites en dessous de ces deux quantités et en regard les unes des autres.

	$p.$	$\lambda.$	Inégalité (11).
$i = 2$	2	1	en défaut
	3	1, 2	id.
	5	$\begin{cases} \leq 3 \\ \leq 4 \end{cases}$	id.
		$\begin{cases} \leq 3 \\ \leq 4 \end{cases}$	satisfaite
$i = 3$	2	1	en défaut
	3	$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	id.
		$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	satisfaite
	5	$\begin{cases} 1 \\ \leq 2 \end{cases}$	en défaut
	7	$\begin{cases} 1 \\ \leq 2 \end{cases}$	satisfaite
$i = 4$	2	1	id.
	3	$\begin{cases} 1 \\ \leq 1 \end{cases}$	en défaut
		$\begin{cases} 1 \\ \leq 1 \end{cases}$	satisfaite
$i = 5$	2	≤ 1	d.

Si l'on remplace dans (11) λ par μ , on retombe sur l'inégalité (4), qui exprime la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ dans le produit NX avec $n_0 = n = N = X = p^i - 1$; l'inégalité (4) est donc satisfaite avec $\mu = 1$, $i \geq 5$ et la remarque en a déjà été faite en terminant l'examen du cas unique où n coïncide avec ses limites extrêmes.

En résumé, le Tableau des valeurs simultanées de x et de n , pour lesquelles l'inégalité (11) est toujours satisfaite, quel que soit p , est

$$x = \{ p^{i-1} p^{i-1} + 1 \dots p^i - 1 \}, \\ i \geq 5, \quad n = p^i - 1 \mid p^i, p^{i+1}, \dots, 2 p^i - 1 \mid 2 p^i, \dots, 3 p^{i-1} - 1 \mid 3 p^i \dots \\ 4 p^{i-1} - 1 \mid \dots \mid (p-1) p^i \dots p^{i+1} - 1 \mid \}.$$

En prolongeant ce Tableau indéfiniment, on retomberait sur le cas $h \geq i + 1$ examiné tout d'abord, et la condition $i \geq 5$ disparaîtrait.

Le produit nx de deux nombres quelconques, pris dans le Tableau ci-dessus, donnera

$$k < \frac{n - \sum n}{p-1},$$

car l'inégalité (11) exprime la condition générale $\mu = 1$, c'est-à-dire

$$K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1},$$

K se rapportant au produit NX dans lequel $X = p^i - 1$ est un nombre fixe, et N un nombre variable égal au maximum de n dans une subdivision quelconque du Tableau, tandis que n_0 représente le minimum de n dans la même subdivision, et nous avons vu que la condition $\mu = 1$ entraîne

$$k < \frac{n - \sum n}{p-1},$$

puisque n_0, n, N étant pris dans la même subdivision, on a

$$k \equiv K, \quad \frac{n - \sum n}{p-1} = \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}.$$

Le nombre x étant choisi égal ou supérieur à 2^4 , il y aura toujours un nombre premier p , tel que $p^{i-1} \leq x < p^i$ avec $i \geq 5$ qui conviendra par conséquent au Tableau ci-dessus. Il peut se faire que l'expression arithmétique de x au moyen de p

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a_i < p)$$

donne $\sum x = \sigma$. Dans ce cas, ainsi qu'il a été expliqué en détail

au début de ce paragraphe, l'inégalité $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$ dans le produit nx où $n \geq x$ est le criterium de la non-divisibilité du nombre $E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ par $p^{\sigma+1}$ et, par suite aussi, par $(1.2 \dots n)^{\sigma+1}$.

Donc si p , dans le Tableau ci-dessus, est un des nombres premiers pour lesquels $\sum x = \sigma$, le nombre E ne sera pas divisible par la puissance $\sigma + 1$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Bien que, n_0, n, N appartenant à une même subdivision du Tableau, l'inégalité $K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$, relative au produit NX , entraîne $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$ dans le produit nx , il pourra arriver que, la première inégalité n'étant pas satisfaite, la seconde le soit; on en rencontrera de nombreux exemples.

Cas particuliers et exemples. — Notons d'abord

$$\begin{aligned} x &= p^h, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots \end{aligned}$$

Dans le produit nx , on aura évidemment $0 = k < \frac{n - \sum n}{p-1}$.
(Voir *Remarque*, § 2.)

Mêmes conclusions avec $n = p^h$, x quelconque.

Dans le premier cas, on a évidemment $\sigma = 1$, et l'on en con-

clut que le nombre $E = \frac{1.2 \dots np^h}{(1.2 \dots p^h)^n}$ n'est pas divisible par le carré de la factorielle $1.2 \dots n$.

Exemple 1. — Soit maintenant

$$x = 1 + p, \quad n_0 = p^2, \quad N = 2p^2 - 1.$$

Nous écartons les hypothèses $p = 2$ et $1 + p = 2^h$ qui ramènent au cas précédent.

Dans la Tableau qui correspond à p , on a $i = 2$; x est égal au deuxième nombre inscrit au Tableau, et n tombe dans la première subdivision qui correspond à $\lambda = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{c} p \quad p+1 \dots p^2-1 \\ x \quad \quad \quad N \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} n \\ \frac{n}{n_0} \quad \frac{p^2-1}{N} \end{array} \right\}.$$

L'inégalité (11), qui exprime relativement au produit NX la condition $K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$, est en défaut (*voir* l'énumération). Mais il pourrait se faire qu'avec un autre produit on trouvât $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$. Prenons, à titre d'essai, le produit Nx . On peut l'évaluer directement.

On a

$$x = 1 + 1.p, \quad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p - 1)p + 1.p^2,$$

$$\sum x = 2, \quad \sum N = 2p - 1, \quad \frac{N - \sum N}{p - 1} = p - 1 + \frac{p^2 - 1}{p - 1} = 2p,$$

$$Nx = [p - 1 + (p - 1)p + 1.p^2](1 + 1.p) = C_0 + C_1p + C_2p^2 + C_3p^3,$$

dans les notations du Paragraphe 4. Ici

$$C_0 = p - 1, \quad C_1 = 2(p - 1), \quad C_2 = p, \quad C_3 = 1.$$

On ramènera cette expression à la forme exigée dans le système de numération de base p , savoir

$$Nx = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots \quad (c < p)$$

par les opérations indiquées au Paragraphe 4.

$$G_0 = p - 1 = c_0, \quad G_1 = \underbrace{1 \cdot p + p}_{k_1} - c_1, \quad G_2 = \underbrace{k_1 + 1 \cdot p + 1}_{k_2} - c_2,$$

$$G_3 + k_2 = 2 - c_3 \quad \text{si} \quad p > 2.$$

On a donc

$$k = k_1 + k_2 = 2 \quad \text{avec} \quad p > 2;$$

on aurait

$$k = 3 \quad \text{avec} \quad p = 2.$$

Dans tous les cas, on a

$$k < \frac{N - \sum N}{p - 1},$$

c'est-à-dire

$$2 < 2p \quad \text{avec} \quad p > 2,$$

$$3 < 2p \quad \text{avec} \quad p = 2.$$

De plus, on a

$$\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1,$$

d'où suit, avec $p > 2$,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

Soit maintenant n un nombre quelconque entre les limites n_0 , N et k' , la quantité qui correspond au produit nx . On aura certainement

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque k' est au plus égal à k et que $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ est au moins égal

$$\text{à} \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

D'autre part, on a $\sum x = 2$ et l'on peut être sûr que 2 est le minimum $\sum x$, c'est-à-dire σ . Car, en supposant toujours $p > 2$, le nombre $x = 1 + 1 \cdot p$ est un nombre pair, donc un autre nombre premier P ne donnera pas $x = P^h$ (seul cas dans lequel on

trouverait $\tau = 1$), à moins que $P = 2$, d'où $x = 1 + 1, p = 2^k$, hypothèse écartée au début.

Cela étant, d'après une remarque souvent répétée, la condition

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

est un criterium de la non-divisibilité du nombre $E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ par $p^{\tau+1}$, d'où l'on conclut que ce même nombre E avec $x = p + 1$, $p > 2$, et $n = |p^2, p^2 + 1 \dots 2p^2 - 1|$ est divisible par le carré de la factorielle $1.2 \dots n$, mais non par une puissance supérieure.

Exemple 2.

$$x = 2p, \quad n_0 = p^2, \quad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p - 1)p + 1.p^2;$$

$$\sum x = 2, \quad \sum N = 2p - 1, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = p + 1, \quad \frac{N - \sum N}{p - 1} = 2p.$$

On a encore $i = 2$ dans le Tableau, et l'inégalité (11) est en défaut.

Évaluons le produit Nx .

$$Nx = (2p^2 - 1)2p = 2p + 4p^3 = (p - 2)p + (p - 1)p^2 + 3p^3.$$

développement exact en admettant $p > 3$.

Dans cette hypothèse,

$$\sum Nx = 2p,$$

et la formule

$$\sum Nx = \sum N. \sum x - k(p - 1)$$

donne

$$2p = (2p - 1)2 - k(p - 1); \quad k = 2.$$

et l'on a, comme dans l'exemple 1,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} < \frac{N - \sum N}{p - 1}.$$

On en conclut, comme dans cet exemple, que dans tout produit nx où $x = 2p$ et $p^2 \leq n < 2p^2$, on a $k' < \frac{n - \sum_{p=1}^n n}{p-1}$.

D'ailleurs, ici encore, $\sigma = 2$, et il en résulte que le nombre $E = \frac{1.2.3...2p.n}{(1.2.3...2p)^n}$ avec $p > 3$ et $n = [p^2, p^2 + 1, \dots, 2p^2 - 1]$ n'est pas divisible par une puissance de la factorielle $1.2...n$ supérieure à 2.

On pourrait multiplier les exemples de ce genre, qui montrent que l'on trouvera $k < \frac{n - \sum_{p=1}^n n}{p-1}$ avec des valeurs de n plus rapprochées de x que ne l'indique la méthode générale, et il est possible que σ soit dans tous les cas l'exposant maximum de la puissance de $1.2...n$ qui divise $\frac{1.2...nx}{(1.2...x)^n}$; mais il ne serait pas facile de resserrer les limites n_0, N , de manière à obtenir une certitude à cet égard.

Sauf le cas isolé $n_0 = N = X = p^i - 1$, les résultats obtenus jusqu'ici ne s'appliquent qu'aux nombres x et n , qui ne sont pas compris dans les mêmes puissances consécutives d'un même nombre premier. S'il en était autrement, c'est-à-dire si x et n se trouvaient tous deux dans la première division du Tableau, la méthode générale ne pourrait plus s'appliquer sans modification. La difficulté consisterait dans le choix de limites n_0, N susceptibles de conduire à un maximum numérique pour μ dans l'iné-

galité $K < \mu \frac{n_0 - \sum_{p=1}^n n}{p-1}$, et il faudrait avoir recours à d'autres moyens. Dans son étendue actuelle, le présent travail suffit néanmoins pour montrer le parti que l'on peut tirer théoriquement de la quantité k dont la nature n'indique *a priori* autre chose qu'un élément matériel de calcul numérique.

SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES;

Par M. GEORGES REMOUNDOS.

1. M. P. Painlevé, dans son Cours à l'École normale supérieure sur les fonctions abéliennes, a signalé comme vraisemblable une proposition, qui est une extension aux fonctions non uniformes du célèbre théorème de M. E. Picard, sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé ⁽¹⁾.

J'ai confirmé, dans certains cas intéressants, l'idée de l'éminent géomètre par une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 20 avril 1903 ⁽²⁾.

J'espère que prochainement j'établirai cette extension dans le cas le plus général, à l'aide des intégrales abéliennes et en suivant une marche analogue à celle qui a permis à M. Picard d'établir son théorème.

Je me propose de développer ici la Note citée en indiquant en même temps comment ces considérations se rattachent à un théorème plus général, concernant les zéros d'une classe très étendue de fonctions ayant une infinité de branches.

2. Considérons l'équation

$$(1) \quad F(z, u) = \sigma_0(u) + \sigma_1(u)A_1(z) + \sigma^2(u)A_2(z) + \dots + \sigma_v(u)A_v(z) = 0,$$

où $A_1(z), A_2(z), \dots, A_n(z)$ désignent des fonctions transcendentes entières de *genre fini* et $\sigma_0(u), \sigma_1(u), \dots, \sigma_v(u)$ des fonctions entières de u absolument quelconques.

Considérons pour le moment u comme paramètre, et appelons valeurs *exceptionnelles* de u celles pour lesquelles $F(z, u)$ admet un nombre fini de zéros.

S'il y a des valeurs de u pour lesquelles $F(z, u)$ soit une constante, ces valeurs sont toutes exceptionnelles; une telle valeur est l'infini ⁽³⁾; cette valeur exceptée, toutes les autres annulent à la

⁽¹⁾ Voir *Traité d'Analyse*, t. III, p. 346.

⁽²⁾ Je prie le lecteur de combiner la lecture de cette Note avec celle du présent Mémoire. Pour abréger, je la désignerai par la lettre (N).

⁽³⁾ $F(x, \infty)$ n'est pas une constante, si tous ces $\sigma_i(u)$ ne sont pas des polynomes; cependant, l'infini est toujours une valeur exceptionnelle.

tités $\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{\nu+1})$, $\varphi(\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{\nu+1})$, ..., $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu)$ ne soient nulles ⁽¹⁾.

M. Borel a fait une étude approfondie des relations de la forme (4) beaucoup plus générales que celle-ci et démontré leur impossibilité, à l'aide de la théorie de la croissance des fonctions entières, dans son important Mémoire. J'y renvoie le lecteur et je crois inutile de répéter ici la démonstration, qui est fort simple dans le cas qui nous occupe, car une dérivation de la relation (4) nous conduit immédiatement à une relation de la même forme, ayant une exponentielle de moins.

Je dois remarquer que j'ai supposé que $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$, sont des transcendentes distinctes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre elles de relations linéaires avec des polynomes comme coefficients.

Cette hypothèse, qui ne diminue pas la généralité de la question, entraîne le fait qu'aucun des $Q(z)$ n'est une constante.

En désignant par (E) l'ensemble des racines de l'équation, chacune étant accompagnée par ses valeurs équivalentes,

$$(5) \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}, \omega) = 0,$$

on a le théorème suivant :

1. La fonction $u(z)$ à un nombre infini de branches, définie par l'équation (1), prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable qui fait partie de l'ensemble (E).

Ce théorème s'applique dans le cas où le nombre des valeurs exceptionnelles non équivalentes dépasse ν , c'est-à-dire le nombre des transcendentes distinctes qui figurent dans $F(z, u)$.

3. Je dois ajouter que l'on arriverait aux mêmes résultats si l'on supposait que $\sigma_0(n)$, $\sigma_1(u)$, ..., $\sigma_\nu(u)$ sont des fonctions uniformes quelconques, n'ayant que des points singuliers essen-

(1) Voir É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX, p. 385). Nous supposons ici que, parmi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$, il n'y a pas deux valeurs équivalentes. Deux valeurs α_1 et α'_1 seront dites *équivalentes* lorsque le rapport $F(z, \alpha_1) : F(z, \alpha'_1)$ est une fonction rationnelle. Si α_1 est exceptionnel, α'_1 l'est aussi.

tiels isolés; alors les points limites de l'ensemble (E) seraient parmi ces points singuliers essentiels, qui pourraient être aussi des valeurs exceptionnelles.

Dans les cas où les $\sigma(u)$ admettent des lignes singulières essentielles, il pourrait se faire que l'infini fût un point d'intermination incomplète de la fonction $u(z)$, d'après la terminologie de M. Painlevé ⁽¹⁾, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs exceptionnelles fût continu, une aire, par exemple.

4. Passons maintenant au cas, qui a fait l'objet de la Note (N), et qui présente le plus grand intérêt; c'est le cas où $F(z, u)$ est un polynôme, par rapport à u . Soit

$$(6) \quad f(z, u) = a^\nu + A_1(z)u^{\nu+1} + A_2(z)u^{\nu+2} + \dots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0.$$

Ici, on voit tout de suite que la fonction $\varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu)$ est toujours différente de zéro, lorsque les valeurs des $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ sont distinctes et n'appartiennent pas à (E).

Quant aux valeurs (E), elles n'existent que dans le cas où le nombre des transcendentes distinctes qui figurent dans $f(z, u)$ est moindre que son degré ν , et sont au plus ν , l'infini compris. Elles sont d'une nature tout à fait différente des autres, car elles ne dépendent pas du tout des coefficients $A(z)$; elles seraient toujours exceptionnelles, quelles que soient les fonctions $A(z)$, pourvu que la forme de l'équation $f(z, u) = 0$ reste la même. Nous pouvons les appeler valeurs exceptionnelles *formelles*.

On en déduit immédiatement les théorèmes énoncés dans la Note (N).

Je n'ai pas cherché à reconnaître si le théorème (I) nous permet de trouver des fonctions à un nombre infini de branches définies par (1) et pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles soit limité, au plus égal à $\nu + 1$, l'infini compris.

5. Appelons *genre* de la fonction à ν branches définie par l'équation (6) le plus grand des genres de ses coefficients $A_1(z), A_2(z), \dots, A_\nu(z)$.

⁽¹⁾ *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (Comptes rendus, t. CXXXI, 1900).

On donnerait une pareille définition de son ordre. L'ordre ainsi défini reste invariable quand on effectue sur u une transformation homographique.

En effet, en posant

$$u = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

on trouve une équation de la forme

$$(7) \quad u_1^g + a_1(z)u_1^{g-1} + a_2(z)u_1^{g-2} + \dots + a_{g-1}(z)u_1 + a_g(z) = 0,$$

dans laquelle les $a(z)$ désignent des fonctions méromorphes dont l'ordre est au plus égal à g ⁽¹⁾, si g est le plus grand des ordres des $A(z)$. La transformation homographique ne peut donc élever l'ordre. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait. Les résultats récents de MM. Boutroux et Lindelöf ne nous permettent pas de dire la même chose pour le genre.

On voit que la définition que je donne ici est en parfait accord avec celle du genre ou de l'ordre des fonctions méromorphes donnée par M. Borel.

6. M. E. Maillet, dans son important Mémoire *Sur les fonctions entières* (Journal de M. Jordan, fascicule IV, 1902), appelle *fonctions quasi entières et quasi méromorphes* les fonctions de la forme

$$(8) \quad f(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

où $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ désignent des fonctions entières ou méromorphes et définit l'ordre d'une telle fonction dans le voisinage de chacun des points singuliers essentiels. Il démontre que $f(z)$ peut se mettre sous la forme d'un produit

$$(9) \quad f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \psi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \dots, \psi_v\left(\frac{1}{z-a_v}\right),$$

où $\psi_1(t), \dots, \psi_v(t)$ sont aussi des fonctions entières ou méromorphes.

(1) Voir ÉMILE BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 62.

Cette propriété nous permet d'étendre facilement au cas où les $A(z)$ sont des fonctions quasi entières ou quasi méromorphes toutes les propositions que je viens de démontrer ici.

7. Convenons d'appeler fonction *algébroïde* toute fonction à un nombre fini de branches, définie par une équation telle que (6), où les $A(z)$ sont des fonctions entières ou méromorphes. On définirait de la même façon les fonctions *quasi algébroïdes*.

J'ai donc démontré le théorème suivant :

II. *Toute fonction transcendante algébroïde ou quasi algébroïde à ν branches et de genre fini prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf 2ν au plus. Si le nombre des valeurs exceptionnelles est supérieur à 2ν , la fonction $u(z)$ est algébrique.*

8. En terminant, je dois observer que l'on pourrait généraliser tous les théorèmes précédents en utilisant les relations exponentielles, dont l'impossibilité est démontrée par M. Borel dans son Mémoire déjà cité des *Acta mathematica* (1).

Observation. — Le théorème (I) suppose explicitement que tous les $A(z)$ sont des transcendentes. Le cas contraire nécessite une discussion spéciale que je ferai dans un autre travail.

Ici j'observe que, pour certaines valeurs exceptionnelles, le nombre des exponentielles, qui figurent dans le premier membre de la relation (4) peut bien se réduire. Cela arrive dans les cas où, parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu+1}$, il y a des valeurs équivalentes

Il n'y a que le second membre qui ne subira aucune réduction. Il est aisé de voir qu'il est égal à $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu \alpha_{\nu+1})$, avec

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} \sigma_0(\alpha_1) & \sigma_0(\alpha_2) & \dots & \sigma_0(\alpha_\nu) & \sigma_0(\alpha_{\nu+1}) \\ \sigma_1(\alpha_1) & \sigma_1(\alpha_2) & \dots & \sigma_1(\alpha_\nu) & \sigma_1(\alpha_{\nu+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\nu(\alpha_1) & \sigma_\nu(\alpha_2) & \dots & \sigma_\nu(\alpha_\nu) & \sigma_\nu(\alpha_{\nu+1}) \end{vmatrix}.$$

En appliquant donc toujours la proposition fondamentale de

(1) Au moment de la correction des épreuves, nous ajoutons que ce théorème de M. Borel va assez loin pour nous affranchir de toute restriction sur le genre des $A_i(z)$.

M. Borel (Mémoire cité), si l'on veut, par suite, tenir compte de toutes les valeurs exceptionnelles, on doit exprimer le théorème en question par la seule condition

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_\nu, x_{\nu+1}) = 0.$$

Ainsi, $\nu + 1$ valeurs exceptionnelles autres que (E) doivent satisfaire à cette relation.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT GUIDÉ PAR UNE COURBE RIGIDE;

Par M. L. LECORNU.

L'expérience dite *bouclage de la boucle* donne une certaine actualité à la question suivante que je me propose d'examiner ici en détail ⁽¹⁾ :

Quelle doit être la forme d'une courbe rigide, située dans un plan vertical pour qu'un mobile pesant qui parcourt cette courbe sans frottement exerce sur elle une pression constante.

Pour fixer les idées supposons jusqu'à nouvel ordre que la courbe tourne sa concavité vers le bas et que le mobile posé du côté de cette concavité est animé d'un mouvement descendant. J'appelle θ l'angle aigu de la tangente avec l'horizontale, v la vitesse, ρ le rayon de courbure. Je prends la masse du mobile égale à l'unité et je désigne par g son poids, par λg l'action de la courbe sur le mobile égale et opposée à la pression constante du mobile sur la courbe.

On a la relation

$$(1) \quad \frac{v^2}{\rho} = g(\lambda + \cos \theta),$$

à laquelle s'ajoute l'équation des forces vives

$$(2) \quad v dv = g \sin \theta ds.$$

L'arc élémentaire ds est lié au rayon de courbure par la for-

⁽¹⁾ M. Bourlet (*Nouvelles Annales*, avril 1903) a déjà abordé cette question et montré que, même en tenant compte d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, le problème se ramène à des quadratures.

mule $\varrho = \frac{ds}{d\theta}$. L'élimination de ϱ et de ds donne

$$(3) \quad \frac{dv}{v} = \frac{\sin \theta d\theta}{\lambda + \cos \theta},$$

d'où, en appelant k une constante arbitraire,

$$(4) \quad v = \frac{k}{\lambda + \cos \theta}.$$

Portons dans (1) cette valeur de v . Il vient

$$(5) \quad \varrho = \frac{k^2}{g(\lambda + \cos \theta)^3} = \frac{v^3}{kg}.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel au cube de la vitesse. Soit y la distance du mobile à l'horizontale sur laquelle sa vitesse s'annulerait. On a

$$(6) \quad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{k^2}{2g(\lambda + \cos \theta)^2}.$$

La comparaison des équations (5) et (6) donne

$$(7) \quad \varrho = \frac{2\sqrt{2g}}{k} y^{\frac{3}{2}}.$$

Le carré du rayon de courbure est donc proportionnel au cube de l'ordonnée.

On retrouve là une propriété connue de la parabole ; celle-ci est une solution particulière de la question : elle correspond au cas où la pression est nulle.

Signalons en passant la solution singulière $\varrho = \infty$, $\cos \theta = -\lambda$, qui correspond à une droite inclinée : il est clair d'ailleurs que toute trajectoire rectiligne répond à la question.

L'équation (4) admet une interprétation remarquable. Si l'on construit l'*hodographe* du mouvement en menant par une origine fixe un vecteur égal et parallèle à la vitesse v , les coordonnées polaires d'un point de cette hodographe sont v, θ . On en conclut immédiatement que :

L'hodographe est une section conique.

Soient a le demi-grand axe de cette conique et e son excentricité. En identifiant l'équation (4) avec l'équation

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

on trouve

$$e = \frac{1}{\lambda}, \quad a = \frac{ke}{1 - e^2} = \frac{k\lambda}{\lambda^2 - 1}.$$

D'après cela l'hodographe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la pression du mobile sur sa trajectoire est supérieure, égale ou inférieure au poids.

La vitesse aréolaire sur l'hodographe est $v^2 \frac{d\theta}{dt}$ ou $\frac{v^3}{\rho}$. Elle est donc, en vertu de la relation (5) égale à la constante kg . Comme l'origine de l'hodographe est un foyer de la conique, la constance de la vitesse aréolaire montre qu'on se trouve en présence du mouvement planétaire. En d'autres termes : *si x, y sont les coordonnées du mobile pesant, le point dont les coordonnées sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ se meut exactement comme une planète.*

Voici un corollaire de ce théorème. On sait que la vitesse du point qui décrit l'hodographe est identique à l'accélération totale du mobile considéré. Or, dans le cas présent, l'accélération totale, par hypothèse, est la résultante d'une accélération verticale g et d'une accélération λg normale à la vitesse. Ces deux composantes sont constantes. Si l'on revient à l'hodographe, on voit que :

Dans le mouvement planétaire la vitesse est à chaque instant la résultante de deux vitesses constantes, l'une perpendiculaire au grand axe et l'autre normale au rayon vecteur issu du Soleil.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement ce résultat.

Une autre conséquence du même théorème consiste dans la possibilité d'utiliser, pour l'étude du mouvement avec pression constante, les formules classiques dans lesquelles intervient l'anomalie excentrique.

Admettons d'abord que l'hodographe soit elliptique et appelons u

l'anomalie excentrique. On a

$$\begin{aligned} v &= a(1 - e \cos u), \\ \cos \theta &= \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}, \quad \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2}, \\ u - e \sin u &= nt. \end{aligned}$$

Le moyen mouvement n qui figure dans cette dernière formule est égal à la constante des aires, qui est ici kg , divisée par ab . Donc

$$n = \frac{kg}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{g \sqrt{1 - e^2}}{ae}.$$

Ces équations déterminent, en fonction du temps, la vitesse v et l'inclinaison θ de la tangente sur l'horizontale.

L'ordonnée y est fournie immédiatement par la relation

$$(8) \quad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{a^2}{2g} (1 - e \cos u)^2.$$

Pour avoir l'abscisse x , il suffit d'intégrer la relation

$$dx = \cos \theta ds = v \cos \theta dt = \frac{a}{n} (1 - e \cos u) (\cos u - e) du.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté et, en remplaçant n par sa valeur, on trouve

$$(9) \quad x = \frac{a^2 e}{g \sqrt{1 - e^2}} \left[-\frac{3}{2} eu + (1 + e^2) \sin u - \frac{e}{4} \sin 2u \right].$$

On connaît ainsi x, y en fonction de l'anomalie excentrique, et par conséquent en fonction du temps.

Si l'on forme l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve

$$ds = \frac{a^2 e}{g \sqrt{1 - e^2}} (1 - e \cos u)^2 du = \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} y du.$$

L'intégration donne

$$s = \frac{a^2 e}{g \sqrt{1 - e^2}} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) u - 2e \sin u + \frac{e^2}{4} \sin 2u \right].$$

La valeur de y peut se mettre sous la forme analogue

$$y = \frac{a^2}{2g} \left(1 + \frac{e^2}{2} - 2e \cos u + \frac{e^2}{2} \cos 2u \right).$$

Ces diverses formules montrent que l'expression $3es + (2 + e^2)x$ est fonction linéaire de $\sin u$, $\sin 2u$ et par conséquent s'exprime algébriquement en fonction de y . L'arc s est donc fonction algébrique des coordonnées de son extrémité variable.

La valeur de x ne se présente sous forme réelle que si l'excentricité e est inférieure à l'unité. Dans le cas où l'hodographe est hyperbolique ($e > 1$) on ramène à la forme réelle en posant $u = i\omega$, ce qui introduit des sinus et des cosinus hyperboliques. Les formules deviennent

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \frac{a^2 e}{g\sqrt{e^2-1}} \left[-\frac{3}{2} e \omega + (1+e^2) \text{Sh } \omega - \frac{e}{4} \text{Sh } 2\omega \right], \\ y &= \frac{a^2}{2g} \left[1 + \frac{e^2}{2} - 2e \text{Ch } \omega + \frac{e^2}{2} \text{Ch } 2\omega \right], \\ \omega - e \text{Sh } \omega &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{ae} gt. \end{aligned}$$

Les deux coordonnées sont infinies en même temps que t . La courbe, symétrique par rapport à l'axe des y , présente deux branches paraboliques dont les directions asymptotiques sont $\tan \theta = \pm \sqrt{e^2-1}$. La valeur de x , positive pour les petites valeurs de t , devient ensuite négative : il y a donc un point double réel sur l'axe des y .

L'hodographe est constituée par la branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le foyer.

Le cas intermédiaire $e = 1$ correspond à l'hodographe parabolique. Remplaçons, dans la formule (9), a par sa valeur $\frac{ke}{1-e^2}$. Pour que x demeure fini quand e tend vers l'unité, il faut que u soit infiniment petit. Développant alors la valeur de u suivant les puissances croissantes de u , on reconnaît que u doit être du même ordre que $\sqrt{1-e}$.

Si l'on pose $\frac{u}{2\sqrt{1-e}} = \varphi$, il vient à la limite

$$x = \frac{k^2}{4g} \left(\varphi - \frac{\varphi^5}{5} \right).$$

On trouve aussi

$$r = \frac{h^2}{8g} (1 + \varphi^2)^2, \quad \varphi + \frac{\varphi^3}{3} = \frac{2g l}{h}.$$

La trajectoire est une courbe unicursale du cinquième ordre avec un point double réel ($\varphi^2 = 5$) et deux branches paraboliques à direction asymptotique horizontale.

Si l'on fait croître e jusqu'à $+\infty$, on parvient au mouvement parabolique ordinaire dont l'hodographe est une droite verticale.

Restent à examiner les valeurs négatives de e . Le changement de signe de e , et par conséquent de λ , nous avertit que la pression est renversée, c'est-à-dire que le mobile est de l'autre côté de sa trajectoire. Pour bien voir comment les choses se passent, partons de la position pour laquelle $\theta = 0$ et soit v_0 la vitesse correspondante. La formule (4) devient $v = v_0 \frac{\lambda + 1}{\lambda + \cos \theta}$. Remplaçons λ

par $-\frac{1}{e'}$, e' étant la valeur absolue de e . Nous avons ainsi

$v = v_0 \frac{e' - 1}{e' \cos \theta - 1}$. Si e' est compris entre 1 et ∞ , l'hodographe est une branche d'hyperbole tournant sa convexité vers le foyer.

Les directions asymptotiques sont données par $\cos \theta = \frac{1}{e'}$, d'où $\tan \theta = \sqrt{e'^2 - 1}$. La valeur (10) de x , dans laquelle il faut maintenant changer e en $-e'$, ne s'annule plus pour aucune valeur de ω , autre que zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de point double réel sur l'axe de symétrie.

A mesure que la valeur absolue de e' se rapproche de l'unité, les deux asymptotes de l'hodographe tendent à se confondre; finalement, pour $e' = 1$, l'hodographe se réduit à une demi-droite horizontale. En même temps la trajectoire du mobile a pour limite une droite horizontale sur laquelle celui-ci se trouve posé: pour une pareille droite il est clair que la pression exercée par le mobile est égale à son poids, ce qui correspond bien à l'hypothèse $e' = 1$.

Supposons enfin e' compris entre l'unité et zéro. L'équation (1) mise sous la forme $\frac{v^2}{\rho} = g \left(\cos \theta - \frac{1}{e'} \right)$ montre que ρ est maintenant négatif, et en particulier que pour le point de départ ($\theta = 0$) la concavité de la courbe est tournée vers le haut. L'hodographe

est d'ailleurs elliptique et l'on retrouve la forme de trajectoire déjà rencontrée pour les valeurs de e comprises entre zéro et l'unité avec cette seule différence que le point de départ est à un sommet inférieur au lieu d'un sommet supérieur.

Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Les trois figures ci-dessus résument toute la discussion. La figure 1 correspond à l'hodographe elliptique (λ supérieur à 1 ou inférieur à $\varepsilon - 1$). La figure 2 se rapporte à l'hodographe hyperbolique avec valeur positive de λ ($\lambda < 1$) et la figure 3 à l'hodographe hyperbolique avec valeur négative de λ ($\lambda > -1$). Les petits disques hachurés indiquent de quel côté de la trajectoire circule le mobile pesant.

INFLUENCE DE LA FORME DES ÉQUATIONS EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

Par M. C.-A. LAISANT.

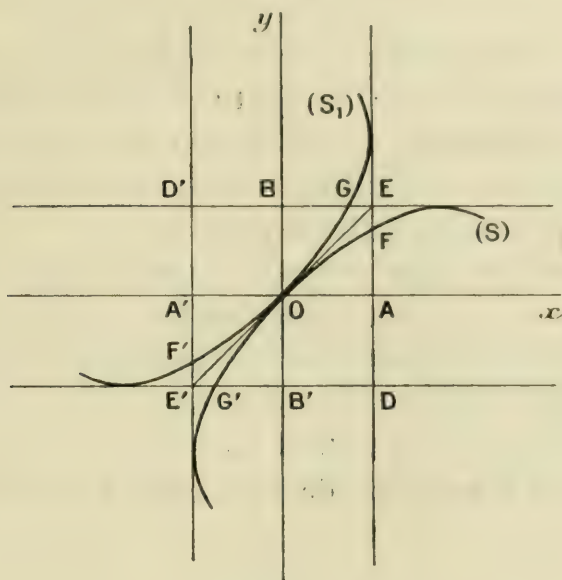
Il y a longtemps déjà j'ai publié, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, une Communication intitulée : *Sur la représentation analytique des figures et leur segmentation*, où je faisais ressortir la possibilité de représenter à volonté une partie seulement d'une courbe donnée. Les remarques très brèves que je présente ci-après se rattachent un peu au même ordre d'idées, tout en étant différentes de celles que je viens de rappeler. Elles reposent sur la limitation qu'on s'impose dans le champ de variation d'une coordonnée x , si dans l'équation de la figure entre une fonction $\varphi(x)$ qui devient imaginaire lorsque x dépasse certaines valeurs limites.

Je me bornerai, pour plus de brièveté, à des exemples simples.

Soit $y = \sin x$ ou $y - \sin x = 0$ l'équation d'une sinusoïde. On peut aussi bien l'écrire $x - \arcsin y = 0$, et elle représente la courbe entière, tout comme la précédente, puisque y ne varie qu'entre -1 et $+1$, mais qu'à chaque valeur de y correspondent

une infinité de valeurs de x . De même, $x - \sin y = 0$, ou $y - \arcsin x = 0$ représente toute la sinusoïde S_1 . Si nous écrivons $(y - \sin x)(x - \sin y) = 0$, nous aurons l'équation de l'ensemble des deux sinusoïdes. Mais $(y - \sin x)(y - \arcsin x) = 0$ représentera seulement la partie de la figure comprise entre les deux parallèles AD et $A'D'$ à Oy , puisque x ne peut varier que

Fig. 1.



de -1 à $+1$; c'est-à-dire toute la sinusoïde S_1 et une partie seulement $(F'O F)$ de la courbe S . De même $(x - \sin y)(x - \arcsin y) = 0$ représente toute la sinusoïde S et l'arc $G'OG$ de la courbe S_1 . Enfin $(y - \arcsin x)(x - \arcsin y) = 0$ représente la partie comprise dans le carré $DE D'E'$, c'est-à-dire une figure ayant quatre points d'arrêt.

On reconnaîtrait de même que $\arcsin x = \arcsin y$ est une équation qui représente un segment de droite, diagonale $E'E$ du carré $DE D'E'$ dans la figure précédente.

Je pourrais rappeler aussi l'exemple de la courbe ayant pour équation $y = \cos \sqrt{x}$; elle a ou n'a pas un point d'arrêt sur Oy , suivant qu'on se croit obligé de donner à x des valeurs exclusivement positives, ou qu'on s'autorise à faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, j'ai entendu des mathématiciens fort éminents, à qui je posais la question, se demander si $y = x$ ou $y = (\sqrt{x})^2$ sont deux équations qui représentent bien la même figure.

Tout ceci montre à quel point la forme des équations importe en Géométrie analytique, et quelles précautions devraient s'imposer dans l'enseignement, lorsqu'on opère des transformations de calcul.

SUR UN HYPERBOLOGRAPHE A LIQUIDE;

Par M. E. ESTANAVE.

Considérons une courbe C dont l'équation, rapportée à deux axes rectangulaires, est $y = f(x)$ et une sécante AB, soient A et B deux points consécutifs d'intersection de la droite et de la courbe C. Cherchons l'enveloppe de la droite AB qui limite sur la courbe C une surface d'aire donnée.

Tout d'abord, on peut remarquer que si l'aire ACB est constante le point de contact de AB et de son enveloppe sera au milieu de AB; il suffit pour s'en convaincre de considérer la position infiniment voisine de la droite AB.

Par suite, x_0, y_0, x_1, y_1 étant les coordonnées de A et de B, les coordonnées d'un point de la courbe Γ , enveloppe de AB, seront

$$(1) \quad X = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

$$(2) \quad Y = \frac{y_0 + y_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

On peut considérer l'aire constante S comprise entre la droite AB et la courbe C comme la différence entre l'aire du trapèze AabB et celle de la courbe C, a, b étant les projections de A et B sur l'axe des x . On a, par suite,

$$(3) \quad (x_1 - x_0) \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = S.$$

On obtiendra l'équation de la courbe Γ enveloppée par la droite AB en éliminant x_0 et x_1 entre les trois équations (1), (2) et (3).

Nous examinerons en particulier le cas où la courbe C est du second degré.

Si C est une conique, la courbe Γ est une conique homothé-

tique. La courbe Γ est donc un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la courbe C est un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole ou même un système de deux droites constitué par les asymptotes de l'hyperbole.

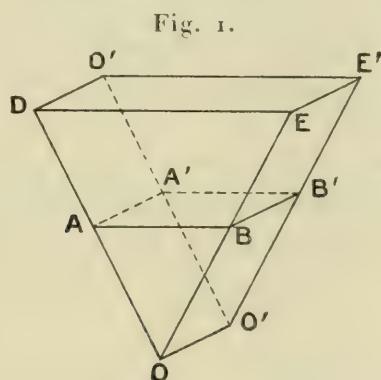
D'après cela, on voit que la courbe C n'est pas, en général, plus simple que la courbe Γ , sauf dans le cas où la courbe C est formée par un système de deux droites.

Considérons en particulier ce cas qui va nous conduire à l'hyperbolographe, qui est le but de cette Communication. Le principe de cet appareil est, en effet, fondé sur une propriété bien connue de la tangente à l'hyperbole.

Si l'on considère une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont OA , OB , on sait que l'aire du triangle AOB , déterminée par la tangente AB sur les asymptotes, est constante quelle que soit la tangente AB à l'hyperbole considérée.

Cette branche d'hyperbole peut donc être considérée comme l'enveloppe du troisième côté d'un triangle AOB d'aire constante.

Si nous considérons (*fig. 1*) une cuve prismatique DOE , $D'O'E'$



contenant un volume V de liquide, l'aire du triangle AOB découpé par la surface libre AB , $A'B'$ sur la face DOE restera constante lorsque l'on fera pivoter la cuve autour de l'arête OO' supposée horizontale, car

$$AOB \times OO' = V.$$

Par suite, dans ce mouvement de pivotement autour de OO' la surface libre du liquide enveloppe un cylindre hyperbolique dont

les génératrices sont parallèles à OO' . Toute section normale à OO' sera une branche d'hyperbole identique à celle qu'enveloppe la droite AB .

Cela posé, on peut déterminer les relations qui existent entre le volume V de liquide, l'angle 2ω au sommet de la cuve et les longueurs a, b des axes de l'hyperbole enveloppée par AB .

En désignant par λ la longueur de l'arête OO' , S la surface constante du triangle AOB , a et b les axes de l'hyperbole, l'on a

$$\text{tang } \omega = \frac{b}{a}, \quad V = S\lambda = \frac{ab}{4}\lambda,$$

d'où l'on tire

$$a = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda \text{ tang } \omega}}, \quad b = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda} \text{ tang } \omega}.$$

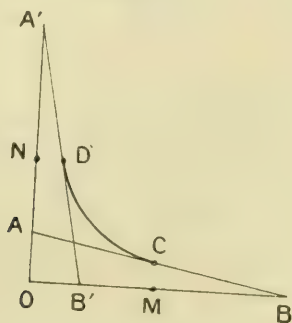
Si nous voulons obtenir une hyperbole qui a pour axes non plus a et b , mais Ka, Kb , les formules précédentes nous montrent que ω aura la même valeur et que le volume V' de liquide à introduire dans la cuve sera

$$V' = K^2 V.$$

Donc, les volumes de liquide à introduire dans une *même* cuve pour obtenir deux hyperboles homothétiques sont entre eux comme le carré du rapport d'homothétie.

Remarque. — La courbe dessinée par le liquide sur la section droite n'est pas à considérer dans son entier. Si, par exemple, pour fixer les idées, on considère une cuve prismatique à angle

Fig. 2.



droit, tous les points de la courbe dessinée (*fig. 2*) ne font pas partie de l'hyperbole équilatère.

En effet, AB étant la tangente à la courbe menée par le point B, point extrême de la course du liquide, le milieu de AB sera un point extrême de l'hyperbole. Nous devons limiter la courbe par deux parallèles aux asymptotes menées par les milieux M et N de OB et OA', les points B et A' étant les positions extrêmes de la nappe liquide.

On sait, d'autre part, que le rayon de courbure de l'hyperbole $xy = m^2$ en des points d'abscisse $x = m, 2m, 3m, \dots$ va très rapidement en grandissant et, par suite, la portion d'hyperbole située après le point C d'abscisse $4m$ se confond sensiblement avec une parallèle à l'asymptote. La partie intéressante de la courbe est justement celle comprise entre les points C et D que dessine le liquide.

Grâce aux résultats signalés par M. C.-A. Laisant dans un Mémoire ⁽¹⁾ sur la segmentation des figures planes où il indique le moyen de représenter, par une équation, un fragment d'une courbe à l'exclusion de toute autre partie, nous pouvons donner la représentation analytique de la portion CD de l'hyperbole dessinée par le liquide. Il suffit de poser, avec M. Laisant,

$$x = m \left(\frac{b}{m} \right)^{-\sin t}, \quad y = m \left(\frac{b}{m} \right)^{\sin t},$$

avec la relation $ab = m^2$, ab étant les coordonnées du point C, ba celles du point D.

On a encore, en éliminant le paramètre t ,

$$\arcsin \frac{Lx - Lm}{Lb - Lm} + \arcsin \frac{Ly - Lm}{Lb - Lm} = 0.$$

Dispositif expérimental. — Le dispositif que j'ai adopté se compose essentiellement d'une cuve prismatique triangulaire (DOE, D'O'E') (*fig. 1*) ayant au sommet l'angle des asymptotes de l'hyperbole à tracer. La cuve est mobile autour d'un axe horizontal parallèle à l'arête au sommet OO'. Son mouvement de

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 123.

pivotement, qui doit être assez lent et continu, est obtenu à l'aide d'un mouvement d'horlogerie approprié.

Pour fixer sur une surface plane les diverses positions de la surface du liquide de la cuve, j'ai pris, dans une première série d'expériences, des plaques de cuivre et, comme liquide, une dissolution d'un sel de mercure. Le bichlorure ou l'azotate donnent des dépôts très nets de mercure sur le cuivre préalablement décapé, avec de l'émeri, par exemple.

Dans une autre série d'expériences, j'ai pris des plaques de fer avec une dissolution de sulfate de cuivre.

Les plaques ont la même forme que la cuve et viennent s'appuyer, parallèlement aux faces triangulaires de la cuve, sur les faces $DO D'O'$, $EO E'O'$. Elles sont maintenues par des taquets placés en DD' , EE' et OO' . Le liquide approprié étant introduit dans la cuve, on dispose la plaque et l'on fait pivoter lentement la cuve jusqu'à ce que la surface libre du liquide vienne dans le voisinage du bord EE' et ensuite du bord DD' . On retire alors la plaque sur laquelle se trouve dessinée la branche d'hyperbole. La courbe dessinée doit, comme je l'ai dit, être limitée par des parallèles aux asymptotes menées par les milieux de OD et de OE .

Dans les expériences faites, j'ai utilisé des cuves de zinc verni, d'angle au sommet de 90° et 60° , mais on pourrait se servir de cuves à angle variable, analogues au prisme à angle variable utilisé en Optique. On a ainsi à sa disposition deux variables ω et V , ce qui permet de tracer des hyperboles d'axes donnés à l'avance a et b .

Remarques. — Si l'on voulait avoir non plus sur une surface métallique, mais sur du papier les images de ces hyperboles, on pourrait prendre une plaque photographique qu'on a préalablement voilée en l'exposant à la lumière et la placer dans la cuve où l'on a mis un volume V d'un révélateur quelconque. Après fixation du cliché, on pourra tirer sur papier des épreuves de l'hyperbole tracée par le révélateur.

On peut aussi remarquer qu'on peut prendre pour profil C des fragments de courbes simples dont le tracé est facile. Par exemple, si le profil C est constitué par une branche de parabole et la tangente au sommet, le contour Γ est une courbe du quatrième degré.

Flotteurs. — En terminant, nous rattacherons le principe expérimental, qui nous a servi de point de départ, à la théorie des flotteurs.

Si nous considérons, en effet, un solide pesant qui flotte à la surface d'un liquide, la surface libre du liquide détache dans le solide, supposé homogène, un volume constant (le poids de son égal volume de liquide est égal au poids du corps). Les plans de flottaison qui découpent ainsi dans le corps des volumes égaux enveloppent une surface dite *surface d'isocarène* qui est, en général, une surface compliquée. Dans le cas d'un corps prismatique cette surface est simple.

Si nous considérons, en effet, un corps de forme prismatique (*fig. 2*) DOE D'O'E', si on le fait flotter verticalement, la ligne de flottaison sera AB A'B'. La surface d'isocarène sera un cylindre hyperbolique qui est aussi le lieu des intersections des plans de flottaison.

On peut imaginer qu'on passe d'une position à la position voisine en faisant tourner le corps d'un angle infiniment petit autour de cette génératrice. Pratiquement, on peut incliner le flotteur en déplaçant la charge : on aurait là un autre mode de génération de l'hyperbole, mais il paraît physiquement moins commode à réaliser que celui que nous avons adopté.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1904.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil.

Communication :

M. Laisant : *Sur l'influence de la forme des équations en Géométrie analytique.*

SÉANCE DU 20 JANVIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Correspondance :

M. Pellet adresse une Note sur les *Fonctions entières*.

Communications :

M. Zervos : *Sur le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une autre fonction.*

M. Borel : Observations sur la Communication précédente.

M. Roche : *Sur les développements en séries de polynomes.*

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Bricard : *Sur les six rapports anharmoniques de quatre quantités.*

M. Grévy : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Zervos : *Sur la représentation des fonctions non uniformes.*

M. Lecornu : *Sur les roulements à billes.*

SÉANCE DU 20 FÉVRIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Raffy : *Sur les surfaces enveloppes de sphères.*

M. Bricard : Observations sur la Communication précédente.

M. Zervos : *Sur les équations algébriques.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'un genre fini p . Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .

Je me propose d'indiquer comment la connaissance :

1° *D'une limite supérieure du nombre N correspondant à une valeur donnée de α ;*

2° *De la valeur que prend $F(z)$ pour $z = 0$;*

3° *Du genre p de cette fonction,*

Permet de calculer des limites inférieures des modules des zéros de $F(z)$ et, d'une manière plus générale, des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend une valeur C donnée à l'avance.

Tout d'abord l'égalité

$$(1) \quad M(r)e^{-\alpha r^{p+1}} < N$$

entraîne, comme l'on sait, la suivante : en posant

$$(2) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

on aura

$$(3) \quad |a_n| < N \frac{\beta^n}{n^{cn}}$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$(4) \quad c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{ze}{e}\right)^c.$$

D'autre part, d'après un résultat que j'ai démontré dans un

travail antérieur (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312) : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série (2) et si l'on forme la fonction

$$(5) \quad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

on aura

$$(6) \quad \lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}}$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r .

L'inégalité (6) subsistera manifestement si l'on substitue aux coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots$ les quantités définies par le second membre de l'inégalité (3), de sorte qu'on peut prendre

$$(7) \quad u(r) = \frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^{\infty} \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}};$$

le second membre de (6) fournira une limite inférieure de λ quelle que soit la valeur réelle et positive r . Et en particulier en faisant $r = \frac{1}{\beta}$ on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(8) \quad \frac{1}{a x^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A} \right)^2}}$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$; a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$a = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}} \quad b = \theta \left(\frac{2}{p+1} \right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_1^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonc-

tions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

Pour $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \quad b = \theta(2) = 1,0639;$$

Pour $p = 1$,

$$a = \sqrt{2e} = 2,3316; \quad b = \theta(1) = 1,2913;$$

Pour $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3e} = 2,0128; \quad b = \theta(\frac{2}{3}) = 1,5383; \quad \dots$$

En remplaçant dans (8) A par $|F(0) - C|$ cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C .

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR UNE CLASSE ÉTENDUE D'INTÉGRALES DÉFINIES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Les intégrales de la forme

$$(1) \quad \int_L R(t, z) dt,$$

où R est une fonction *rationnelle en z* , à coefficients fonctions *quelconques de t* , sont susceptibles de représenter des fonctions analytiques arbitraires de la variable z .

En effet, *toute fonction analytique de z se laisse définir, et cela d'une infinité de manières, par des intégrales de la forme (1), qui la représentera dans telle ou telle partie du plan.*

Ainsi, la formule fondamentale de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t - z} dt.$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par des différentiations, des changements de la variable ou du chemin d'intégration, etc., fournissent des expressions analytiques de la fonction $F(z)$ sous la forme (1).

On en déduit une infinité d'autres formules du même type en les appliquant à des fonctions assujetties à des conditions plus particulières. Telles sont, par exemple, les formules de Stieltjes (1)

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \psi(t)}{t^2 + z^2} dt,$$

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \varphi(t)}{t^2 + z^2} dt$$

[où φ et ψ sont la partie réelle et le coefficient de i dans $F(ti)$], applicables à des classes étendues des fonctions; ou bien les formules, en nombre illimité, de la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(\lambda + ti) dt,$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(t + \mu i) dt,$$

valables, la première dans les cas où la fonction $F(z)$ est holomorphe pour les z à partie réelle plus grande que λ , la seconde lorsque $F(z)$ est holomorphe pour les z à coefficient de i plus grand que μ (2), etc.

Une fonction $F(z)$ étant donnée par son développement de Taylor

$$F(z) = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots,$$

le coefficient A_n se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$(2) \quad A_n = \int_L \Lambda(t) [r(t)]^n dt,$$

(1) STIELTJES, *Sur le développement de $\log \Gamma(a)$* (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1889, p. 425-441).

(2) PETROVITCH, *Généralisation de certaines formules de Stieltjes* (*Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XVII, 1903).

ou sous la forme d'une somme de termes (2); ceci fait, on aura

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\Lambda(t)}{1 - (z-a)r(t)} dt.$$

On connaît des solutions particulières du problème d'exprimer Λ_n sous la forme (2) pour des cas très étendus. M. Le Roy, par exemple, a indiqué la manière de mettre Λ_n sous la forme

$$\Lambda_n = \int_0^1 \Lambda(t) t^n dt$$

toutes les fois que Λ_n est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini, ou encore si Λ_n est exprimable par une série procédant suivant des puissances positives quelconques de n et, en particulier, si Λ_n est une fonction algébrique de n régulière à l'infini ou n'ayant qu'un pôle (1).

D'autres solutions sont fournies par celles du *problème des moments* traité récemment par MM. Stieltjes, Borel et Le Roy, et consistant à mettre une suite dénombrable de quantités $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$, sous la forme

$$\Lambda_n = \int_0^\infty \varphi(t) t^n dt$$

On peut, d'ailleurs, transformer ces formules en une infinité d'autres rentrant dans le type (2). Dans des cas particuliers, on aura des solutions diverses du même problème par de nombreuses intégrales définies connues de la forme (2) (2).

Certaines classes spéciales de fonctions $F(z)$ se laissent exprimer par une formule de la forme (1) par des procédés particuliers ne convenant qu'à de telles fonctions. C'est ainsi que les formules connues

$$\int_0^1 [F(0) + zF'(zt)] dt = F(z),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (z-1)\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{z}}$$

fournissent le moyen d'exprimer le logarithme, ou l'arc tang, ou

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1900.

(2) Voir, par exemple, les formules de la page 77 de ce Mémoire.

bien la racine carrée d'une fonction rationnelle quelconque de z sous la forme d'une intégrale portant sur une fonction rationnelle de z , etc.

2. Remarquons maintenant qu'une fois la fonction $F(z)$ exprimée d'une manière quelconque sous la forme (1), on saura l'exprimer d'une infinité de manières par une intégrale de la forme que nous avons ici en vue.

En effet, il existe un nombre illimité de fonctions $\Phi(t, z)$, rationnelles en z et jouissant de cette propriété que pour toute valeur de z , appartenant à une certaine partie du plan, on ait

$$(3) \quad \int_L \Phi(t, z) dt = 0.$$

Ainsi, l'arc d'intégration L formant un contour fermé et $P(t, z)$, $Q(t, z)$ étant deux polynômes en z à coefficients fonctions uniformes en t , si les deux équations

$$P = \infty, \quad Q = 0,$$

pour $|z| < a$ (a étant un nombre réel et positif donné) n'ont pas de racines en t comprises à l'intérieur du contour L , on aura

$$\int_L \frac{P(t, z)}{Q(t, z)} dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à a .

Si le chemin L coïncide avec l'intervalle $(0, \infty)$, on peut prendre pour $\Phi(t, z)$ la fonction

$$\frac{1}{1+t^2} \frac{\lambda z \cos t - z^2}{\lambda^2 - 2\lambda z \cos t + z^2}$$

(où λ est un nombre réel et positif quelconque): l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{1+t^2} dt$$

étant nulle pour toute valeur positive de n , on aura

$$\int_0^\infty \Phi(t, z) dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à λ .

De même, on sait qu'il y a une infinité de fonctions $\varphi(t)$ jouissant de cette propriété que, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on ait

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) t^n dt = 0 \quad (1);$$

on construira, à l'aide de telles fonctions, une infinité de fonctions $\Phi(t, z)$ satisfaisant à la condition (3), etc.

De telles fonctions $\Phi(t, z)$ existent pour un chemin L quelconque; en en ajoutant autant qu'on voudra à la fonction figurant sous le signe de l'intégrale (1), on aura des représentations analytiques, en nombre illimité, de la fonction donnée $F(z)$ sous la forme de l'intégrale portant sur une fonction rationnelle en z .

3. Les fonctions $F(z)$, définies par des intégrales (1), ne sont donc pas des fonctions spéciales : toute fonction analytique est susceptible d'être exprimée d'une infinité de manières sous cette forme.

De plus, à des fonctions $F(z)$ compliquées, à des transcendentes irréductibles aux fonctions usuelles correspondent souvent les fonctions $R(t, z)$ rationnelles en z à coefficients fonctions très simples. Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$\frac{e^{-at^2}}{1 - ze^{-bt^2}}$$

(le chemin L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendente irréductible

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{a + bn}};$$

ou bien le cas de la fonction

$$\frac{e^{-t} - e^{-bt} + ze^{-bt}(1 - e^{-at}),}{(1 - ze^{-at})t}$$

(L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendente

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \log(a + bn) z^n, \quad \dots$$

(¹) Voir, par exemple, BORILL, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. II.

Des transcendentes pareilles se présentent, d'ailleurs, d'elles-mêmes dans une foule de problèmes variés, directement exprimées sous la forme que nous avons ici en vue.

Ainsi l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{f(x, z)} = \frac{dy}{\varphi(y)},$$

où f est une fonction rationnelle en z et quelconque en x , sera, lorsqu'on y fixe la valeur de x , une fonction de z qui s'exprime par des combinaisons simples de fonctions fournies par des quadratures et de certaines fonctions $F(z)$ directement exprimées sous la forme (1).

En y faisant, par exemple, $x = \infty$, on aura la valeur asymptotique de l'intégrale exprimée comme fonction du paramètre z . La valeur asymptotique, par exemple, de l'intégrale de l'équation

$$(e^{\alpha x^2} - z e^{\beta x^2}) \frac{dy}{dx} = \varphi(y) \quad (0 < \alpha < \beta),$$

dans les cas où l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

est à l'intégrale uniforme, sera ou bien une fonction rationnelle de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\alpha + (\beta - \alpha)n}},$$

ou bien rationnelle en $e^{a\theta(z)}$, ou bien algébrique en $\text{sn}[a\theta(z)]$, où a , le module de sn et les coefficients de ces fonctions rationnelles ou algébriques étant constants.

Étant donnée une équation algébrique du premier ordre

$$(4) \quad F\left(x, y \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

à points critiques fixes et du genre zéro, l'évaluation de l'intégrale $\int_L y dx$ ou, plus généralement, de

$$(5) \quad \int_L R(x, y) dx$$

(R étant rationnelle en y , quelconque en x), conduit également aux transcendentes dont nous nous occupons ici. Car l'intégrale y sera une combinaison rationnelle d'une certaine fonction

$$u = \frac{Cv_1 + v_2}{Cw_1 + w_2}$$

fournie par l'intégration d'une certaine équation de Riccati, rattachée à l'équation (4). L'intégrale (5) sera donc de la forme

$$\int_L P(x, C) dx,$$

où P est une certaine fonction rationnelle en C à coefficients fonctions de x dépendant algébriquement de v_1, v_2, w_1, w_2 et des coefficients fonctions de l'équation différentielle (4) : elle sera donc une fonction de la constante d'intégration C qui se présente directement sous la forme (1).

Dans le cas, par exemple, de l'équation bien simple

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - x^2x,$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty (y + x) dx$$

a pour valeur

$$C\sqrt{x\pi} \sum_0^\infty \frac{C^n}{\sqrt{n+1}} \dots$$

4. Supposons maintenant qu'on se donne à l'avance une intégrale déterminée (1), où les coefficients de la fonction rationnelle R , ainsi que le chemin L , soient précisés. Il y aurait un intérêt manifeste à étudier les particularités de la fonction $F(z)$ qu'elle représente directement sur l'expression analytique ainsi donnée, sans chercher à la ramener à des combinaisons explicites de fonctions connues. C'est à cet ordre d'idées que se rattache la présente étude. Je m'y propose, en particulier, d'indiquer quelques relations existant entre certaines particularités des fonctions figurant comme coefficients dans la fonction rationnelle R et celles de la fonction $F(z)$ elle-même, correspondant à la fonction R et le chemin d'intégration donnés.

Tout d'abord, le développement de l'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de la variable z met en évidence la possibilité d'exprimer la fonction $F(z)$ comme combinaison simple de diverses puissances de z et de certaines fonctions $\theta(z)$ jouant, par rapport à $F(z)$, le rôle d'une espèce d'éléments simples.

Les coefficients des séries

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

ainsi obtenues et correspondant à ces éléments simples apparaissent sous la forme

$$a_n = \int_L \Lambda(t) [r(t)]^n dt,$$

où les fonctions $\Lambda(t)$ et $r(t)$ dépendent algébriquement des coefficients de la fonction rationnelle R .

La forme même de la dernière intégrale, déjà étudiée sous quelques rapports et dans certains cas plus particuliers, rend particulièrement faciles diverses recherches concernant, par exemple, la manière dont a_n varie avec n , ses limites supérieures ou inférieures, sa valeur approchée ou valeur asymptotique pour n très grand, la convergence des séries $\theta(z)$ et diverses autres particularités des fonctions $\theta(z)$ (zéros, singularités, valeurs asymptotiques, mode de croissance, etc.).

Les résultats récents sur les séries de Taylor et sur les fonctions représentées par des intégrales définies, comme par exemple ceux de MM. Hadamard et Le Roy, y trouveront un vaste champ d'applications variées. Je me bornerai à en signaler quelques-unes les plus directes, n'ayant pour but que d'en faire ressortir la possibilité et l'intérêt d'une théorie plus complète des fonctions faisant l'objet de ce Mémoire.

II. — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR.

1. Considérons l'intégrale

$$(6) \quad F(z) = \int_L R(t, z) dt,$$

où R est une fonction rationnelle de z à coefficients fonctions

analytiques quelconques de t . Nous supposons que ni le numérateur ni le dénominateur de R ne contiennent de facteurs de la forme $(z - \alpha)^k$ (α étant constant), sans quoi on tirerait ces facteurs en dehors de l'intégrale. La fonction R étant holomorphe pour les valeurs de z au voisinage de $z = 0$, on aura, pour z suffisamment petit,

$$(7) \quad R(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots$$

D'après le théorème bien connu sur les développements des fonctions rationnelles en séries de Taylor, le coefficient général H_n sera la somme d'un nombre limité de termes ayant tous la forme

$$(8) \quad P_i(n, t) [r_i(t)]^n;$$

les fonctions $r_i(t)$ ne dépendent que de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r

$$(9) \quad G(t, r) = 0,$$

transformée en $z = \frac{1}{r}$ de l'équation obtenue en égalant à zéro le dénominateur de $R(t, z)$; les fonctions $P_i(n, t)$ sont des polynômes en n à coefficients fonctions de t dépendant rationnellement des coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$; enfin, le degré du polynôme P_i en n sera égal à $\lambda_i - 1$, où λ_i désigne l'ordre de la racine correspondante $r = r_i(t)$ de l'équation algébrique (9). A chaque racine r de (9) correspondra un terme (8) dans l'expression de H_n .

Le coefficient H_n sera donc la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n^k \Lambda_i(t) [r_i(t)]^n,$$

où les fonctions $\Lambda_i(t)$ et $r_i(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent algébriquement des coefficients de la fonction $R(t, z)$.

Par conséquent, en supposant que l'intégration de la série (7) soit légitime, on aura le résultat suivant :

Le coefficient a_n de la série

$$(10) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

correspondant à la fonction étudiée (6), sera la somme d'un

nombre limité de termes

$$(11) \quad n^k I(n),$$

où k est un entier positif, et $I(n)$ une fonction de n donnée par la formule

$$(12) \quad I(n) = \int_L A(t) [r(t)]^n dt.$$

La détermination du coefficient a_n se ramène donc au calcul des intégrales de la forme (12).

Il arrive, toutefois, dans certains cas particuliers, que quelques-unes parmi les intégrales $I(n)$, correspondant à la fonction donnée $F(z)$, soient infinies ou indéterminées, quoique $F(z)$ soit holomorphe pour $z = 0$. De tels cas se présentent lorsque plusieurs intégrales $I(n)$, multipliées par une même puissance de n , sont infinies ou indéterminées quel que soit n , cette discontinuité disparaissant dans leur somme. *La détermination du coefficient a_n se ramène alors au calcul des intégrales de la forme*

$$(13) \quad \int_L \{ A_1(t) [r_1(t)]^n + A_2(t) [r_2(t)]^n + \dots \} dt,$$

où le nombre de termes sous le signe $\int$ est limité.

Ceci se présente, par exemple, dans le cas de la fonction

$$(14) \quad F(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{1-z} - \frac{e^{-2t}}{1-ze^{-t}} \right\} \frac{dt}{t},$$

à laquelle correspond le coefficient

$$(15) \quad a_n = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t} e^{-nt} \right] dt;$$

chacune des deux intégrales (15), prise séparément, est infinie; le coefficient a_n est, cependant, fini et a pour valeur

$$a_n = \log(n+2).$$

2. Revenons aux intégrales (12) auxquelles se ramène, dans le cas général, le calcul des coefficients a_n .

D'abord, dans certains cas ces intégrales se laissent exprimer sous la forme explicite comme fonctions de n .

Supposons, par exemple, que l'arc d'intégration forme un contour fermé qui entourera alors nécessairement des singularités d'au moins une fonction $\Lambda(t)$ et $r(t)$; $I(n)$ sera la somme d'intégrales prises le long des circonférences de rayon infiniment petit décrites autour de ces singularités. En particulier, chaque pôle de $\Lambda(t)$ donnera, dans l'expression de $I(n)$, un terme de la forme

$$n(n-1)\dots(n-h)ab^n,$$

où a et b sont des constantes indépendantes de n et h un entier positif également indépendant de n . Chaque pôle de $r(t)$ fournira un terme dont la valeur sera donnée par le résidu correspondant; celui-ci peut représenter des fonctions infiniment variées de n , comme l'on s'assure, par exemple, en prenant

$$r(t) = \frac{1}{t},$$

dans quel cas le résidu représentera le coefficient c_{n-1} de la série

$$\Lambda(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Un grand nombre d'intégrales $I(n)$ se calculerait par des méthodes spéciales liées aux hypothèses faites sur les fonctions $\Lambda(t)$, $r(t)$ et le chemin d'intégration L , ou à l'aide des formules connues du Calcul intégral. En voici quelques intégrales connues de cette espèce :

$$\int_0^\infty e^{-at^2} e^{-nbt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt} \cos at dt = \frac{n}{a^2 + n^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt^2} \cos at^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{n + \sqrt{a^2 + n^2}}{a^2 + n^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt} \sin at \frac{dt}{t} = \text{arc tang } \frac{a}{n},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a+ti} \right)^n e^{cti} dt = \frac{2\pi}{e^{ac}} \frac{c^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a^2 + t^2} \right)^n dt = 2\pi \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1} \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)},$$

$$\int_0^1 \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n},$$

$$\int e^t \left(\frac{1}{t} \right)^n dt = \frac{2\pi i}{1.2.3\dots(n-1)}$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence décrite autour de l'origine), etc.

3. Dans les cas où il est impossible d'exprimer $I(n)$ comme fonction explicite de n , on peut en préciser des limites supérieures ou inférieures soit pour la valeur même de $I(n)$, soit pour son module; la forme même de ces intégrales rend particulièrement faciles les recherches de cette espèce.

Ainsi, le chemin d'intégration étant réel ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, le théorème de la moyenne fournira soit des limites supérieures, soit des limites inférieures de $I(n)$. Pour les intégrales, par exemple, de la forme

$$I(n) = \int_0^{\infty} A(t) e^{ant} dt \quad (a < 0),$$

on aurait

$$\frac{M_1}{n} < I(n) < \frac{M_2}{n},$$

M_1 et M_2 étant des constantes; pour

$$I(n) = \int_0^{\infty} A(t) e^{ant^2} dt,$$

il serait

$$\frac{M_1}{\sqrt{n}} < I(n) < \frac{M_2}{\sqrt{n}};$$

pour

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \left(\frac{1}{a^2 + t^2} \right)^n dt,$$

on aurait

$$M_1 \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1} < I(n) < M_2 \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1}.$$

Lorsque le chemin d'intégration ou les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ ne sont pas réels, en choisissant, par exemple, deux fonctions $\lambda(t)$ et $u(t)$ de sorte qu'on ait constamment, le long de l'arc d'intégration,

$$\begin{aligned} |A(t)| &\leq |\lambda(t)|, \\ |r(t)| &\leq |u(t)|, \end{aligned}$$

on aurait

$$|I(n)| < \int_L |\lambda(t)| |u(t)|^n ds,$$

s étant la longueur de l'arc L .

En particulier, on peut prendre comme intégrales de comparaison celles où la fonction $u(t)$ se réduit à une constante. Soit M le *minimum maximorum* du module de $r(t)$ le long des arcs obtenus en déformant L de manière que $I(n)$ conserve la même valeur que le long de L . Toutes les fois que l'intégrale

$$P = \int_L |\lambda(t)| ds$$

est une valeur finie, déterminée et différente de zéro, on aura

$$|I(n)| < PM^n.$$

Si le *minimum maximorum* n'existe pas, on prendrait pour M la plus grande valeur qu'acquiert la fonction $r(t)$ le long de L .

En faisant des hypothèses sur les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, et en prenant pour fonctions de comparaison des fonctions variées de t , on aura des intégrales de comparaison en nombre illimité.

Considérons, par exemple, les intégrales de la forme

$$I(n) = \int_0^\infty A(t) [r(t)]^n dt,$$

où les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont supposées réelles pour toute valeur réelle positive de t et satisfont à cette condition qu'on ait en valeur absolue

$$A(t) \leq kt, \quad r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

On aura alors en valeur absolue (pour $n > 2$)

$$I(n) < kh^n \int_0^\infty \frac{t dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ou bien

$$I(n) < \frac{kh^2}{n-2} \left(\frac{h}{a}\right)^{n-2}.$$

Signalons, en passant, un résultat plus général fourni par des considérations de ce genre. Soit $f(z)$ une fonction réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle, positif et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment avec un argument quelconque compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La valeur absolue du coefficient $\Lambda_n (n > 1)$ de la série de Taylor

$$f(z) = \Lambda_0 + \Lambda_1(z - a) + \Lambda_2(z - a)^2 + \dots,$$

où a est une quantité réelle et positive quelconque, est inférieure à la valeur

$$\frac{2N}{(n+1)\pi a^{n+1}},$$

N désignant la plus grande valeur absolue qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z = 0$ à $z = \infty$, et $\psi(z)$ représentant le coefficient de i dans $f(zi)$.

En effet, comme je l'ai montré ailleurs ⁽¹⁾, pour toute fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions énumérées, on aura, en valeur absolue,

$$\Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{(\sqrt{a^2 + t^2})^{n+1}} dt.$$

Or, le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$, nul pour $z = \infty$, fini pour $z = 0$, et holomorphe pour toute valeur positive de z , présentera certainement un maximum N fini et déterminé, lorsque z varie de $z = 0$ à $z = \infty$, de sorte qu'on aura en valeur absolue, pour les valeurs positives de t ,

$$\psi(t) \leq Nt,$$

ce qui conduit directement au résultat énoncé.

4. Outre les méthodes de comparaison précédentes, on peut, grâce à la forme des intégrales $I(n)$, avoir des limites supérieures de $I(n)$ par bien d'autres procédés.

Ainsi, lorsque le chemin L forme un contour fermé, on aurait, dans des cas étendus, des limites supérieures du module de $I(n)$ par des procédés analogues à celui par lequel on détermine de telles limites pour les coefficients des fonctions entières en partant de leur expression sous la forme de l'intégrale de Cauchy.

Supposons, pour indiquer un autre procédé, que le chemin L se réduise à un intervalle limité ou illimité de valeurs réelles, les

⁽¹⁾ *Généralisation de certaines formules de Stieltjes (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1903, p. 334).*

fonctions $\Lambda(t)$ et $r(t)$ étant réelles, finies et continues entre les limites d'intégration. L'inégalité de M. Schwartz

$$\left[\int \varphi \psi dt \right]^2 \leq \left[\int \varphi^2 dt \right] \left[\int \psi^2 dt \right],$$

valable pour les fonctions φ et ψ réelles et intégrables entre les limites de l'intégration, appliquée aux fonctions

$$\varphi = \Lambda(t), \quad \psi = |r(t)|^n,$$

conduit à l'inégalité

$$I(n) \leq \Lambda \sqrt{Y(n)},$$

où Λ est une constante indépendante de n ayant pour valeur

$$\Lambda = \sqrt{\int_{\mathbf{L}} |\Lambda(t)|^2 dt},$$

et $Y(n)$ étant une fonction de n donnée par

$$Y(n) = \int_{\mathbf{L}} |r(t)|^{2n} dt.$$

Appliquée, par exemple, aux intégrales

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t) \left(\frac{1}{a + bt^2} \right)^n dt,$$

où a et b sont des constantes positives et $\Lambda(t)$ une fonction telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t) dt$$

ait un sens, la dernière inégalité conduit à

$$I(n) < \alpha \beta^n \sqrt{\frac{2n(2n+1) \dots (4n-1)}{1.2.3 \dots (2n-1)}},$$

α et β étant indépendants de n .

D'autres limites de $I(n)$ seraient fournies par le théorème connu d'Ossian Bonnet consistant en ce que, si $\varphi(x)$ est une fonction positive et croissante dans l'intervalle (a, b) , on aura

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b) \int_{\frac{a}{\varphi(b)}}^{\frac{b}{\varphi(b)}} f(x) dx$$

(avec $a < \xi < b$), et si $\varphi(x)$ est positive et décroissante, on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

Supposons, par exemple, que le chemin L, ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ figurant dans $I(n)$, soient réels, et que, de plus, $r(t)$ et $r'(t)$ conservent des signes invariables pendant que t varie dans l'intervalle (a, b) [nous considérerons le signe de $r(t)$ comme positif] et enfin que l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\eta} A(t) dt$$

reste finie, déterminée et différente de zéro pour toute valeur de ξ et η comprise entre a et b .

En appliquant le théorème de Bonnet aux fonctions

$$f(t) = A(t), \quad \varphi(t) = [r(t)]^n,$$

on aura

$$I(n) = AB^n,$$

où A et B sont des constantes ayant pour valeurs :

Si $r'(t) > 0$,

$$A = \int_{\xi}^b A(t) dt, \quad B = r(a);$$

si $r'(t) < 0$,

$$A = \int_a^{\eta} A(t) dt, \quad B = r(b),$$

ξ et η étant deux nombres compris entre a et b .

Si donc N et M représentent une limite supérieure et une limite inférieure des intégrales A ainsi définies, on aura

$$NB^n < I(n) < MB^n.$$

III. — DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

1. Le coefficient b_n de la série

$$R(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots$$

correspondant à la fonction $F(z)$ étudiée, sera, comme nous l'avions remarqué, la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$P(t, n) |r(t)|^n,$$

où les $r(t)$ ne dépendent pas de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r à coefficients fonctions de t ; $P(t, n)$ sont des polynômes en n à coefficients fonctions de t des degrés indépendants de n .

Chaque polynôme $P(t, n)$ se laisse mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$P(t, n) = A_0(t) + nA_1(t) + n(n-1)A_2(t) + \dots,$$

où les $A_i(t)$ seront fonctions de t définies par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= A_0, \\ P(t, 1) &= A_0 + A_1, \\ P(t, 2) &= A_0 + 2A_1 + 2A_2, \\ P(t, 3) &= A_0 + 3A_1 + 6A_2 + 6A_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Par suite, le coefficient b_n se laisse exprimer sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k)I(n),$$

où k ne dépend pas de n , et où $I(n)$ sera de la forme

$$(16) \quad I(n) = \int_L \Lambda(t) |r(t)|^n dt.$$

Les fonctions $\Lambda(t)$ et $r(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent *algébriquement* des fonctions de t figurant comme coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$.

La fonction étudiée $F(z)$ s'exprime donc sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$\sum_0^\infty n(n-1)\dots(n-k)I(n)z^n = z^k \frac{d^k}{dz^k} \sum_0^\infty I(n)z^n,$$

d'où le théorème suivant, fondamental pour l'étude que nous nous proposons :

En désignant par

$$I_1(n), \quad I_2(n), \quad I_3(n), \quad \dots$$

les diverses intégrales de la forme (16), rattachées à la fonction considérée $F(z)$, et par

$$\theta_1(z), \quad \theta_2(z), \quad \theta_3(z), \quad \dots$$

les diverses fonctions

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} I(n) z^n = \int_L \frac{\Lambda(t)}{1 - z r(t)} dt,$$

correspondant à ces intégrales, la fonction $F(z)$ se laisse mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de termes

$$\begin{aligned} \theta_1(z), \quad z \frac{d\theta_1}{dz}, \quad z^2 \frac{d^2\theta_1}{dz^2}, \quad \dots, \\ \theta_2(z), \quad z \frac{d\theta_2}{dz}, \quad z^2 \frac{d^2\theta_2}{dz^2}, \quad \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

On arriverait, comme on s'en rend bien compte, au même résultat en décomposant la fraction rationnelle $R(t, z)$ en fractions simples, et en intégrant l'expression obtenue le long du chemin L. La décomposition précédente de $F(z)$ n'est donc pas restreinte aux valeurs de z à l'intérieur du cercle de convergence de la série correspondante $\theta(z)$, pourvu que, pour les valeurs de z hors de ce cercle, on considère $\theta(z)$ comme définie par son expression

$$\theta(z) = \int_L \frac{\Lambda(t)}{1 - z r(t)} dt,$$

qui la représente dans tout le plan.

2. Les fonctions $\theta(z)$ jouent le rôle d'une espèce d'*éléments simples* par rapport aux fonctions $F(z)$. Ces éléments sont, d'ailleurs, infiniment variés et représentent, en général, des fonctions transcendantes de z .

Ainsi, les fonctions $F(z)$ correspondant aux fonctions

$$\Lambda(t) = e^{at}, \quad r(t) = \frac{1}{t}$$

et à l'arc L représentant un contour fermé entourant l'origine, sont des combinaisons linéaires d'un nombre limité de termes de la forme $z^k e^{az}$.

Les fonctions $F(z)$ correspondant aux fonctions $A(t)$ et $r(t)$ de la forme

$$A(t) = e^{at^2}, \quad r(t) = e^{bt^2}$$

(a et b étant des constantes à partie réelle négative) et à l'arc L se réduisant au demi-axe réel, se réduisent à des combinaisons linéaires des puissances de z , de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{a + bn}}$$

et de ses dérivés par rapport à z .

Lorsque les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont de la forme

$$A(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad r(t) = e^{-t},$$

l'arc L se réduisant au demi-axe réel, le rôle d'élément simple est joué par la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} \left(\arctan \frac{a}{n} \right) z^n, \dots$$

3. Dans certains cas, les fonctions $\theta(z)$ se réduisent à des fonctions *rationnelles* de z . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $I(n)$ soit polynome en

$$n, \quad a^n, \quad b^n, \quad c^n, \quad \dots,$$

$a, b, c, \dots$, et des degrés de ces polynomes étant indépendants de n .

En mettant à part le cas évident où la fonction correspondante $r(t)$ se réduit à une constante, il en sera ainsi, par exemple, *toutes les fois que l'arc L forme un contour fermé entourant un nombre limité de pôles de $A(t)$, et à l'intérieur duquel la fonction correspondante $r(t)$ est holomorphe*. Dans ce cas, l'intégrale $I(n)$ sera la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)\dots(n-h)ab^n,$$

où a, b sont des constantes indépendantes de n , et h un entier également indépendant de n ; la fonction $\theta(z)$ est donc rationnelle.

IV. — CONVERGENCE DES SÉRIES $\theta(z)$.

1. Par la réduction des fonctions étudiées $F(z)$ aux éléments simples, la question de la convergence des séries

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

est ramenée à celle des séries

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

Si $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ sont les rayons de convergence des séries $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ rattachées à la fonction $F(z)$, le rayon de convergence R de la série $F(z)$ sera le plus petit parmi les rayons ρ_i .

De même, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont des limites inférieures des ρ_i , la plus petite d'entre elles sera une limite inférieure du rayon R .

Occupons-nous donc de la convergence des séries $\theta(z)$.

D'abord, dans les cas où l'intégrale correspondante $I(n)$ se laisse exprimer sous la forme explicite comme fonction de (n) , le rayon de convergence ρ de $\theta(z)$ sera donné comme limite pour $n = \infty$ de l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{I(n)}{I(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{I(n)}},$$

dans lesquelles l'intégrale $I(n)$ peut aussi être remplacée par sa valeur asymptotique.

Dans les cas où l'on ne sait calculer ni $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut, à l'aide des inégalités relatives à $I(n)$, déterminer des limites inférieures du rayon ρ .

Ainsi, si le long de l'arc L on a constamment

$$|r(t)| < M,$$

la constante

$$P = \int_L |A(t)| ds$$

ayant un sens, une limite inférieure de ρ sera donnée par $\frac{1}{M}$.

Imaginons maintenant que l'on déforme le chemin d'intégration de manière que l'intégrale $I(n)$ ne change pas de valeur. A tout chemin correspondra une valeur M et, si ϱ est le plus petit parmi les M ainsi obtenus, $\frac{1}{\varrho}$ sera une limite inférieure de ϱ .

Or, dans des cas généraux $\frac{1}{\varrho}$ représente même la valeur exacte du rayon ϱ .

Il en sera, d'abord, ainsi toutes les fois que l'arc L se réduit à une portion (a, b) , limitée ou illimitée, de l'axe réel, le long de laquelle les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues, et l'intégrale $\int A(t) dt$ finie et différente de zéro.

Pour le faire voir, supposons d'abord que $r(t)$ garde constamment un même signe dans l'intervalle (a, b) (nous considérerons ce signe comme positif) et que la dérivée $r'(t)$ y soit positive. D'après le théorème cité de Ossian Bonnet, on aura

$$(17) \quad I(n) = AB^n$$

avec

$$A = \int_{\xi}^b A(t) dt, \quad B = r(b), \quad a < \xi < b,$$

d'où l'on conclut que

$$\varrho = \frac{1}{r(b)}.$$

Si maintenant la dérivée $r'(t)$ était négative, on aurait encore l'égalité (17) avec

$$A = \int_a^{\xi} A(t) dt, \quad B = r(a), \quad a < \xi < b,$$

et le rapport de convergence serait

$$\varrho = \frac{1}{r(a)}.$$

Si, enfin, $r(t)$ et la dérivée $r'(t)$ changeaient de signe dans l'intervalle (a, b) , on décomposerait cet intervalle en plusieurs autres où $r(t)$, ainsi que $r'(t)$, gardent des signes invariables. Chacun de ces intervalles partiels donnera dans $I(n)$ un terme de la forme AB^n ; la valeur asymptotique de $I(n)$ coïncidera avec

celui de ces termes pour lequel $B = r(t)$ a la plus grande valeur, de sorte qu'en désignant celle-ci par ρ on aura l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim A \rho^n,$$

et le rayon ρ aura pour valeur $\frac{1}{\mu}$.

Voici maintenant un second cas général où le rayon ρ a pour valeur exacte $\frac{1}{\mu}$. Supposons qu'on puisse déformer le chemin d'intégration, réel ou imaginaire, de manière à le faire passer par un point α autre qu'une limite de l'intégrale et jouissant des propriétés suivantes : 1° qu'on ait $r'(\alpha) = 0$; 2° que la plus grande valeur de $r(t)$ le long du nouveau chemin ait lieu en α ; 3° que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient holomorphes au voisinage de α . Dans ce cas, on aura encore

$$\rho = \frac{1}{|r(\alpha)|}.$$

Ceci résulte directement du théorème de M. Darboux consistant en ce que, dans les conditions énumérées, l'égalité asymptotique de Laplace est valable et l'intégrale $I(n)$ se laisse mettre, pour les grandes valeurs de n , sous la forme

$$N \frac{[r(\alpha)]^n}{\sqrt[n]{n}} (1 + \varepsilon),$$

où N est une constante indépendante de n , et ε une fonction de n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

2. D'une manière générale, la question de convergence des fonctions $\theta(z)$ est étroitement liée à celle des valeurs asymptotiques des intégrales $I(n)$ ou, ce qui revient au même, à celle des valeurs approchées des $I(n)$ pour les grandes valeurs de n .

Nous rappellerons quelques égalités asymptotiques de cette espèce, connues ou faciles à démontrer, s'appliquant directement à la question de convergence des fonctions $\theta(z)$.

En premier lieu, l'égalité asymptotique de Laplace

$$\int_1^\infty A(t) r[t(t)]^n dt \sim \frac{AB^n}{\sqrt[n]{n}}$$

(où A et B sont des constantes, indépendantes de n), applicable dans les conditions connues, précisées par M. Darboux ⁽¹⁾ et citées dans le paragraphe précédent.

MM. Flamme ⁽²⁾ et Hamy ⁽³⁾ se sont particulièrement occupés des intégrales de la forme

$$\int_L \Lambda(t) t^n dt, \quad \int_L \Lambda(t) \left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

et ont mis en évidence la manière dont leurs valeurs asymptotiques dépendent de la nature des singularités de la fonction $\Lambda(t)$.

M. Le Roy ⁽⁴⁾ s'est occupé des valeurs asymptotiques des intégrales

$$I(n) = \int_0^\infty \Lambda(t) e^{nt} dt$$

lorsque la fonction $\Lambda(t)$ satisfait à certaines conditions assez larges.

Un procédé simple, dû à M. Poincaré ⁽⁵⁾, permet de traiter le cas des intégrales $I(n)$ de la forme

$$\int_L \Lambda(t) e^{int} dt,$$

prises le long d'un chemin réel ou imaginaire de longueur finie; on arrive à l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim \frac{A e^{an}}{n},$$

où A et a ne dépendent pas de n .

Citons encore le cas où l'intégrale $I(n)$ donnée est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini et, par suite, dévelop-

⁽¹⁾ Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1878).

⁽²⁾ *Recherches des expressions approchées*, etc. (Thèse de doctorat, Paris, 1887).

⁽³⁾ *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice*, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1894).

⁽⁴⁾ *Valeurs asymptotiques de certaines séries*, etc. (*Bull. des Sciences math.*, 1900).

⁽⁵⁾ *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Chap. VII.

pable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$, convergente pour les valeurs suffisamment grandes de n : on démontre aisément l'égalité asymptotique

$$I(n) = \frac{A}{n^p},$$

A étant une constante et p un entier positif ou nul, indépendants de n . Tel est, par exemple, le cas des intégrales

$$\int_0^\infty A(t) e^{-nt} dt$$

lorsque $A(t)$ est holomorphe au voisinage de $t = 0$ et telle que, en posant

$$A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots,$$

la série

$$\sum n! \alpha_n t^n$$

converge pour les valeurs suffisamment petites de t [ce qui arrive, en particulier, toutes les fois que $A(t)$ est une fonction entière du genre zéro].

3. Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction considérée $\theta(z)$ est une *fonction entière* de z . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des expressions

$$\sqrt[n]{I(n)}, \quad \frac{I(n+1)}{I(n)}$$

tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment. La proposition subsiste, d'ailleurs, si l'on substitue aux intégrales $I(n)$ leurs valeurs asymptotiques, dont il a été question dans le paragraphe précédent.

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{int} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{n^2}{4a}}$$

est une fonction entière de n ; au contraire, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} e^{-nt} dt$$

n'est pas entière, la valeur asymptotique de $I(n)$, d'après une proposition du paragraphe précédent, étant égale à $\frac{1}{n}$.

Dans les cas où l'on ne saurait exprimer sous la forme explicite ni la valeur exacte $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut procéder par comparaison, comme dans l'étude de la convergence des séries $\theta(z)$. La règle intuitive suivante rendra souvent des services à cet égard :

Soient $\lambda(t)$ et $u(t)$ deux fonctions telles qu'à l'intégrale

$$Y(n) = \int_L |\lambda(t)| |u(t)|^n ds$$

correspond la fonction entière

$$Y(0) + Y(1)z + Y(2)z^2 + \dots$$

Si le long du chemin L on a constamment

$$\begin{aligned} |A(t)| &\leq |\lambda(t)|, \\ |r(t)| &\leq |u(t)|, \end{aligned}$$

la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale $I(n)$ sera également une fonction entière de z .

En nous reportant à ce qui a été dit pour le rayon de convergence des séries $\theta(z)$, on trouverait aisément d'autres règles fournissant des conditions suffisantes ou bien pour que $\theta(z)$ soit une fonction entière, ou bien pour qu'elle ne le soit pas. Elle ne le sera pas, par exemple, si, le chemin d'intégration étant réel, les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues le long de ce chemin, l'intégrale

$$\int_L A(t) dt$$

ayant un sens.

Ou bien encore : si $A(t)$ et $r(t)$ satisfont aux conditions pour que l'inégalité asymptotique de Laplace soit applicable à l'intégrale correspondante $I(n)$, etc.

V. — PARTICULARITÉS DIVERSES DES FONCTIONS $\theta(z)$.

1. La forme même des expressions analytiques des fonc-

tions $\theta(z)$, données soit sous la forme des séries

$$(18) \quad \theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

avec

$$(19) \quad I(n) = \int_L \Lambda(t) [r(t)]^n dt,$$

soit comme intégrales

$$(20) \quad \theta(z) = \int_L \frac{\Lambda(t)}{1 - zr(t)} dt,$$

rend particulièrement facile l'étude de ces fonctions, en mettant en évidence des relations existant entre leurs diverses particularités et celles des fonctions correspondantes $\Lambda(t)$ et $r(t)$.

La première expression analytique définit $\theta(z)$ à l'intérieur d'une certaine circonférence; la seconde en fournit le prolongement analytique dans tout le plan. Chacune d'elles met en évidence certaines particularités des fonctions qu'elle définit. La première, par exemple, se prête directement à l'application des résultats récents de la théorie des séries de Taylor, relatifs aux relations existant entre la manière dont varie $I(n)$ avec n et celle dont croît $\theta(z)$ avec z ; ou bien entre les particularités de $I(n)$ et les singularités de $\theta(z)$, ses zéros, ses pôles, etc. La seconde expression est souvent plus commode pour le calcul numérique des fonctions $\theta(z)$; elle rend possible l'étude des propriétés de $\theta(z)$ au delà du cercle de convergence de la série correspondante, etc. Les résultats récents relatifs à certaines intégrales de la forme (20), dus à M. Le Roy, offrent, par exemple, le moyen d'étudier les valeurs asymptotiques des fonctions $\theta(z)$, la distribution de leurs singularités dans le plan des z , la manière dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z approche du cercle de convergence de la série $\theta(z)$ ou bien d'une singularité, ou lorsque z tourne autour de celle-ci, etc.

Nous n'indiquerons qu'à titre d'exemples quelques résultats de cette nature.

2. Tout d'abord, les connaissances sur des limites supérieures ou inférieures du module de la fonction $\Lambda(t)$ ou $r(t)$ entraînent des connaissances sur les limites que ne saurait dépasser le module de la fonction correspondante $\theta(z)$ pour les valeurs données de z .

Ainsi, en désignant par M le plus grand module de $r(t)$ le long de l'arc L ou bien d'un chemin équivalent, la fonction rationnelle

$$\frac{P}{1 - Mz}$$

avec

$$P = \int_L |A(t)| ds$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ pour toutes les valeurs de z à module inférieur à $\frac{1}{M}$.

On aura des limites plus précises dans les cas où les limites supérieures des modules de $A(t)$ et $r(t)$ sont fournies par des fonctions diverses de t .

Ainsi, l'axe L se réduisant au demi-axe réel, si les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles pour les valeurs réelles et positives de t et telles que pour les valeurs positives convenablement choisies de k , h , a on ait en valeur absolue

$$A(t) \leq kt, \quad r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2 + t^2}},$$

on aura en valeur absolue

$$I(n) < \frac{kh^2}{n-2} \left(\frac{h}{a}\right)^{n-2} \quad (n > 2),$$

de sorte que la fonction

$$I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + kh^2z^2 \log\left(1 - \frac{hz}{a}\right)$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ pour toutes les valeurs de z à module inférieur à $\frac{a}{h}$.

Signalons, à ce propos, un résultat d'une portée plus générale, fourni par les mêmes considérations et conduisant à une inégalité intéressante relative aux accroissements finis d'une classe étendue de fonctions.

Considérons une fonction $f(z)$ réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle positive et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment dans une direction quelconque correspondant aux parties réelles positives.

Comme nous l'avons montré précédemment, à partir du rang $n = 2$, les coefficients Λ_n du développement

$$f(z) = \Lambda_0 + \Lambda_1(z - \lambda) + \Lambda_2(z - \lambda)^2 + \dots$$

sont, en valeurs absolues, inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$\theta(z) = I(2)(z - \lambda)^2 + I(3)(z - \lambda)^3 + \dots,$$

où

$$I(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{\sqrt{(\lambda^2 + t^2)^{n+1}}} dt,$$

$\psi(t)$ désignant le coefficient de i dans $f(ti)$ et λ étant un nombre réel et positif quelconque.

Or, comme l'on a, en vertu de ce qui précède,

$$I(n) < \frac{2N}{\pi} \frac{1}{(n-1)\lambda^{n-1}}$$

(N désignant la plus grande valeur absolue, finie et différente de zéro, qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z = 0$ à $z = \infty$), on aura en valeur absolue

$$\theta(z) < \frac{2N}{\pi} \log \left(1 - \frac{z - \lambda}{\lambda} \right),$$

d'où, en faisant

$$\lambda = x, \quad z = x + h,$$

on tire le résultat suivant :

La valeur absolue de l'expression

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

est inférieure à celle de l'expression

$$\frac{2N}{\pi} \log \left(1 - \frac{h}{x} \right)$$

quelles que soient les quantités réelles et positives h et x pourvu qu'elles satisfassent à la condition $-x < h < x$.

3. Lorsque la fonction $\theta(z)$ est *entière*, on peut, dans des cas

étendus, étudier la manière dont elle se comporte lorsque le module de z croît indéfiniment.

Supposons, par exemple, qu'on ait déterminé, par des procédés de M. Hadamard, une fonction $\chi(n)$ au plus égale, pour les valeurs entières de n , au module de l'intégrale $I(n)$ et telle que la fonction

$$\varphi(n) = \sqrt[n]{\chi(n)}$$

soit une fonction réelle, positive, continue et croissante de n , devenant infinie pour $n = \infty$. En désignant par x le module de z et par $\psi(z)$ la fonction inverse de φ , d'après le théorème bien connu de M. Hadamard, *la fonction $\theta(z)$ croîtra moins vite que la fonction*

$$x^\varepsilon e^{\int \frac{\psi(x)}{\alpha} dx},$$

le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{nti} dt = A e^{-\alpha n^2}$$

(où a, A, α sont des constantes positives) croîtra moins vite que la fonction

$$x^\varepsilon e^{\frac{1}{\alpha} (\log x)^2}.$$

Dans des cas étendus, on saura même préciser la valeur asymptotique de la fonction $\theta(z)$, supposée entière, pour les grandes valeurs de z . Considérons, par exemple, le cas étudié par M. Le Roy ⁽¹⁾ : supposons qu'en posant

$$-\log I(n) = \varpi(n),$$

la fonction $\varpi(n)$ satisfasse aux conditions suivantes :

1° Cette fonction, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres sont réelles, positives et continues pour les valeurs positives de n ;

2° $\varpi(n)$ et $\varpi'(n)$ croissent jusqu'à l'infini tandis que $\varpi''(n)$ décroît jusqu'à zéro pour $n = \infty$;

⁽¹⁾ *Valeurs asymptotiques de certaines séries* (Bull. des Sciences math., 1900, p. 262).

3° Le produit $n^2 \varpi''(n)$ représente une fonction positive et indéfiniment croissante avec n ;

4° Le rapport $\frac{\varpi(n)}{n}$ devient infini avec n .

D'après un théorème dû à M. Le Roy, lorsque la variable z croît indéfiniment dans la direction des z réels et positifs, la fonction correspondante $\theta(z)$ tendra asymptotiquement vers la fonction

$$\sqrt{2\pi} \frac{e^{u\varpi'(u) - \varpi(u)}}{\sqrt{\varpi''(u)}},$$

u désignant la racine réelle et positive de l'équation

$$\varpi'(u) = \log z.$$

Ainsi, dans le cas de

$$I(n) = e^{-n^p} \quad (1 < p < 2),$$

on aura

$$\varpi(n) = n^p, \quad u = \left(\frac{\log z}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

de sorte que la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$ sera

$$\alpha (\log z)^k e^{\beta (\log z)^h},$$

α, p, k, h étant des constantes faciles à préciser.

Dans les cas où la fonction $\theta(z)$ n'est pas entière, on connaîtra dans des cas étendus sa valeur asymptotique lorsque z approche d'un point du cercle de convergence de la série $\theta(z)$. Tel est, par exemple, le cas de M. Le Roy suivant :

Supposons que, le rayon de convergence de $\theta(z)$ étant égal à l'unité, l'intégrale correspondante $I(n)$ soit une fonction réelle, positive et constamment décroissante de n , tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Soit $F(n)$ une fonction de n telle qu'on ait, pour $n = \infty$,

$$\lim \frac{1}{I(n)} \frac{dF}{dn} = 1.$$

D'après un théorème de M. Le Roy ⁽¹⁾, la valeur asymptotique

(1) Valeurs asymptotiques de certaines séries (Bull. des Sciences math., 1900, p. 250).

tique de $\theta(z)$ pour z voisin de 1 est de la forme

$$\text{CF}\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad (C = \text{const.}).$$

Ainsi, dans le cas où

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$, pour z voisin de 1, sera

$$\frac{C}{\sqrt{1-z}}.$$

Remarquons que la fonction $F(n)$ coïncide avec l'intégrale

$$\int \varphi(n) dn,$$

$\varphi(n)$ étant la valeur asymptotique de $I(n)$ pour les grandes valeurs de n , dont nous nous sommes précédemment occupé.

Remarquons aussi qu'au cas précédent se ramène facilement celui où le rayon de convergence de $\theta(z)$ n'est pas égal à l'unité, ou bien celui où $I(n)$ tend vers une limite finie différente de zéro.

4. Certains résultats dus à M. Le Roy, concernant les singularités des fonctions représentées par les séries de Taylor et par certaines classes d'intégrales définies, s'appliquent avec la plus grande facilité aux fonctions qui nous occupent, et fournissent directement des connaissances sur les singularités de ces fonctions, la nature analytique de celles-ci, etc.

Supposons, par exemple, que l'intégrale

$$I(n) = \int_L A(t) [r(t)]^n dt,$$

correspondant à la fonction considérée $\theta(z)$, se laisse transformer en une autre de la forme

$$I(n) = \int_0^1 B(x) x^n dx,$$

la fonction $B(x)$ n'étant assujettie qu'à la condition que l'inté-

grale

$$\int_0^1 |B(t)| dt$$

ait un sens.

La fonction correspondante $\theta(z)$ sera holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1. En particulier, si le cercle de convergence de la série

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

a l'unité pour rayon, il ne contient qu'un point singulier de $\theta(z)$: c'est $z = 1$.

La portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel est pour $\theta(z)$ une coupure. Si $B(t)$ est holomorphe pour $0 > t > 1$, la coupure n'est pas essentielle, et $\theta(z)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z = 1$ et $z = \infty$.

La fonction $\theta(z)$ n'est pas uniforme, et le calcul du saut brusque subi par l'intégrale, quand on franchit la coupure, donne ses diverses déterminations.

Plusieurs circonstances peuvent alors se présenter. Si $B(t)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine, les périodes de $\theta(z)$, quand on tourne autour du point singulier 1, sont données par l'expression

$$\frac{2k\pi i}{z} B\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans le cas général (la coupure n'étant cependant pas essentielle) toutes les singularités sont possibles, suivant la nature de la fonction $B(t)$, pour les déterminations de $\theta(z)$ autres que la détermination principale.

Les procédés de M. Le Roy permettent de traiter aussi des cas beaucoup plus généraux; convenablement modifiés, ils sont, d'ailleurs, propres à s'appliquer, dans des cas très étendus, à des fonctions $\theta(z)$ correspondant aux coefficients $I(n)$ exprimés directement sous la forme générale

$$I(n) = \int_L \Lambda(t) [r(t)]^n dt.$$

Ajoutons aussi que cette dernière expression permet d'étendre la manière dont se comporte la fonction $I(t)$ pour $t = \infty$. Or, des connaissances de cette nature on peut souvent tirer des renseignements sur la distribution des singularités de la fonction correspondante $\theta(z)$ dans le plan des z ⁽¹⁾.

5. Dans une Note antérieure ⁽²⁾, j'ai démontré la proposition suivante : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série

$$(20) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

on aura

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r , pourvu qu'elle reste inférieure au rayon de convergence de la série (20).

La proposition subsiste manifestement lorsqu'on substitue dans $u(r)$ aux coefficients

$$|a_1|^2, \quad |a_2|^2, \quad |a_3|^2, \quad \dots,$$

des nombres réels positifs quelconques qui leur sont supérieurs. Ceci fait qu'appliquée aux fonctions $\theta(z)$ exprimées sous la forme des séries (17), elle fournit des renseignements sur les limites inférieures des modules des zéros de ces fonctions ou, plus généralement, des valeurs de z pour lesquelles $\theta(z)$ prend une valeur donnée a . Il suffit pour cela de calculer la fonction $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z)$ donnée, après y avoir remplacé le coefficient $I(n)$ par l'une des limites supérieures de son module, choisie de manière que le calcul de $u(z)$, ou au moins celui d'une de ses limites supérieures, soit possible. Les divers procédés indiqués précédemment conduisent à de telles limites

⁽¹⁾ Voir, par exemple, DESAINT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, p. 1102-1104.

⁽²⁾ *Bulletin de la Société mathém. de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312.

supérieures de $|I(n)|$, et ce genre de calcul ne présente aucune espèce de difficultés.

Envisageons, par exemple, les transcendentes

$$\theta(z) = \int_0^\infty \frac{z \Lambda(t)}{e^t - z} dt,$$

correspondant à

$$I(n) = \int_0^\infty \Lambda(t) e^{-nt} dt,$$

et supposons que, pour t réel et positif, la fonction $\Lambda(t) \sqrt{t}$ soit continue, réelle, positive et constamment inférieure à un certain nombre M . On aura

$$a_n < M \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = M \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

et $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z) + a$ (où a est un nombre réel et positif quelconque) aura pour expression

$$u(r) = \frac{1}{r^2} [a^2 - M^2 \pi \log(1 - r^2)],$$

de sorte qu'une limite inférieure μ des modules des valeurs de z pour lesquelles $\theta(z)$ prend la valeur donnée a , est fournie par la valeur de l'expression

$$\mu = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - M^2 \pi \log(1 - r^2)}},$$

et cela quelle que soit la valeur de r comprise entre 0 et 1. En prenant, en particulier,

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0,795\dots,$$

une limite inférieure cherchée sera

$$\mu = \frac{0,795 a}{\sqrt{a^2 + M^2 \pi}}.$$

Indiquons encore un résultat plus général de cette espèce.

Soit $F(x)$ une fonction entière d'un genre fini μ . Désignons par M le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .

D'autre part, en posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

l'expression de a_n , sous la forme de l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{F(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

conduit, comme l'on sait, à l'inégalité

$$|a_n| < N \frac{\beta^n}{n^{cn}},$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

Le rôle de la fonction $u(r)$ est donc joué par la fonction

$$\frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^\infty \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}},$$

et, en y faisant $r = \frac{1}{\beta}$, on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(21) \quad \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A}\right)^2}},$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$; α et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$\alpha = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}}, \quad b = \theta \left(\frac{2}{p+1}\right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonctions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

$$\begin{array}{lll} \text{pour } p = 0 : & a = e & = 2,7183; & b = \theta(2) = 1,0639; \\ \text{pour } p = 1 : & a = \sqrt{2e} & = 2,3316; & b = \theta(1) = 1,2913; \\ \text{pour } p = 2 : & a = \sqrt[3]{3e} & = 2,0128; & b = \theta(\frac{2}{3}) = 1,5383, \dots \end{array}$$

En remplaçant dans (21) A par $|F(0) - C|$, cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C .

6. L'expression de $\theta(z)$, sous la forme de l'intégrale

$$(22) \quad \theta(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - z r(t)} dt$$

se prête facilement au calcul numérique approché des valeurs que prend cette fonction pour des valeurs données de z . Elle met, en outre, mieux en évidence certaines particularités de la fonction que ne le ferait l'expression de $\theta(z)$ sous la forme de la série de Taylor.

Supposons, par exemple, que les limites de l'intégrale, ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient réelles et positives. L'expression (22) montre tout d'abord que la fonction $\theta(z)$ (ou bien sa branche principale dans le cas où elle n'est pas uniforme) aura des valeurs réelles et positives pour les z réels, positifs ou négatifs, mais plus petits que $\frac{1}{M}$, M désignant la plus grande valeur de la fonction $r(t)$ entre les limites de l'intégrale.

En posant

$$z = \xi + \eta i,$$

on aura

$$\theta(z) = U + i\eta V$$

avec

$$U = \int_L \Lambda(t) \frac{1 - \xi r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt,$$

$$V = \int_L \Lambda(t) \frac{r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt.$$

Le produit $\Lambda(t)r(t)$ étant positif pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites de l'intégrale, la valeur V sera différente de zéro : la fonction $\theta(z)$ (sa branche principale) ne saurait donc avoir aucun zéro imaginaire. D'autre part, comme U ne saurait être nulle pour $\xi < \frac{1}{M}$, les zéros de $\theta(z)$ sont tous réels, positifs et plus grands que $\frac{1}{M}$, etc.

Il serait aussi facile d'en tirer des renseignements sur la façon dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z croît indéfiniment par des valeurs positives ou négatives, ou bien lorsque z approche de la valeur $\frac{1}{M}$, etc. C'est là, par exemple, que les méthodes de M. Le Roy trouveraient de vastes applications.

Je me borne à signaler le vaste champ de recherches qu'offrent les fonctions $F(z)$ données par l'expression analytique faisant l'objet de ce Mémoire. Une étude plus approfondie de leurs diverses particularités mériterait d'être faite; on y rencontrera une foule de transcendentes nouvelles dont on saura étudier les propriétés et qui présenteront de l'intérêt.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES RÉCIPROQUES DU SECOND ORDRE;

Par M. PAUL-J. SUCHAR.

1. Soient

$$(1) \quad x_1 = \varphi(x)$$

une fonction de la variable x et

$$(2) \quad x = \psi(x_1)$$

la fonction inverse. Il existe des fonctions $F(x)$, $F_1(x_1)$ de la variable x et de la variable x_1 , qui jouissent de la propriété sui-

vante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=\psi(x_1)} = F_1(x_1), \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=\varphi(x)} = F(x). \end{array} \right.$$

Les symboles $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=\psi(x_1)}$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=\varphi(x)}$ sont les dérivées de $F(x)$ et $F_1(x_1)$ prises par rapport à x et x_1 , et où l'on remplace ensuite x en fonction de x_1 et x_1 en fonction de x à l'aide de (1) et (2). Ces fonctions sont solutions de deux équations différentielles linéaires de second ordre.

En effet, posons

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x);$$

la première relation de (3) nous donne, en dérivant par rapport à x_1 ,

$$\left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x=\psi(x_1)} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1},$$

et, si l'on remplace x_1 en fonction de x d'après (1), on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x) F.$$

On aura de même, en partant de la seconde des relations (3),

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} F_1,$$

et les fonctions $F(x)$ et $F_1(x_1)$ sont solutions de ces dernières équations.

Nous dirons que ces équations sont réciproques.

2. Il résulte de ce qui précède que, étant donnée une équation différentielle linéaire du second ordre, on peut toujours la supposer ramenée à la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) y;$$

on formera sa réciproque en faisant le changement de la variable

indépendante

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x),$$

d'où

$$x_1 = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(x_1),$$

et le changement de la fonction en posant

$$y_1 = \frac{dy}{dx};$$

l'équation réciproque sera alors

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} y_1.$$

La propriété qui caractérise ces équations est la suivante :

La dérivée d'une solution d'une des équations considérée comme fonction de la variable indépendante de l'autre équation est une solution de cette dernière.

3. Considérons comme exemple l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(3x)^{\frac{4}{3}}} y.$$

La réciproque de cette équation s'obtient en posant

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1}{(3x)^{\frac{4}{3}}},$$

d'où

$$x_1 = -\frac{1}{(3x)^{\frac{1}{3}}} + c \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{3(x_1 - c)^3};$$

on aura donc

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(x_1 - c)^4} y_1.$$

Remarquons qu'on peut supposer $c = 0$, car cela revient à faire sur cette dernière équation un changement de la variable indépendante pour ramener le point $x_1 = c$ à l'origine; il faudra alors faire aussi $c = 0$ dans la relation qui lie x à x_1 , et l'équation réciproque sera

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{x_1^4} y_1.$$

Cette dernière équation est celle de Spitzer (1) et se ramène à des coefficients constants par le changement

$$y_1 = zx_1, \quad x_1 = \frac{1}{t};$$

on aura alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = z.$$

Donc les solutions de l'équation précédente sont

$$x_1 e^{\frac{1}{x_1}} \quad \text{et} \quad x_1 e^{-\frac{1}{x_1}}.$$

Ces solutions étant linéairement indépendantes, on aura alors, d'après le n° 2, l'intégrale générale de l'équation donnée, à savoir :

$$y = a \left[1 - (3x)^{\frac{1}{3}} \right] e^{(3x)^{\frac{1}{3}}} + b \left[1 + (3x)^{\frac{1}{3}} \right] e^{-(3x)^{\frac{1}{3}}},$$

où a et b sont des constantes.

4. Considérons comme second exemple l'équation plus générale

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}} y,$$

qui comprend, comme cas particulier, pour $n = 1$, l'équation de Spitzer.

Nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dx} = [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}}, \\ x_1 = -\frac{1}{2n-1} [(2n-1)x]^{-\frac{2n+1}{2n-1}}, \\ x = \frac{1}{2n-1} [-(2n+1)x_1]^{-\frac{2n-1}{2n+1}}, \end{cases}$$

et pour l'équation réciproque

$$(3) \quad \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = [(2n-1)x_1]^{-\frac{4n}{2n+1}} y_1.$$

Nous avons supposé, comme dans le premier exemple, la constante d'intégration nulle.

Je me propose de montrer qu'il est possible de trouver une

(1) SPITZER, *Vorlesungen über lineare differential Gleichungen*, p. 98.

solution de ces équations lorsque n est un nombre réel, et, s'il est entier, l'intégrale générale s'exprimera par des fonctions élémentaires. Remarquons, cependant, que l'exemple considéré rentre dans le type général

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ax^p y,$$

et qui, par un changement convenable de la variable et de la fonction, se ramène à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0,$$

et l'équation proposée pourra alors s'intégrer à l'aide des fonctions de Bessel. La méthode que je suivrai me permet d'obtenir directement une solution, ou bien l'intégrale générale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'équation de Bessel, ce qui me permettra d'ailleurs d'en déduire ensuite l'intégrale générale de l'équation de Bessel et reconnaître qu'elle s'exprimera à l'aide des fonctions élémentaires, si la constante k est de la forme

$$k^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,$$

où n est un nombre entier.

5. L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}} y$$

se réduit pour $n = 1$ à l'équation de Spitzer

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^4} y$$

et qui a pour solutions

$$x e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad x e^{-\frac{1}{x}};$$

la fonction

$$y = x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right),$$

que l'on peut encore écrire

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{\frac{z}{x}} dz,$$

est encore une solution de cette dernière équation. Il y a donc

lieu de chercher si, tout au moins pour n positif, l'équation (1) n'a pas une solution de la forme

$$(4) \quad y = \int_{-1}^{+1} u(z, n) e^{z \nu(x, n)} dz,$$

où $u(z, n)$ est une fonction de z et du paramètre n et qui est telle que, pour toutes les valeurs de z comprises entre -1 et $+1$, l'intégrale (4) ait un sens; quant aux limites, elle est supposée finie ou infinie, mais, dans ce dernier cas, elle sera infinie comme $\frac{1}{1-z^2}$ et d'un ordre inférieur à l'unité; enfin pour $n=1$ elle sera égale à 1. La fonction $\nu(x, n)$ est supposée continue par rapport à x , ayant une dérivée et se réduisant à $\frac{1}{x}$ pour $n=1$. Ces conditions sont suffisantes pour retrouver les fonctions $u(z, n)$ et $\nu(x, n)$, de manière que la fonction (4) soit une solution de (1).

Nous aurons, en dérivant (4) par rapport à x ,

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \int_{-1}^{+1} u(z, n) z \nu'(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & \int_{-1}^{+1} u(z, n) z^2 \nu'^2(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz \\ & + \int_{-1}^{+1} u(z, n) z \nu''(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} u(z, n) z^2 \nu'^2(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz \\ = & - \int_{-1}^{+1} u(z, n) (1-z^2) \nu'^2(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz \\ & + \int_{-1}^{+1} u(z, n) \nu'^2(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz, \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant la première intégrale par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura finalement

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dz} [u(z, n) (1-z^2)] \frac{\nu'^2(x, n)}{\nu(x, n)} e^{z \nu(x, n)} dz \\ & + \int_{-1}^{+1} u(z, n) z \nu''(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz \\ & + \int_{-1}^{+1} u(z, n) \nu'^2(x, n) e^{z \nu(x, n)} dz. \end{aligned}$$

Si nous portons ces expressions dans (1), nous aurons une identité si la fonction $u(z, n)$ satisfait à la relation

$$(6) \quad \frac{d}{dz} [u(z, n)(1 - z^2)] = 2kzu(z, n),$$

où k est un nombre qui dépend de n ; et, comme l'équation (1) est indépendante de $\frac{dy}{dx}$, on trouve en ayant égard à (5) que la fonction $v(x, n)$ doit satisfaire à la relation

$$(7) \quad 2k \frac{v'^2(x, n)}{v(x, n)} + v''(x, n) = 0;$$

enfin, on doit en outre avoir

$$(8) \quad v'^2(x, n) = [(2n - 1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}}.$$

La relation (6) nous donne

$$u(z, n) = (1 - z^2)^{-k-1},$$

à un facteur constant près qu'on peut supposer égal à 1 et, comme la fonction doit se réduire à 1 pour $n = 1$, la constante k sera donc égale à $-n$. La relation (7) nous donne, en remarquant que la fonction $v(x, n)$ doit se réduire à $\frac{1}{x}$ pour $n = 1$,

$$v(x, n) = [(2n - 1)x]^{-\frac{1}{2n-1}},$$

et cette dernière fonction vérifie, comme on le voit, la relation (8).

Nous aurons donc une solution de (1) pour n réel et positif de la forme

$$(9) \quad y = \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{n-1} e^{z[(2n-1)x]^{-\frac{1}{2n-1}}} dz.$$

Il est facile de trouver une solution de la même équation pour n négatif. Remarquons que, si dans (1) nous changeons n en $-n$, on obtient une équation qui ne diffère de l'équation réciproque (3) que par le changement de x_1 en x . On aura donc une solution de l'équation (1) pour n négatif si l'on connaît une solution de (3) pour n positif. L'équation (3) étant la réciproque de (1), il résulte,

d'après ce qui précède, que la dérivée d'une solution de (1) considérée comme fonction de x , à l'aide de (2) sera une solution de (3).

Nous aurons alors

$$y_1 = - \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{n-1} z [(2n+1)x_1]^{\frac{2n}{2n-1}} e^{z[-(2n+1)x_1]^{\frac{1}{2n-1}}} dz,$$

ou encore, en intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura

$$y_1 = \frac{2n+1}{2n} x_1 \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^n e^{z[-(2n+1)x_1]^{\frac{1}{2n+1}}} dz.$$

Il suffit alors de supprimer l'indice de x dans cette dernière fonction pour avoir une solution de l'équation (1) pour n négatif. Il faut remarquer cependant que n doit être pris positivement dans cette dernière fonction.

6. Remarquons que le coefficient de l'équation (1) se présente sous forme illusoire si $n = \frac{1}{2}$, tandis que l'équation (3) se présente sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = \frac{1}{2x_1} y_1;$$

on trouvera alors la vraie valeur de (1) en cherchant la réciproque de cette dernière équation. On trouve ainsi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{2x} y,$$

et il suffit alors, pour avoir une solution de cette dernière équation, de remplacer dans la solution trouvée pour (1)

$$\lim |(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}} = \sqrt{2} e^x,$$

et faire $n = \frac{1}{2}$; on trouve ainsi

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2} z e^x} dz$$

pour solution de cette dernière équation.

7. Il nous reste à trouver l'intégrale générale de (1) et (3) pour toutes les valeurs entières de n .

Nous nous bornerons à déterminer l'intégrale générale de (1), car l'intégrale générale de (3) sera aussi connue dès que la première le sera, puisque cette dernière équation est la réciproque de la première.

Si, dans la fonction (9), nous supposons n entier et en intégrant par parties, on trouve les deux fonctions linéairement indépendantes, à savoir :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} y = (2n-1)x & \left[a_0 + \frac{a_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \right. \\ & \left. + \frac{a_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \right] e^{-(2n-1)x^{\frac{1}{2n-1}}} \end{aligned} \right.$$

et

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} y = (2n-1)x & \left[b_0 + \frac{b_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \right. \\ & \left. + \frac{b_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \right] e^{-|(2n-1)|x^{\frac{1}{2n-1}}}, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients a et b satisfont aux relations

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{k-1} &= (-1)^{k-1} \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} a_0 \\ b_{k-1} &= \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} b_0 \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n \right.$$

et qui sont des solutions de (1).

Si, dans l'équation (1), nous faisons le changement de la variable et de la fonction, en posant

$$y = zx^{\frac{1}{2}}, \quad t = ax^{\frac{1}{2k}}, \quad a = 2k\sqrt{b}, \quad b = -(-2k)^{\frac{1-2k}{k}}, \\ 2k = -(2n-1),$$

cette équation se transforme en l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0.$$

Si nous supposons n un entier pair, on aura, d'après (10),

pour solutions de cette équation de Bessel,

$$z_1 = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^n \right] \right. \\ \left. - \sin \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_1 t - a_3 t^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1} \right] \right\},$$

$$z_2 = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_1 t - a_3 t^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1} \right] \right. \\ \left. + \sin \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^{n-2} \right] \right\},$$

où les constantes a sont données par (12).

8. Nous avons vu, au n° 1, qu'on peut toujours transformer une équation linéaire et homogène de second ordre en une autre qui lui est réciproque et nous avons trouvé qu'à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)y$$

correspond la réciproque

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} y_1.$$

Il peut se faire que la fonction $f(x)$ soit telle que, en faisant sur elle la substitution $x = \psi(x_1)$, on ait

$$f[\psi(x_1)] = \frac{1}{f(x_1)};$$

alors l'équation réciproque prend la forme

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = f(x_1) y_1;$$

elle ne diffère de l'équation donnée que par le changement de x en x_1 et de y en y_1 , et la transformation donnée transforme l'équation en elle-même; en d'autres termes, l'équation proposée est en même temps sa réciproque.

On reconnaît une certaine analogie avec le travail de M. Appell: *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable* (*Acta mathematica*, t. XV).

La différence qui existe est que le changement de la fonction est supposé linéaire par M. Appell, tandis que ce changement, d'après notre n° 2, n'est pas linéaire. Il nous reste encore à montrer qu'il existe des fonctions $f(x)$ ayant la propriété indiquée dans ce même numéro. En effet, d'après le n° 1, où nous avons posé

$$x_1 = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(x_1)$$

pour la fonction inverse et

$$f(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},$$

il résulte

$$\frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]},$$

et, comme $f[\psi(x_1)]$ doit être égale à $f(x_1)$, on aura alors

$$\frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} = f(x_1);$$

donc les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x_1)$ ne doivent différer que par le changement de x en x_1 . Donc la fonction $f(x)$ cherchée est la dérivée d'une fonction qui a pour inverse la même fonction.

Considérons alors l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)y$$

et supposons $f(x)$ remplissant cette dernière condition, cette équation sera alors transformable en elle-même par le changement de la variable et de la fonction indiquée au n° 2; elle aura alors pour solution la dérivée d'une solution de la même équation, sur laquelle on fera la substitution $x = \varphi(x)$. Un exemple nous est donné par l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y,$$

où $\varphi(x) = x$ et, par conséquent, $f(x) = 1$; cette équation étant en même temps sa réciproque, il s'ensuit qu'elle aura pour solution la dérivée d'une solution, ce que l'on sait d'ailleurs.

Il en est de même de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} y,$$

où

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x^2};$$

or

$$y = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

est une solution de cette équation; on vérifie, en effet, que la dérivée de cette solution prise par rapport à x , où l'on remplacera ensuite x par $-\frac{1}{x}$, est aussi une solution de la même équation.

D'une manière plus générale, considérons la fonction

$$\varphi(x) = (1 - x^m)^{\frac{1}{m}},$$

où m est un nombre quelconque; supposons-nous donnée en outre une des déterminations de cette fonction, on aura alors pour $f(x)$

$$f(x) = -x^{m-1} (1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}},$$

et pour l'équation qui est transformable en elle-même

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x^{m-1} (1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}} y.$$

La dérivée d'une solution de cette équation, où l'on remplacera x par $(1 - x^m)^{\frac{1}{m}}$, sera une autre solution de la même équation. On peut aussi généraliser la dernière expression de $\varphi(x)$ en remplaçant x par une certaine fonction $u(x)$, dont l'inverse est $v(x)$. On prendra alors pour $\varphi(x)$ l'expression

$$\varphi(x) = v \left\{ 1 - [u(x)]^m \right\}^{\frac{1}{m}},$$

et la dérivée de cette fonction par rapport à x sera la fonction $f(x)$. On pourra alors former l'équation différentielle qui est en même temps sa réciproque.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe des fonctions $F(x)$, telles que, en prenant la dérivée et en faisant sur x la substitution $x = \varphi(x)$, on aura

$$F'[\varphi(x)] = F(x),$$

et, si $\varphi(x)$ a pour inverse la même fonction, $F(x)$ sera solution

d'une équation différentielle linéaire du second ordre ayant pour réciproque la même équation. On trouve ainsi comme exemples simples les fonctions

$$F(x) = \sin x + \cos x,$$

$$F(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + (-1)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

où $\varphi(x) = -x$ pour la première fonction et $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ pour la seconde.

9. Nous allons terminer par une dernière remarque en étendant les mêmes considérations aux équations différentielles simultanées linéaires et du second ordre.

Nous nous bornerons à deux équations que nous supposerons de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) (\alpha y + \beta z), \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x) (\gamma y + \delta z). \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro. Si nous répétons le même raisonnement qu'au n° 1 en posant

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x), \quad x_1 = \phi(x), \quad \text{d'où} \quad x = \psi(x_1),$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \quad z_1 = \frac{dz}{dx},$$

on transformera le système donné en un autre qui lui est réciproque et de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} (\alpha y_1 + \beta z_1), \\ \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} (\gamma y_1 + \delta z_1). \end{cases}$$

On vérifie de la même manière que, si $y = u(x)$, $z = v(x)$

sont des solutions de (1), les dérivées $u'(x)$, $v'(x)$ considérées comme fonctions de x_1 sont solutions de (2); et réciproquement, si $y_1 = u_1(x_1)$, $z_1 = v_1(x_1)$ sont solutions de (2), les dérivées $u'_1(x_1)$, $v'_1(x_1)$ considérées comme fonctions de x sont solutions de (1).

Considérons comme exemple le système

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^4} (\alpha y + \beta z),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x^4} (\gamma y + \delta z);$$

le système réciproque est

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{4}{3}}} (\alpha y_1 + \beta z_1),$$

$$\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{4}{3}}} (\gamma y_1 + \delta z_1).$$

Si l'on sait intégrer un de ces systèmes, on saura intégrer l'autre aussi.

Remarquons que, si dans le premier système on fait le changement des fonctions et de la variable en posant

$$y = ux, \quad z = vx, \quad x = \frac{1}{t},$$

on obtiendra le système à coefficients constants

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \alpha u + \beta v,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \gamma u + \delta v.$$

SUR CERTAINS GROUPES DE MATHIEU :

Par M. DE SÉGUIER.

1. On trouvera dans le *Journal de M. Jordan* (1902, p. 159) la démonstration du théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence

d'un groupe G_t $t+1$ fois transitif entre les symboles $1, \dots, n, \sigma_1, \dots, \sigma_t$, où Λ est le groupe fixant $\sigma_1, \dots, \sigma_t$, F le groupe fixant $1 = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_t$, sont qu'il existe des substitutions d'ordre 2, $s_h = (\sigma_0) \dots (\sigma_{h-2}) (\sigma_{h-1}, \sigma_h) (\sigma_{h+1}) \dots (\sigma_t) \dots$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} s_h^2 = 1, \quad s_h f s_h = f_h, \quad s_1 r s_1 = a' s_1 a'', \\ s_l a s_l = a_l, \quad (s_i s_{i+1})^3 = f_{i1}, \quad (s_j s_{j+k})^2 = f_{jk} \\ (h = 1, \dots, t; i = 1, \dots, t-1; j = 1, \dots, t-2; k = 2, \dots, t-j; \\ l = 2, \dots, t; f \text{ parcourt les générateurs de } F, a \text{ ceux de } \Lambda \text{ qui sont} \\ \text{hors de } F; r \text{ un système de restes } \not\equiv 1 \text{ de } \Lambda \bmod F; a', a'', a_l \text{ sont} \\ \text{dans } \Lambda \text{ hors de } F; f_h, f_{i1}, f_{jk} \text{ dans } F), \end{array} \right.$$

et ces équations jointes à celles de Λ définissent G_t .

2. Prenons pour Λ le groupe $\{(z, iz), (z, 1-z)\}$, z parcourant un corps de Galois $C_\pi = C$ d'ordre $p^m = \pi$ (p premier, $\pi > 2$) dont i est racine primitive. Posons $(z, iz) = a$, $(z, 1-z) = b$ et cherchons à adjoindre à Λ une $s_2^{(1)} c = (0\infty) \dots$ telle que Λ soit le diviseur fixant un symbole dans $\{\Lambda, c\} = G$. On devra avoir $cac = a^\alpha$, $\alpha^2 = 1$. Si $\alpha = 1$, comme $a = (i^0, i^1, i^2, \dots)$, il faut

que $c = (0\infty)(i^2, i^{x+2\rho})$ avec $i^{x+2\rho} = i^x$, $2\rho = \pi - 1$, ou $c = (0\infty)a^{\frac{\pi-1}{2}}$, et G contiendrait (0∞) , ce qui ne se peut, la classe étant $\pi - 1$. Soit donc $\alpha = -1$. Alors $c = (0\infty)(i^x, i^{\rho-x})$ est de la forme $(r z^{-1})$ et la condition $(cb)^3 = 1$ donne $r = 1$. Donc G coïncide avec le $g_{\pi(\pi-1)} \mathcal{L} = \sum \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$, les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parcourant $C(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$, z parcourant C et ∞ ⁽²⁾. On voit immédiatement par le même procédé que $\mathcal{L}$ ne peut être le diviseur fixant un symbole dans un $g^{\pi+2}$. Les équations de $\mathcal{L}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{a, b\}$ $c^2 = (cb)^3 = (ca)^2 = 1$.

Le diviseur fixant un symbole dans un $g_{p^2-1}^{p+1}$ transitif étant métacyclique, il résulte de ce qui précède que le seul $g_{p^2-1}^{p+1}$ transitif est $\mathcal{L}(2, p)$.

3. Prenons maintenant pour Λ le $g_{\frac{\pi(\pi-1)}{2}}^{\pi-1}$ (π impair) engendré

⁽¹⁾ Je me servirai des mêmes notations que dans le Mémoire cité.

⁽²⁾ Cf. MILLER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, p. 294.

par $a = (i^2 z) = (i^0, i^2, \dots, i^{\pi-3})(i, i^3, \dots, i^{\pi-2})$ et le g_π abélien principal B formé des substitutions $b_\beta = (z + \beta)$, β parcourant C (je poserai $b_1 = b$; si $\pi = p$, $b_\beta = b^\beta$). A est défini ⁽¹⁾ par $a^{\frac{\pi-1}{2}} = b_h^p = 1$, $b_h b_k = b_k b_h$, $a^{-1} b_h a = b_{i^2 h}$, h, k parcourant $1, i, \dots, i^{m-1}$ (si $i^2 = \sum_0^{m-1} x_{\rho s} i^s$, $b_{i^2} = \prod_0^{m-1} b_{i^{\rho s}}^{x_{\rho s}}$). Cherchons à adjoindre à A une s_2 $c = (0\infty) \dots$ telle que, dans $G = \{A, c\}$, A soit le groupe fixant ∞ .

Par les mêmes raisonnements que dans le Mémoire cité ⁽²⁾ où l'on changera en indices les exposants de b , on trouve que $c = (r z^{-1})$, r étant un carré ou un non-carré suivant que $\pi \equiv 1$ ou $\equiv 3 \pmod{4}$, c'est-à-dire que $G = \mathcal{V}(2, \pi)$, *sauf que, si $\pi = 7$, G peut encore être le g_{168}^8 composé; et l'on obtient ainsi les équations de $\mathcal{V}$.*

$\mathcal{V}(2, \pi)$ ne peut être le diviseur fixant un symbole σ dans un $g^{\pi+2}$. Soit en effet d la s_2 à adjoindre à $\mathcal{V}$ pour engendrer ce $g^{\pi+2}$ et supposons d'abord $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. On voit, comme dans la recherche précédente, que $d = (\sigma \infty)(z, \xi'_z z^{-1})(z \neq 0)$, $\xi'_z = r' i = i^{2\rho'}$ ou $\xi'_z = s' = i^{2\sigma'}$ selon que z est carré ou non. On a $c = (r z^{-1})$, $dc = (\sigma 0\infty)(z, r \xi'_z z^{-1} z)(z \neq 0)$, et $(dc)^3$, qui fixe 0, doit être dans $\{A\}$, ce qui exige $r' = s'$. De plus d doit être permutable à A, donc à B, seul g_π de A; or $cb_h c = \left(\frac{r' z}{h z + r'}\right)$ n'est pas de la forme $(z + k)$. Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, on a de suite $r' = s'$.

Au contraire, le g_{168}^8 composé est le diviseur fixant un symbole dans un g_{1512}^9 trois fois transitif; on le verra bientôt dans un théorème plus général.

4. Tout $g_{2p(p^2-1)}^1 X$ qui a plus d'un g_p en a $p+1$. Si donc X est simple, il est représentable en $g^{p+1} = \mathcal{V}(2, p)$.

Si $p = 2q + 1$ (q premier), X est encore représentable en g^{p+1} [donc isomorphe à $\mathcal{V}(2, p)$ ou au g_{168}^8 composé] sauf s'il a un g_q

⁽¹⁾ Cf., loc. cit., p. 264.

⁽²⁾ Je reprendrai seulement ici un point de détail. Si $\alpha = -1$ et si c échange les cycles de a (dont $\pi \equiv 3 \pmod{4}$), $c = (0\infty)(i^{2x}, i^{2q+1-2x}) = (z, r z^{-1})(r = i^{2q+1})$. Or $cbc = \left(\infty, r, \frac{r}{2}, \frac{r}{3}, \dots, -r\right)$, et $cb_\beta c$ devant être de la forme $b_x c b_{x'} b_{-t} a^x b_t$, où t est arbitraire, il faut, pour $t = r$, que l'on ait $x = x' = r$, $cbc = b_r c a^r b_r$; le second membre devant fixer 0, i^{2y} doit être égal à $-r$, ce qui exige que l'on ait $\pi \equiv 3 \pmod{4}$; alors y se trouve déterminé.

normal Q dont chaque élément est permutable à chaque c_p . Dans ce cas d'exception, $X|Q$ est représentable en g^{p+1} 2 fois transitif de classe p , et $p+1=2^\omega$. Or, pour que $2^\omega-1=p$ et $2^{\omega-1}-1=q$ soient premiers, il faut que ω et $\omega-1$ le soient; donc $q=3$. Mais alors, $X|Q$ ayant un g_8 abélien normal, X a un $g_{3.8}$ abélien Y . Si Y n'a qu'un g_8 A , il est le produit direct de Q par A , et X est le produit direct de Q par un g_{36} de Mathieu. Si Y a 3 g_8 , ils ont un g_4 non cyclique commun Δ , caractéristique dans Y , donc normal dans X , et ΔQ est le produit direct de $\Delta=\{b, c\}$ par $Q=\{a\}$. Y est défini par les équations de Δ , Q jointes à $d^2=1$, $db=bd$, $dc=cd$, $dad=a^2$. D'ailleurs $X|\Delta Q$, d'ordre 14, n'a qu'un g_7 auquel répond dans X un $g_{7.12}$ contenant un seul g_7 $S=\{s\}$. Ainsi $sa=as$, $d s d=s^{-1}$, et (en prenant au besoin bd pour b , cd pour c) $sb=bs$, $sc=cs$.

Pour le cas $\pi \neq p$, je prouverai seulement que $\psi(2, 3^2)$ est le seul g_{360} simple, le théorème précédent fournissant une démonstration plus simple que celle donnée par M. Cole ⁽¹⁾. Un g_{360} simple G a 10 ou 40 g_9 . Supposons-en 40. Comme 40 est $\not\equiv 1 \pmod 9$, les g_9 ne sont pas premiers entre eux deux à deux. Soit $\{a\}$ un g_3 divisant deux g_9 . Il en divisera $\nu \equiv 1 \pmod 3$ et le groupe A des éléments permutables à $\{a\}$ est d'ordre $k\nu 9$. G , n'étant pas représentable en moins de six symboles, n'a aucun diviseur d'indice < 6 . Donc $\nu=4$, $k=1$. Considérons G comme représenté en g^{10} relativement à A . a , n'entrant que dans 4 g_9 qui sont ceux de A , ne divise aucun conjugué de A et est par suite de degré 9. $A|\{a\}$ est un g_{12} ayant 4 g_3 (il est donc tétraédral) et un g_4 non cyclique. Donc A a un g_{12}^9 $B > \{a\}$ qui est abélien ou contient 3 g_4 non cycliques ayant un e_2 normal dans B . Cela étant, B ne peut avoir 3 systèmes d'intransitivité de degré 3; il devrait donc en avoir 1 de degré 6 et 1 de degré 3 et serait impair, ce qui ne se peut, G étant simple. Donc G a 10 g_9 . Considérons G comme représenté en g^{10} relativement au g_{36} A formé des éléments permutables au g_9 B . B , étant premier à tous ses conjugués (le raisonnement fait dans le cas précédent le montre), est de classe 9 et, par suite, transitif. B n'est pas cyclique, car le groupe des substitutions permutables à B dans le champ

(¹) *A. J.*, t. XV, 1893, p. 307.

de B serait d'ordre 54 non divisible par 36 . Donc $A = BC$, C étant un g_4 du groupe linéaire à 2 variables mod p , et, comme G est simple, donc pair, C est cyclique. Dès lors le g^{10} deux fois transitif où A est le g^9 fixant un symbole est $\mathfrak{O}(2, 3^2)$.

5. Cherchons à construire un $g_{\pi(\pi^2-1)}$ (π impair > 3) G dont un groupe facteur soit $\mathfrak{O}(2, \pi)$. Le groupe des isomorphismes I de $\mathfrak{O}$ est $\{\mathfrak{O}, (iz), (z^p)\}$ en sorte que $I | \mathfrak{O}$ est un groupe abélien engendré par deux générateurs indépendants d'ordres respectifs 2 et m . $\mathfrak{O}$ est donc unique de son type dans I, car si I contenait un groupe $\mathfrak{O}' \neq \mathfrak{O}$ et isomorphe à $\mathfrak{O}$, il contiendrait $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ et I | $\mathfrak{O}$ n'aurait pas le type indiqué. Il résulte dès lors d'un théorème de M. Hölder (*M. A.*, t. XLVI, p. 331) que, si m est pair, I a exactement trois $g_{\pi(\pi^2-1)}$ distincts non isomorphes qui sont $\mathcal{L}(2, \pi)$, $\{\mathfrak{O}, (z^{p^2})\} = \mathcal{L}'$, $\{\mathfrak{O}, (iz^{p^2})\} = \mathcal{L}''$. Si m est impair, I n'a qu'un $g_{\pi(\pi^2-1)}$ qui est $\mathcal{L}(2, \pi)$. G n'a pas d'autre type si sa seule suite de composition est G, $\mathfrak{O}$, 1.

Supposons que G admette la suite G, D, 1 ($D = \{d\}$, $d^2 = 1$; je supposerai les exposants de d réduits à 0 ou à 1). h, k, β parcourant les mêmes valeurs que précédemment et $\gamma_\beta = \gamma$ étant défini par $\beta\gamma \equiv \alpha$, G aura pour équations

$$\begin{aligned} a^{\frac{\pi-1}{2}} &= d^\alpha, & b_k^h &= d^{\delta_h}, & c^2 &= d^\gamma, & d^2 &= 1, & b_k^{-1} b_h b_k &= b_k d^{\mu_{hk}}, \\ a^{-1} b_h a &= b_{i^2 h} d^{\varphi_h}, & c^{-1} a c &= a^{-1} d^{\delta}, & c^{-1} b_\beta d^{\theta_\beta} c &= b_{\frac{-\chi^2}{\beta}} c a^{\gamma_\beta} b_{\frac{-\chi^2}{\beta}}, \\ da &= ad, & db_h &= b_h d, & dc &= cd. \end{aligned}$$

En prenant $b_h d^{\delta_h}$ pour b_h , on peut supposer ($b_k^{-1} b_h b_k$ et $a^{-1} b_h a$ étant alors, comme b_h , d'ordre p) que $\delta_h = \mu_{hk} = \varphi_h = 0$.

Si $\gamma = 0$, on a nécessairement $\delta = 0$. Cela est clair si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, car, a et $a^{-1} d$ n'étant pas alors du même ordre, on ne peut avoir $c^{-1} a c = a^{-1} d$. Soit donc $\pi \equiv 1 \pmod{4}$: Dc, dans la représentation de $G | D$ donnée au n° 3, sera représenté par $(r z^{-1})$, r étant un carré. La transformée de $(r z^{-1})$ par $\omega = \left(i r \frac{\xi z + \tau_1}{\tau_1 z + \xi r} \right)$ où $\xi^2 r - \tau_1^2 \equiv -ir$ est $(r z^{-1}) (i^2 z)$ qui correspond ici à Dca de $G | D$. ω étant dans $\mathfrak{O}(2, \pi)$, on voit que Dc et Dca sont conjugués dans $G | D$. Donc c est conjugué de ca ou de cad dans G, et, dans les deux cas, $(ca)^2 = 1$.

Si $\gamma = \delta = 1$, en posant $ca = c'$, on obtient $c'^2 = 1$, $c'^{-1}ac' = a^{-1}d$, $c'^{-1}b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}c' = b_{\frac{-x^2}{\beta}}c'ax^{+1}b_{\frac{ax^2}{\beta}}$, et l'on a bien $\beta i^{+1} = iz$, de sorte qu'en changeant x en iz on est ramené au cas impossible $\gamma = 0$, $\delta = 1$. Donc $\delta = 0$. On aura

$$a^{-1}c^{-1}b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}ca = b_{\frac{-x^2}{\beta}}cax^{+2}b_{\frac{-x^2}{\beta}} = c^{-1}b_{\beta i^{-2}}d^{\theta_{\beta i^{-2}}}c,$$

et, puisque $b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}$ et $b_{\beta i^{-2}}d^{\theta_{\beta i^{-2}}}$ sont du même ordre, il faut que $\theta_{\beta} = \theta_{\beta i^{-2}}$. Mais alors, changeant c en cd^{θ_1} , on aura, pour β carré, $c^{-1}b_{\beta}c = b_{\frac{-x^2}{\beta}}caxb_{\frac{-x^2}{\beta}}$.

Soit d'abord $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. On peut toujours, en prenant au besoin ad pour a , supposer $x = 0$. La formule précédente donne alors $c^{-1}b_{\frac{-x^2}{\beta}}c = d^{\gamma}b_{\beta}ca^{-x\beta}b_{\beta}$. Donc on n'aura que deux types :

l'un répondant à $\gamma = 0$ est le produit direct de $\mathcal{V}(2, \pi)$ par D , l'autre répondant à $\gamma = 1$ coïncide avec le groupe $U(2, \pi)$ des substitutions linéaires homogènes à deux variables de déterminant 1. Ce groupe U n'est pas un produit direct et l'on en a ainsi les équations $\pi \equiv 3 \pmod{4}$.

Soit $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. Prenons x carré; y sera pair pour β carré et impair pour β non carré. En prenant donc ad^{θ_1} pour a , on aura, quel que soit β , $c^{-1}b_{\beta}c = b_{\frac{-x^2}{\beta}}ca^{\beta}b_{\frac{-x^2}{\beta}}$. On peut donc supposer $\theta_{\beta} = 0$. Or, dans la représentation de $G|D$ en $g^{\pi+1}$ deux fois transitif du n° 3, $Dc = (rz^{-1})$, qui fixe les deux symboles $\pm r^{\frac{1}{2}}$, est une $s_2^{\pi-1}$. Comme $\{Da\}$ est le diviseur fixant $0, \infty$, toutes les $s_2^{\pi-1}$ sont conjuguées de $Da^{\frac{\pi-1}{4}}$.

Donc, dans G , c est conjuguée de $a^{\frac{\pi-1}{4}}$ ou de $a^{\frac{\pi-1}{4}}d$ et, ces deux éléments étant d'ordre 2^{x+1} , il faut que $\gamma = \delta = x$. On a donc encore deux types : l'un, répondant à $\gamma = x = 0$, est produit direct de $\mathcal{V}(2, \pi)$ par D ; l'autre, répondant à $\gamma = x = 1$, est $U(2, \pi)$ dont on a ainsi les équations pour $\pi \equiv 1 \pmod{4}$.

6. Prenons maintenant pour le groupe A du n° 1 le $g_{\pi q}$ engendré par $a = (i\gamma z)$ ($\gamma q = \pi - 1$) et par le même $g_{\pi}^{\pi} B$ que précédemment. A est défini par les équations de B jointes à $a^q = 1$, $a^{-1}b_h a = b_{\overline{h}}$. Cherchons à adjoindre à A une s_2 $c = (0x) \dots$

telle que, dans $G = \{A, c\}$, A soit le diviseur fixant ∞ . On aura $cac = a^x, x^2 = 1$.

Soit d'abord $x = 1$. Si alors q est pair, A contient une seule s_2 $a^{\frac{q}{2}}$ fixant 0 et ∞ , en sorte que G a $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)$ $s_2^{\pi-1}$ contenant $\frac{1}{4}\pi(\pi^2 - 1)$ cycles binaires. Or soient c et c' deux substitutions ayant le cycle (0∞) ; cc' sera dans $\{a\}$, soit $c' = ca^x$; et inversement ca^x a le cycle (0∞) . Chaque cycle binaire figurant ainsi dans q substitutions de G , les substitutions de G présentent $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)q$ cycles binaires. Donc $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)q$ est $\geq \frac{1}{4}\pi(\pi^2 - 1)$ et $q = \pi - 1$ ou $\frac{1}{2}(\pi - 1)$, ce qu'on a reconnu impossible.

Soit donc q impair. Alors, c , ne pouvant transformer en lui-même aucun cycle de a (la classe est $\pi - 1$), les échange deux à deux et est de degré $\pi + 1$. D'ailleurs c doit être paire, sans quoi les substitutions paires de G formeraient un diviseur G' dont le p. g. c. d. avec A serait d'indice 2 dans A , tandis que A est pair et divise G' . Donc $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ est pair et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. Ici encore toute substitution de G ayant le cycle (0∞) est de la forme ca^x , et parmi elles c est la seule s_2 [$c = (ca^x)^q$ étant de degré $\pi + 1$, il en est de même de ca^x]. Donc, G étant deux fois transitif, toutes ses s_2 sont conjuguées et au nombre de π [il y a $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)$ cycles binaires possibles, et chaque s_2 en a $\frac{1}{2}(\pi + 1)$]. Donc c , par exemple, est normale dans un $g_{(\pi+1)q} \mathcal{C}'$. D'ailleurs, G a $\pi^2 - 1$ s_p^{π} du type de b fixant un seul symbole, $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)(q - 1)$ $s_{q'}^{\pi-1}$ (q' divisant q) conjuguées de a^x ($a^x \neq 1$) fixant deux symboles, $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)(q - 1)$ $s_{2q'}^{\pi+1}$ conjuguées de ca^x . Les $\pi + 1$ substitutions restantes qui sont les s_2 doivent être contenues dans $\mathcal{C}'$ et de même dans chaque conjugué de $\mathcal{C}'$. Donc les s_2 sont permutables entre elles et forment avec l'unité un $g_{\pi+1} \mathcal{C} = \{c_0, \dots, c_{\pi-1}\}$ ($c_0 = c$) normal dans G (c'est le p. p. c. m. de $e_{(\pi+1)}$). Donc $\pi + 1$ est de la forme 2^n . Le procédé de démonstration précédent est emprunté à Frobenius (*S. A. B.*, 1902, p. 364), qui s'en est servi pour le cas $\pi = p$.

Je dis maintenant que $\pi = p$. Soit en effet ν l'exposant auquel appartient $2 \pmod{p}$. On aura $n = k\nu$ et, $2^{k\nu} - 1$ étant divisible par $2^\nu - 1$, $2^\nu - 1$ a la forme p^μ et $p^m = \Sigma_1^k \binom{k}{r} p^{r\mu}$. Soit $k = p^x l$, $r = p^y s$ (l, s premiers à p) : pour $r < p^x$, $\binom{k}{r} p^{r\mu}$ est divisible par $p^{r\mu+x-p}$ (voir JORDAN, *Traité*, p. 127) qui est $> p^{\mu+x}$ si r

est > 1 ; pour $r \geq p^x$, p^{rp} est $> p^{p+x}$ si $x > 0$. Donc $\Sigma_1^k(\frac{k}{p})p^{rp}$ et, par suite, p^m est congru à $p^{p+x}l \bmod p^{p+x+1}$. Donc $k = 1$, $v = n$, $\mu = m$. De plus, m est impair, sans quoi $p^m + 1$ serait $\equiv 2 \bmod 8$. Enfin $m = 1$, sans quoi $p + 1$, divisant $p^m + 1$, serait de la forme $2^{n'} (n' < n)$ et 2 appartiendrait à l'exposant n' . Donc $\pi = p = 2^n - 1$. Donc n est premier et q divise $2^{n-1} - 1$.

Ces conditions sont suffisantes. En effet, $\mathcal{C}$ étant normal dans $\mathcal{G} = A\mathcal{C}$, A divise le groupe linéaire $L(n, 2)$ à n variables mod 2 qui est d'ordre Kpq (K premier à p); donc, $B = \{b\}$ étant un g_p quelconque de L et a une s_q d'ordre impair permutable à $B^{(1)}$, on peut prendre $\{a, b\}$ pour A , et, une fois A choisi, $\mathcal{G}$ n'a qu'une détermination qui est $A\mathcal{C}$. Les équations de $\mathcal{G}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{\mathcal{C}, b\} = \{b, c\}$ sous la forme donnée (avec d'autres notations) au n° 3 ou sous la forme donnée dans le Mémoire déjà cité ⁽²⁾ [j étant une racine primitive du corps galoisien C_{2^n} d'ordre 2^n et t parcourant C_{2^n} , on peut écrire $b = (jt) = (j^z, j^{z+1})$, $a = (j^z, j^{i^z})$, $c = (1 - t)$] les équations $a^q = 1$, $a^{-1}ba = b^{i^z}$, $ac = ca$ (d'où $a^{-1}c_xa = ca_{xi^z}$ en posant $c_x = b^{-x}cb^x$).

On va voir que $q = 1$ ou n , en sorte que, si l'on fait abstraction du cas $q = 1$, $\mathcal{G}$ est complètement déterminé pour tous les nombres premiers de la forme $2^n - 1$. Comme $q = n$ divise $2^{n-1} - 1$, on retrouve ce résultat que, si $q = \frac{1}{2}(p - 1)$, on a $p = 7$.

Représentons désormais $\mathcal{G}$ par les symboles de C_{2^n} , $A = \{a, b\}$ fixant 0 , $\{a\}$ fixant $0, 1$ et cherchons à adjoindre à $\mathcal{G}$ une s_2 , $d = (t, \varphi t) = (1)(0\infty) \dots$, telle que, dans $\{\mathcal{G}, d\} = \mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ soit le diviseur fixant ∞ . Il faudra que $dbd = b^{-1}$, $da = ad$ (dad doit transformer dbd en $db^{i^z}d$) et que $(cd)^3$ soit dans $\{a\}$. La première condition donne $\varphi t = j\varphi(jt)$ ($t \not\equiv 0$), d'où, en multipliant les équations répondant à $t = 1, j, \dots, j^z = \zeta$, $\varphi\zeta \equiv h\zeta^{-1} \bmod 2$ ($h \equiv i^{-1}\varphi 1$). La troisième, en écrivant que $(cd)^3$ fixe 0 et 1 , donne

⁽¹⁾ L a toujours hors de B des éléments $\neq 1$ permutables à B , et il y en a d'ordre impair, sans quoi $\frac{1}{2}(p - 1)$ étant impair, L serait impair et aurait un diviseur normal d'indice 2, tandis que ses facteurs de composition sont p et $(U, 1)$.

⁽²⁾ *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 263.

$h \equiv 1$ et devient $(cd)^3 = 1$. La deuxième donne $z(j^iz) = z(j^z)^i$, d'où $h^{i^{n-1}} \equiv 1$ qui est une identité si $q = 1$ et qui redonne $h \equiv 1$ (puisque $h^{2^{n-1}} \equiv h^p \equiv 1$) si $q > 1$. Les substitutions b, c, d sont les générateurs de $\mathcal{L}(2, 2^n) = \mathcal{V}(2, 2^n)$ dont elles vérifient les équations, et, comme les équations de $\mathcal{K}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{b, c, d\}$ $a^q = 1, a^{-1}ba = b^i, ca = ac, da = ad$, $\mathcal{K}$ contient normalement $\mathcal{L}$. Or $\mathcal{K}$ divise le groupe J des isomorphismes de $\mathcal{L}$ qui est d'ordre $2^n(2^{2^n} - 1)n$ et n est premier. Donc $q = 1$ ou n et $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ ou J.

Soit maintenant $\alpha = -1$. On a certainement une solution pour $\mathcal{G}$ en prenant $c = (r z^{-1})$, car on obtient alors, comme au n° 3 (voir le Mémoire cité), $cb_{\beta}c = b_r, ca^r b_r (i^r \beta^2 = -r)$, et ces équations jointes à celles de A définissent $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ est toujours d'indice γ dans $\mathcal{L}(2, \pi)$. Si donc γ est impair, $\gamma = 1$, sans quoi le p. g. c. d. de $\mathcal{G}, \mathcal{V}(2, \pi)$ serait d'indice γ dans $\mathcal{V}$, et γ , qui divise $\pi - 1$, devrait être égal à $\pi + 1$ ou à π (ou à 6 si $\pi = 9$; mais 6 ne divise pas 8). Si γ est pair (donc π impair), $\mathcal{G}$ est d'indice $\frac{\gamma}{2}$ dans $\mathcal{V}(2, \pi)$ et l'on voit de même que $\gamma = 2$.

Les résultats précédents complètent et étendent au cas où m est > 1 les résultats partiels obtenus par M. Frobenius (*loc. cit.*) pour $m = 1$. On en déduit aisément aussi une nouvelle démonstration du théorème suivant, établi par le même géomètre à l'aide de la théorie des caractères :

Un $g_{pq(1+q)}^p$ G ayant exactement $1 + p$ g_p est nécessairement un des groupes $\mathcal{L}(2, 5), \mathcal{V}(2, 5), \mathcal{V}(2, 7), \mathcal{V}(2, 11)$.

En effet, le p. p. c. m. M d'ordre $pq'(1+p)$ des g_p de G est simple ⁽¹⁾. Il est donc représentable en g^{p+1} et coïncide avec $\mathcal{V}(2, p)$. Donc $q' = \frac{1}{2}(p-1)$ ou $p-1$ et de même q . Si donc G est $\neq \mathcal{V}$ et n'est pas le produit direct de $\mathcal{V}$ par un g_2 , il coïncide avec $\mathcal{L}(2, p)$. Mais $\mathcal{V}(2, p)$ n'est représentable en g^p que pour $p = 5, 7, 11$ et $\mathcal{L}(2, p)$ ne l'est que pour $p = 5$, ce qui démontre le théorème.

(1) MILLER, *P. L. M. S.*, t. XXXI, 1899, p. 148.

SUR LES SÉRIES A TERMES CONTINUS ET TOUS DE MÊME SIGNE :

Par M. RENÉ BAIRE.

1. Je me propose de démontrer le théorème suivant, qui, à cause de la simplicité de son énoncé, me paraît présenter un certain intérêt.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série dont les termes sont des fonctions continues et sont, à partir d'un certain rang, tous de même signe, est qu'elle soit semi-continue, supérieurement dans le cas des termes négatifs, inférieurement dans le cas des termes positifs (1).

Je me bornerai, pour simplifier, au cas d'une seule variable, et j'étudierai le cas où les termes de la série finissent par être tous *négatifs* (ou nuls). En réunissant au besoin en un seul terme un certain nombre de termes au commencement de la série, on peut supposer que tous les termes sont négatifs ou nuls à partir du *second*. Cela étant, si f_v est la somme des v premiers termes, la suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_v, \dots$ ne va jamais en croissant, c'est-à-dire qu'on a, quel que soit x ,

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_v(x) \geq \dots \geq f(x),$$

f étant la somme de la série.

2. Le fait que la condition de l'énoncé est nécessaire est un cas particulier du théorème suivant :

Si une suite de fonctions semi-continues supérieurement $f_1, f_2, \dots, f_v, \dots$ a une limite f , avec la condition qu'on ait, quels que soient x et v ,

$$f_v(x) \geq f(x),$$

f est aussi semi-continue supérieurement.

(1) $f(x)$ est dite *semi-continue supérieurement* si, quel que soit x_0 et quel que soit $\varepsilon > 0$, pour toutes les valeurs d'un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

En effet, soit x_0 une valeur de x , et soit $\varepsilon > 0$. Comme on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x_0) = f(x_0),$$

on peut trouver p entier tel que

$$f_p(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Comme f_p est semi-continue supérieurement, on a, quand x est dans un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$,

$$f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon$$

et, par suite,

$$f(x) \leq f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon < f(x_0) + 2\varepsilon.$$

La condition

$$f(x) < f(x_0) + 2\varepsilon$$

exprime que f est semi-continue supérieurement.

Les conditions de cet énoncé sont évidemment vérifiées dans le cas où les f_ν sont continues et ne vont pas en croissant, ce qui démontre que la condition du théorème du § 1 est nécessaire.

3. Reste à démontrer la réciproque. Soit f une fonction semi-continue supérieurement. J'ai donné, dans une Note parue dans ce Bulletin en 1900 (*Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues*, § 1 et § 4), un moyen de former simplement une suite de fonctions continues tendant vers f . Je reprends l'exposé de cette méthode dans le cas d'une variable.

Soit f définie dans l'intervalle $(0, 1)$. Je définis f_ν comme il suit : pour chaque nombre de la forme $\frac{\alpha}{2^\nu}$ (α entier), f_ν est égale au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^\nu}, \frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$. Dans l'intervalle qui a pour extrémités deux nombres consécutifs de cette forme, f_ν varie linéairement.

La suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots$ tend vers f . Car, soit x_0 une valeur de x , et soit $\varepsilon > 0$; f étant semi-continue supérieurement, il y a un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ dans lequel on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

ν étant donné, soit α l'entier tel que

$$\frac{\alpha}{2^\nu} \leq x_0 < \frac{\alpha+1}{2^\nu};$$

$f_\nu(x_0)$ est compris entre $f_\nu\left(\frac{\alpha}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, qui sont respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\alpha-1}{2^\nu}, \frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{2^\nu}, \frac{\alpha+2}{2^\nu}\right)$; ces intervalles, qui contiennent tous deux x_0 , sont, dès que ν dépasse une certaine valeur, contenus en entier dans $(x_0 - h, x_0 + h)$. A partir de ce moment, les maxima en question sont compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0) + \varepsilon$; il en est donc de même pour $f_\nu(x_0)$.

Ainsi l'on a, quel que soit x ,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$$

et de plus, quel que soit ν ,

$$f_\nu(x) \geq f(x).$$

Mais je dis qu'on a, en outre,

$$f_\nu(x) \geq f_{\nu+1}(x).$$

Pour que cette inégalité soit démontrée pour toutes les valeurs de x , il suffit, si l'on tient compte de ce fait que f_ν et $f_{\nu+1}$ sont linéaires dans tout intervalle $\left(\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ (α entier), de la vérifier lorsque x est de la forme $\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}$.

Plaçons-nous dans ce cas, qui se subdivise en deux :

$$1^\circ \alpha \text{ est pair} = 2\beta; \quad x = \frac{\alpha}{2^{\nu+1}} = \frac{\beta}{2^\nu}.$$

$f_\nu(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\beta-1}{2^\nu}, \frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$
ou $\left(\frac{\alpha-2}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+2}{2^{\nu+1}}\right)$.

$f_{\nu+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ qui est contenu dans le précédent.

On a donc bien

$$f_{\nu+1}(x) \leq f_\nu(x).$$

$2^\nu \alpha$ est impair $= 2\beta + 1$; $x = \frac{\alpha}{2^{\nu+1}} = \frac{2\beta + 1}{2^{\nu+1}}$.

$f_\nu(x)$ est égal à la demi-somme des nombres $f_\nu\left(\frac{\beta}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\beta + 1}{2^\nu}\right)$, respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\beta - 1}{2^\nu}, \frac{\beta + 1}{2^\nu}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{2^\nu}, \frac{\beta + 2}{2^\nu}\right)$.

$f_{\nu+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha - 1}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha + 1}{2^{\nu+1}}\right)$ ou $\left(\frac{\beta}{2^\nu}, \frac{\beta + 1}{2^\nu}\right)$ qui est contenu dans chacun des deux précédents.

Donc $f_{\nu+1}(x)$ est inférieur ou égal aux nombres $f_\nu\left(\frac{\beta}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\beta + 1}{2^\nu}\right)$ et aussi à leur demi-somme $f_\nu(x)$, ce qui vérifie la condition indiquée.

Il est ainsi établi qu'une fonction semi-continue supérieurement peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions continues allant en décroissant, ou encore comme la somme d'une série de fonctions continues à termes tous négatifs à partir du second. De même une fonction semi-continue inférieurement est la somme d'une série à termes continus et tous positifs à partir du second.

Ces résultats s'étendent au cas de n variables, en utilisant les méthodes indiquées aux § 1 et 4 de la Note citée, et introduisant dans les démonstrations qui précèdent des modifications évidentes.

On a ainsi un procédé de représentation *qui est spécial aux fonctions semi-continues*.

LES SIX ÉQUATIONS DISTINCTES DU TRIANGLE EN MÉTRIQUE ANINVOLUTIVE;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Les principes de la Métrique aninvolutive ont été exposés en 1892 dans un Ouvrage ayant pour titre : *L'hyperespace*; un résumé de ces principes a paru dans ce *Bulletin*, t. XXVI, p. 176, en ce qui concerne l'espace ordinaire.

En se bornant à la Géométrie plane, les éléments métriques que considère la Métrique aninvolutive sont relatifs à deux coniques F et φ doublement tangentes. Étant donnés deux points A

et B, la droite AB coupe la conique F en deux points F', F'', et, si l'on désigne par R le rapport anharmonique (A, B, F', F''), on appelle *pseudo-distance* des deux points A et B la quantité

$$\overline{AB} = \frac{1}{2i} \log R;$$

le *pseudo-angle* de deux droites α et β se définit d'une manière corrélatrice, en considérant cette fois la conique φ . Si l'on suppose que F et φ sont deux ellipses imaginaires, dont les équations ont des coefficients réels, les quantités R et ρ sont des imaginaires de module 1, et l'on a, par exemple, avec $\overline{AB}$ réel,

$$\begin{cases} \cos \overline{AB} + i \sin \overline{AB} = e^{i\overline{AB}} = \sqrt{R}, \\ \cos \overline{AB} - i \sin \overline{AB} = e^{-i\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \end{cases}$$

ou

$$\frac{i \sin \overline{AB}}{R - 1} = \frac{\cos \overline{AB}}{R + 1} = \frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

On définit alors pour chaque droite un paramètre spécial T, pour chaque point un paramètre spécial θ , et l'on pose par exemple

$$\sigma(A, B) = \frac{\sin \overline{AB}}{\sin T},$$

$$\gamma(A, B) = \frac{\sin(T - \overline{AB})}{\sin T}, \quad \gamma(B, A) = \frac{\sin(T + \overline{AB})}{\sin T},$$

d'où il suit que l'on a

$$\sigma^2(A, B) = 1 - \gamma(A, B) \times \gamma(B, A);$$

on pose encore

$$\frac{1}{\tau}(A, B) = \frac{\gamma(A, B)}{\sigma(A, B)}, \quad \frac{1}{\tau}(B, A) = \frac{\gamma(B, A)}{\sigma(B, A)},$$

les deux σ étant de signes contraires. On définit de même les quantités $\sigma(\alpha, \beta)$, ...

Le caractère essentiel de la Métrique aninvolutrice est de considérer les figures en position. La Métrique de Cayley et Klein n'est

qu'une transformation homographique de la Métrique de Lobatchefsky, et le fait que les éléments métriques des figures dépendent de leur position disparaît par réduction à la Métrique aneuclidienne; une réduction analogue n'a pas lieu par la Métrique aninvolutive, fondée sur la considération de *deux* coniques F et φ . L'existence d'un paramètre spécial T pour chaque droite, d'un paramètre spécial θ pour chaque point, fait d'ailleurs du plan dans lequel on opère un être géométrique non homogène. En Métrique ordinaire, tous les paramètres ont la valeur commune $\frac{\pi}{2}$; les σ sont alors des sinus de pseudo-distances ou de pseudo-angles, les γ sont des cosinus, les $\frac{1}{\gamma}$ sont des cotangentes.

2. Il existe une simple infinité de figures ayant les mêmes éléments métriques relativement aux deux coniques F et φ ; une transformation homographique permet en effet de réduire ces deux coniques à un système de deux cercles concentriques. Voyons quelles sont les conséquences de ce fait pour un triangle.

Soit un triangle ABC , dont les côtés sont portés par les axes α , β , γ ; les éléments métriques fondamentaux sont au nombre de douze : trois pseudo-distances, trois pseudo-angles, trois paramètres T , trois paramètres θ ; ou encore : six comoments tels que $\gamma(B, C)$, $\gamma(C, B)$, auxquels se rattachent trois quantités $\sigma(B, C)$, et, d'autre part, six comoments tels que $\gamma(\beta, \gamma)$, $\gamma(\gamma, \beta)$, ... Comme un triangle dépend de six paramètres, il suit de ce qu'on a vu plus haut que cinq éléments métriques d'un triangle suffisent à déterminer tous les autres; il existe donc sept relations distinctes entre les douze éléments fondamentaux d'un triangle. Je ne puis démontrer ici que l'une de ces relations contient une constante remarquable, que l'on doit regarder comme étant le paramètre spécial du plan dans lequel on opère; cette relation est d'une forme assez compliquée quand on la considère comme ayant lieu entre les six paramètres relatifs au triangle et la constante du plan; je n'ai pas essayé de l'écrire avec les γ et la constante. Je la laisserai entièrement de côté, et *je donnerai quatre groupes équivalents de six relations entre les douze éléments γ .*

En écrivant pour chaque groupe une seule des six relations qui

le composent, on a d'abord

$$(I) \quad \gamma(B, C) = \gamma(B, A) \times \gamma(A, C) = \tau(B, A) \tau(A, C) \times \gamma(\gamma, \beta),$$

$$(II) \quad \gamma(\beta, \gamma) = \gamma(\beta, \alpha) \times \gamma(\alpha, \gamma) = \tau(\beta, \alpha) \tau(\alpha, \gamma) \times \gamma(C, B);$$

comme extension de la formule de Trigonométrie sphérique

$$\sin b \cot a = \sin C \cot A = \cos b \cos C,$$

où l'on considère les éléments a, A, b, C (avec les angles extérieurs), on a encore

$$(III) \quad \tau(C, A) \frac{1}{\tau} (C, B) = (\tau \beta, \alpha) \frac{1}{\tau} (\beta, \gamma) = \gamma(C, A) \gamma(\beta, \alpha),$$

$$(IV) \quad \tau(A, C) \frac{1}{\tau} (B, C) + \tau(\alpha, \beta) \frac{1}{\tau} (\gamma, \beta) = \gamma(A, C) \gamma(\alpha, \beta).$$

On a aussi

$$(V) \quad \frac{\tau(B, C)}{\tau(\beta, \gamma)} = \frac{\tau(C, A)}{\tau(\gamma, \alpha)} = \frac{\tau(A, B)}{\tau(\alpha, \beta)},$$

les trois rapports étant de même signe par hypothèse.

3. Nous adopterons ici les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(B, C) = a, \\ \tau(C, A) = b, \\ \tau(A, B) = c, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(B, C) = a', \\ \gamma(C, A) = b', \\ \gamma(A, B) = c', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(C, B) = a'', \\ \gamma(A, C) = b'', \\ \gamma(B, A) = c'', \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(\beta, \gamma) = A, \\ \tau(\gamma, \alpha) = B, \\ \tau(\alpha, \beta) = C, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\beta, \gamma) = A', \\ \gamma(\gamma, \alpha) = B', \\ \gamma(\alpha, \beta) = C', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\gamma, \beta) = A'', \\ \gamma(\alpha, \gamma) = B'', \\ \gamma(\beta, \alpha) = C'', \end{array} \right.$$

on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 1 - a' a'', \\ b^2 = 1 - b' b'', \\ c^2 = 1 - c' c'', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 = 1 - A' A'', \\ B^2 = 1 - B' B'', \\ C^2 = 1 - C' C'', \end{array} \right.$$

et, par hypothèse, les trois rapports $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}$ sont de même signe.

On a alors les quatre groupes de formules

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \begin{cases} (1) & a'' = b'c' - bcA', \\ (2) & b'' = c'a' - caB', \\ (3) & c'' = a'b' - abC', \end{cases} & \begin{cases} (1') & a' = b''c'' - bcA'', \\ (2') & b' = c''a'' - caB'', \\ (3') & c' = a''b'' - abC''; \end{cases} \\
 \text{(II)} \quad & \begin{cases} (1) & A'' = B'C' - BCa', \\ (2) & B'' = C'A' - CA b', \\ (3) & C'' = A'B' - AB c', \end{cases} & \begin{cases} (1') & A' = B''C'' - BCa'', \\ (2') & B' = C''A'' - CA b'', \\ (3') & C' = A''B'' - AB c''; \end{cases} \\
 \text{(III)} \quad & \begin{cases} (1) & b \frac{a''}{a} + C \frac{A'}{A} = -b' C'', \\ (2) & c \frac{b''}{b} + A \frac{B'}{B} = -c' A'', \\ (3) & a \frac{c''}{c} + B \frac{C'}{C} = -a' B'', \end{cases} & \begin{cases} (1') & c \frac{a'}{a} + B \frac{A''}{A} = -c'' B', \\ (2') & a \frac{b'}{b} + C \frac{B''}{B} = -a'' C', \\ (3') & b \frac{c'}{c} + A \frac{C''}{C} = -b'' A'; \end{cases} \\
 \text{(IV)} \quad & \begin{cases} (1) & b \frac{a'}{a} + C \frac{A''}{A} = -b'' C', \\ (2) & c \frac{b'}{b} + A \frac{B''}{B} = -c'' A', \\ (3) & a \frac{c'}{c} + B \frac{C''}{C} = -a'' B', \end{cases} & \begin{cases} (1') & c \frac{a''}{a} + B \frac{A'}{A} = -c' B'', \\ (2') & a \frac{b''}{b} + C \frac{B'}{B} = -a' C'', \\ (3') & b \frac{c''}{c} + A \frac{C'}{C} = -b' A''. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On passe des formules de gauche à celles de droite en permutant par exemple b et c , B et C , et échangeant les accents (') et (''); le groupe (III) est son propre corrélatif, les formules (1) et (1') se correspondant.

On a encore

$$\text{(V)} \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{abc}{\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{ABC} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}},$$

en posant

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & c' & b'' \\ c'' & 1 & a' \\ b' & a'' & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & C' & B'' \\ C'' & 1 & A' \\ B' & A'' & 1 \end{vmatrix},$$

et en disposant des signes des deux radicaux; ces formules sont analogues aux formules de Trigonométrie euclidienne

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = \frac{\left(\frac{S}{R}\right)}{\sin A \dots} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{R}\right)}.$$

4. Pour établir l'équivalence des groupes de formules (I) et (II), montrons par exemple que les formules (I) donnent les formules (II). En vertu des formules (I), le déterminant adjoint au déterminant δ est

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab C' & ac B'' \\ ba C'' & b^2 & bc A' \\ ca B' & cb A'' & 1 \end{vmatrix}.$$

La considération des trois mineurs relatifs aux éléments a^2 , b^2 , c^2 donne d'abord l'égalité des quatre premiers rapports (V); le mineur relatif à l'élément $bc A'$ donne ensuite

$$a^2 bc (B' C' - A'') = a' \times \delta$$

ou

$$B' C' - A'' = a' \times \frac{\sqrt{\delta}}{ac} \times \frac{\sqrt{\delta}}{ab} = a' \times BC.$$

On peut encore faire la démonstration en se limitant aux trois premiers des rapports (V). Les formules (1) et (1'), (2) et (2') du groupe (I) donnent

$$c^2 (b^2 A' A'' - a^2 B' B'') = (a' a'' - b' b'') (1 - c' c'') = (b^2 - a^2) c^2$$

ou

$$a^2 B^2 = b^2 A^2;$$

les trois premiers rapports (V) sont donc égaux, étant donnée l'hypothèse faite sur les signes. Si l'on élimine alors c' entre les formules (1) et (3') du groupe (I), on a

$$bc A' = b' (a'' b'' - ab C'') - a'' = -b' ab C'' - a'' b^2,$$

ou

$$c A' = -ab' C'' - a'' b,$$

ou encore

$$CA' = -A b' C'' - a'' B;$$

l'élimination de c'' entre (1') et (3) donne de même

$$CB'' = -B a'' C' - b' A;$$

si l'on élimine b' entre ces deux formules, ce qui se fait en les ajoutant après avoir multiplié la seconde par $-C''$, on obtient

$$C(A' - B'' C'') = -a'' B(1 - C' C'') = -a'' B C^2,$$

ce qui donne la formule (1') du groupe (II). Ce dernier calcul n'est

que l'extension d'un calcul bien connu de Trigonométrie sphérique. (Cf. par exemple Briot et Bouquet.)

3. Pour passer du groupe (I) au groupe (III), reprenons la formule

$$cA' = ab'G'' - a''b,$$

fournie par l'élimination de c' entre (1) et (3') de (I); si l'on divise par a , et si l'on remplace $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$, on obtient la première des formules (III).

Inversement, pour passer du groupe (III) au groupe (I), éliminons G'' entre les formules (1) et (3') du groupe (III) écrites ainsi :

$$\frac{b}{a} a'' = -\frac{C}{A} A' - b' G'', \quad \frac{b}{c} c' = -b'' A' - \frac{A}{C} G'';$$

si l'on ajoute ces formules, après avoir multiplié la première par $\frac{A}{C}$, la seconde par $-b'$, on obtient

$$\frac{b}{a} \frac{A}{C} a'' - \frac{b}{c} b' c' = -A' b^2,$$

ou, en multipliant par $\frac{c}{b}$,

$$\frac{c}{a} \frac{A}{C} a'' - b' c' = -A' bc;$$

ce sera la première formule du groupe (I), si l'on peut remplacer $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$. Il resterait donc à déduire des formules (III) l'égalité des trois premiers rapports (V); je n'ai pas réussi à faire ce calcul d'une manière simple.

Si l'équivalence des groupes (III) et (IV) était établie directement, on déduirait facilement de l'ensemble de ces deux groupes les égalités en question. En divisant par C la formule (1) du groupe (III) et la formule (2') du groupe (IV), et en éliminant $\frac{1}{C}$, on a facilement

$$a^2 b'' \frac{A'}{A} - b^2 a'' \frac{B'}{B} + (a^2 - b^2) \frac{C''}{C} = 0$$

ou

$$a^2 \left(b'' \frac{A'}{A} + \frac{C''}{C} \right) = b^2 \left(a'' \frac{B'}{B} + \frac{C''}{C} \right);$$

les formules (3') du groupe (III) et (3) du groupe (IV) donnent alors

$$a^2 \frac{bc'}{CA} = b^2 \frac{ac'}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$

SUR LES TÉTRAÈDRES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DES QUADRIQUES;

Par M. G. HUMBERT.

1. On se propose, dans ce travail, d'examiner s'il existe un théorème analogue à celui de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique par leurs sommets et circonscrits à une ou deux autres par leurs faces.

2. Tout d'abord on reconnaît aisément qu'il y a toujours une infinité quadruple de tétraèdres inscrits à une quadrique, A, et circonscrits à une autre, B, choisie au hasard; et ce résultat concorde avec celui que donne *a priori* la comparaison du nombre des paramètres avec celui des équations.

Mais en ce cas le tétraèdre *ne se ferme pas* toujours, c'est-à-dire que, si l'on se donne au hasard trois faces d'un tétraèdre, pourvu qu'elles touchent B et que leur point commun soit sur A, la quatrième face, qui est évidemment déterminée, ne touche pas nécessairement B. Pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que le tétraèdre se ferme toujours, il est évidemment nécessaire et suffisant que les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B soient en nombre *cinq fois infini*. D'ailleurs ils ne peuvent, en aucun cas, être en nombre six fois infini.

Dès lors, pour généraliser le théorème de Poncelet, il faudra rechercher à quelles conditions les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B formeront une série quintuplement infinie.

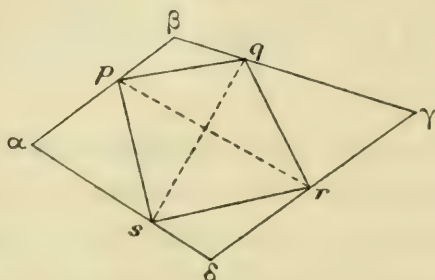
Avant d'énoncer le théorème qui donne la solution de ce problème, nous établirons un lemme préliminaire :

3. LEMME I. — Soient A et B deux surfaces du second ordre quadritangentes; désignons par m un point quelconque de A, par C le cône de sommet m circonscrit à B, par Π un plan quelconque tangent à B : je dis que Π coupe A et C suivant deux coniques telles qu'on puisse inscrire à la première un triangle circonscrit à la seconde.

Soient en effet (*fig. 1*) $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère qui est la perspective sur le plan Π , à partir du point m , du quadrilatère gauche que forment dans l'espace les quatre génératrices communes à A et à B; le plan Π coupe les quatre faces de ce quadrilatère gauche suivant les droites pq , qr , rs , sp , qui forment évidemment un quadrilatère inscrit au quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (¹).

Cela posé, observons que le cône C (de sommet m) coupe Π suivant une conique, qui touche les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ et

Fig. 1.



les deux droites pr et qs ; car : 1° les côtés de $\alpha\beta\gamma\delta$ sont la perspective sur Π , à partir de m , de quatre génératrices de la quadrique B à laquelle C est circonscrit; 2° les droites pr et qs sont les deux génératrices suivant lesquelles le plan Π coupe la quadrique B à laquelle il est tangent.

D'un autre côté, la quadrique A coupe Π suivant une conique qui passe par les points p , q , r , s , et aussi par le point de rencontre de $\alpha\beta$ avec $\delta\gamma$: car une des génératrices de la quadrique A issues du point m s'appuie sur les deux génératrices qui ont pour perspective, à partir de ce point, les droites $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$; elle coupe donc le plan Π au point d'intersection de ces deux droites.

Dès lors, le triangle dont les côtés sont $\alpha\beta$, pr et $\delta\gamma$ est inscrit à la conique section de A par Π ; et il est circonscrit à la conique section de C par Π , ce qui établit le lemme.

4. THÉORÈME I. — *Étant données deux surfaces du second ordre, A et B, quadritangentes, il existe un infinié quintuple*

(¹) Il est clair, de plus, que les droites pq et sr se coupent sur la diagonale $\alpha\gamma$, et les droites ps et qr sur la diagonale $\beta\delta$; mais cette remarque nous sera inutile.

de tétraèdres inscrits à l'une par leurs sommets et circonscrits à l'autre par leurs faces.

Sous une autre forme :

De quelque façon qu'on commence et qu'on poursuive la construction d'un tétraèdre, inscrit à A et circonscrit à B, la construction aboutira toujours.

Réciproquement, cette propriété n'appartient à deux quadriques que si elles sont quadritangentes.

5. Démontrons d'abord la proposition directe.

En vertu du lemme I et du théorème de Poncelet, il existe une infinité simple de triangles dans le plan Π , inscrits à la section de A et circonscrits à la section de C par ce plan ; sous une autre forme, il existe une infinité simple de trièdres circonscrits au cône C et dont les arêtes s'appuient sur la conique section de A par Π . Observons maintenant que les faces de ces trièdres touchent la quadrique B, à laquelle le cône C est circonscrit à partir de m : nous pouvons dire, en considérant le tétraèdre formé par un des trièdres et par le plan Π , qu'il y a une infinité *simple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B, ayant pour sommet un point *quelconque*, m , de A et pour face opposée un plan tangent *quelconque*, Π , de B ; donc une infinité *quintuple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B.

De quelque façon qu'on choisisse trois faces d'un tétraèdre, pourvu, bien entendu, qu'elles touchent B et qu'elles se coupent sur A (en un point m), le tétraèdre pourra s'achever : car, d'après ce qui précède, il y a une *triple* infinité de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B ayant m pour sommet, c'est-à-dire qu'on peut choisir arbitrairement les trois faces qui passent par m , pourvu qu'elles touchent B ; ces trois faces se coupent deux à deux suivant trois arêtes, lesquelles rencontrent de nouveau A en des points m_1, m_2, m_3 , et le plan de ces trois points est nécessairement tangent à B.

6. COROLLAIRE I. — *De même, si m_1, m_2, m_3 sont trois points quelconques de A situés dans un même plan tangent de B, les*

nouveaux plans tangents menés à B par les trois droites $m_1, m_2, m_1, m_3, m_2, m_3$ se coupent en un point situé sur A.

7. COROLLAIRE II. — Soit m un point d'une quadrique A; les arêtes d'un trièdre quelconque de sommet m coupent de nouveau A en m_1, m_2, m_3 : toute quadrique, B, tangente aux trois faces du trièdre et quadritangente à A, touche le plan des trois points m_1, m_2, m_3 .

8. Cela posé, pour démontrer la réciproque de notre théorème général, établissons un second lemme.

9. LEMME II. — Soit toujours m un point de la quadrique A; désignons par C un cône quadrique quelconque de sommet m : je dis qu'il existe une quadrique, B, inscrite à C et quadritangente à A.

En effet, σ étant la biquadratique (de genre zéro) commune à C et à A, on sait qu'il y a quatre génératrices de A (p_1, p_2, p_3, p_4) tangentes à σ , respectivement en des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, lesquels sont situés dans un même plan Π_0 ⁽¹⁾ : les quatre génératrices p_i forment un quadrilatère gauche. Soit θ la conique section de C par Π_0 : il existe une quadrique, B, passant par les quatre génératrices p_i et par un point, α , choisi arbitrairement sur θ ; cette quadrique est quadritangente à A, puisqu'elle en contient quatre génératrices, je dis qu'elle est circonscrite à C. En effet, 1° elle contient la conique θ , puisqu'elle en contient cinq points, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α ; 2° son intersection avec le cône C touche évidemment les génératrices p_1, p_2, p_3, p_4 , aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, ce qui exige, puisqu'elle comprend déjà la conique θ , qu'elle se compose de cette conique comptée deux fois.

C. Q. F. D.

10. Supposons maintenant qu'il existe une infinité triple de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à une quadrique B', ayant pour un de leurs sommets un point m de A. Je dis que B' est quadritangente à A.

En effet, soit C le cône de sommet m circonscrit à B'; en vertu

(1) On vérifie ce résultat sans difficulté en partant de la représentation de la quadrique A sur un plan, à l'aide de projetantes issues de m .

de l'hypothèse, trois plans tangents quelconques de C déterminent un trièdre dont les arêtes percent de nouveau A en m_1, m_2, m_3 , et le plan m_1, m_2, m_3 , qui dépend évidemment de deux paramètres au moins, enveloppe la quadrique B' . D'un autre côté, en vertu du théorème direct et du lemme II, ce plan enveloppe une quadrique B inscrite au cône C et quadritangente à A ; B' coïncide donc avec B , ce qui établit la proposition, et la réciproque cherchée.

11. COROLLAIRE I. — *C étant un cône quadrique dont le sommet m est sur une quadrique A , il n'existe qu'une surface du second ordre quadritangente à A et inscrite à C .*

12. COROLLAIRE II. — Soient A et D deux quadriques quelconques. Considérons les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à D dont un sommet est le point m de A , et soit C le cône de sommet m circonscrit à D .

En vertu de ce qui précède, les faces des tétraèdres considérés qui sont opposées au sommet m touchent la quadrique B qui est inscrite à C et quadritangente à A ; par hypothèse elles touchent aussi la quadrique D . Or les quadriques B et D sont inscrites toutes deux au cône C ; leurs plans tangents communs forment donc deux séries : ceux de la première enveloppent le cône C et ceux de la seconde un autre cône Σ , dont je désigne le sommet par μ . En d'autres termes :

Les tétraèdres inscrits à une quadrique A , circonscrits à une quadrique D prise au hasard, et dont un sommet est un point m de A , forment évidemment un système doublement infini; les faces opposées au sommet m sont en nombre simplement infini, et passent toutes par un point fixe μ .

Réciproquement, tout plan passant par μ et tangent à D appartient, comme face, à une infinité simple des tétraèdres considérés.

13. Cherchons maintenant une extension analogue du théorème de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique et dont les faces touchent chacune deux autres quadriques : il nous sera plus commode d'étudier le problème réciproque, à savoir celui des tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche et dont les faces

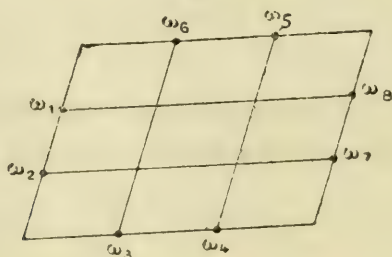
touchent une quadrique. *A priori*, il n'y a, en général, qu'un nombre limité de tels tétraèdres; et, en aucun cas, il ne peut en exister une triple infinité. Le cas intéressant et donc celui où les tétraèdres considérés seraient en nombre doublement infini; et voici, à ce sujet, le théorème fondamental que nous compléterons plus loin par une étude géométrique détaillée.

14. THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une infinité double de tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche, ω , et circonscrits à une quadrique, B, il suffit et il faut que huit génératrices de la quadrique soient des cordes de la biquadratique.*

Démontrons d'abord que la condition est suffisante.

15. En vertu de l'hypothèse, les huit points $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ où la biquadratique ω coupe B sont, deux à deux, sur huit génératrices de B, comme l'indique la figure schématique suivante (fig. 2).

Fig. 2.



Il en résulte que la quadrique A menée par ω et la corde $\omega_1\omega_2$ contiendra les cordes $\omega_3\omega_4$ et $\omega_5\omega_6$ qui s'appuient sur $\omega_1\omega_2$, et aussi la corde $\omega_7\omega_8$ qui s'appuie sur $\omega_3\omega_4$: cette quadrique A, contenant ainsi quatre génératrices de B, lui sera quadritangente.

De même la quadrique A', menée par ω et la corde $\omega_1\omega_8$, sera quadritangente à B, de sorte que la biquadratique ω sera l'intersection de deux quadriques, A et A', quadritangentes à B.

Cela posé, soit Π un plan tangent *quelconque* de B, coupant ω aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$: menons par les droites $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$ les trois plans, autres que Π , qui touchent B: ces plans, en vertu d'un corollaire précédent (n° 6) se coupent à la fois sur A et sur A', c'est-à-dire sur ω . Désignons par α'_4 leur point d'intersection: le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_4$ est inscrit à ω et circonscrit à B, et, comme le

plan $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ est un plan tangent quelconque, Π , de B, on obtient ainsi une infinité *double* de pareils tétraèdres. C. Q. F. D.

16. Étudions de plus près ces tétraèdres. D'abord, en groupant trois à trois les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, on obtient, par la méthode précédente, quatre nouveaux points, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$, de la biquadratique ω , et les quatre tétraèdres $\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha'_l$ (les indices i, j, k, l étant différents) sont inscrits à ω et circonscrits à B.

Dès lors les plans $\alpha_i \alpha_j \alpha_k, \alpha_i \alpha_j \alpha'_k, \alpha_i \alpha_j \alpha'_l, \alpha_i \alpha_j \alpha'_l$, sont tangents à B: comme il ne passe que deux tels plans par la droite $\alpha_i \alpha_j$, et que l'un d'eux est, par hypothèse, le plan des quatre points $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha'_l$, on en conclut que les quatre points $\alpha_i, \alpha_j, \alpha'_k, \alpha'_l$ sont dans un même plan, tangent à B.

Soient maintenant α_i et α'_i les arguments elliptiques, sur la biquadratique ω , des points α_i et α'_i , la représentation paramétrique étant supposée telle que les arguments de quatre points de ω , situés dans un même plan, aient une somme nulle. On aura entre les α_i et α'_i les sept relations

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l = 0, \quad \alpha_i + \alpha_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0,$$

i, j, k, l étant différents et désignant les chiffres 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque. On en déduit sans difficulté les relations

$$\alpha'_i + \alpha'_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0, \quad 2(\alpha'_i - \alpha_i) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_\alpha,$$

ω_α étant une des trois demi-périodes des fonctions elliptiques introduites.

Donc le point α'_i est fixe lorsque le point α_i est donné, et le tétraèdre $\alpha_i \alpha'_j \alpha'_k \alpha'_l$ est aussi circonscrit à B. Ainsi :

Si une biquadratique ω admet pour cordes huit génératrices d'une quadrique B, il existe une double infinité de tétraèdres inscrits à ω et circonscrits à B. Parmi ces tétraèdres, il en est une infinité simple qui ont pour sommet un point, α , de ω , et les faces opposées au sommet α passent toutes par un même point, α' , de la biquadratique : les points α et α' sont conjugués dans une des trois involutions linéaires qui transforment la biquadratique en elle-même.

Les faces d'un quelconque des tétraèdres coupent respectivement la biquadratique en un nouveau point : les quatre points ainsi obtenus sont encore les sommets d'un second tétraèdre circonscrit à B; et, réciproquement, le premier tétraèdre se déduit du second par la même construction.

Les huit sommets et les huit faces des deux tétraèdres peuvent se grouper quatre à quatre de trois nouvelles manières pour former deux tétraèdres analogues.

17. Passons maintenant à la proposition réciproque, en supposant qu'il y ait une double infinité de tétraèdres inscrits à une biquadratique ω et circonscrits à une quadrique B, et cherchons la relation qui doit exister entre B et ω .

Tout d'abord, en vertu de l'hypothèse, un plan *quelconque* Π , tangent à B, sera face d'un ou de plusieurs des tétraèdres, et l'un de ceux-ci aura pour sommets trois des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, communs à Π et à ω . Or je dis qu'aucune distinction n'est possible entre ces quatre points, c'est-à-dire que l'équation du quatrième ordre qui donne les points d'intersection de ω avec un plan *quelconque*, Π , tangent à la quadrique B, ne peut se décomposer *rationnellement* en deux équations d'ordre inférieur.

Car, si elle se décomposait en deux équations du second ordre, à chaque plan Π correspondraient *rationnellement* deux des points, α_1 et α_2 , où Π coupe ω . A chacun des plans, Π , menés par α_1 tangentielllement à B correspondrait donc un seul point, α_2 , de ω ; or les plans Π considérés enveloppant un cône unicursal et ω étant de genre un, la correspondance n'est possible que si α_2 est fixe quand α_1 est donné. En ce cas, tout plan tangent à B mené par α_1 passerait par α_2 , ce qui exige que B contienne la droite $\alpha_1 \alpha_2$, et, comme α_1 est un point quelconque de ω , il faut que B passe par la biquadratique ω , cas à écarter comme sans intérêt.

Le même raisonnement prouverait que l'équation du quatrième ordre ne peut se décomposer rationnellement en deux équations, respectivement du premier et du troisième ordre.

Il résulte de là que, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les quatre points communs à ω et à un plan quelconque, Π , tangent à B, il y aura *quatre* tétraèdres, inscrits à ω et circonscrits à B, ayant pour une de leurs faces le plan Π , et que leurs trois sommets dans cette face

seront respectivement

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \quad \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4; \quad \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$$

Soient alors $\alpha'_1, \alpha'_3, \alpha'_2, \alpha'_4$ les quatrièmes sommets respectifs de ces tétraèdres; on reconnaît, comme au n° 16, qu'on a entre les arguments elliptiques des points considérés les relations

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_\alpha,$$

qui, jointes à

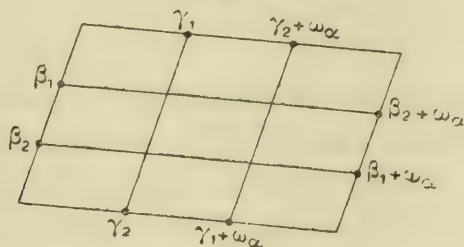
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

donnent toutes les propriétés géométriques trouvées plus haut (n° 16).

Cela posé, soit β_1 l'un des huit points communs à ω et à la quadrique B; désignons par d_1 et d'_1 les deux génératrices de B qui passent par β_1 : je dis que ce sont des cordes de ω .

En effet, un plan quelconque mené par d_1 est un plan, Π' , tangent à B; et, si $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ sont ses nouveaux points d'intersection avec ω , il existe, en vertu des propriétés générales des tétraèdres étudiés, un tétraèdre, inscrit à ω et circonscrit à B, admettant pour trois de ses sommets β_1, β_3 et β_4 . Les deux faces, autres que Π' ,

Fig. 3.



qui passent par β_1 , étant tangentes à B et distinctes de la face Π' , passent nécessairement par la génératrice d'_1 , qui dès lors contient le quatrième sommet, β'_2 . La droite d'_1 est donc une corde de ω , et il en est de même de d_1 : de plus, en vertu de ce qui précède, si β_2 est le second point de rencontre de d_1 avec ω , le second point de rencontre de d'_1 avec ω sera le point β'_2 , tel que

$$\beta'_2 = \beta_2 + \omega_\alpha.$$

Il résulte de là sans difficulté que les huit points de rencontre de ω avec B sont situés deux à deux sur huit génératrices de B comme l'indique le schéma ci-dessus (fig. 3).

Par suite, huit génératrices de B sont des cordes de ω , ou encore (n° 15) on peut faire passer par ω deux quadriques, A et A' , quadritangentes à B .

Ce résultat est précisément la proposition qu'il s'agissait d'établir sur la liaison entre ω et B . C. Q. F. D.

Transformons maintenant les propositions précédentes par polaires réciproques, nous obtenons ce qui suit :

18. THÉOREME. — *Soient A , A' et B trois quadriques. Il n'y a en général qu'un nombre limité de tétraèdres inscrits à B par leurs sommets et dont les faces touchent à la fois A et A' ; en aucun cas il ne peut exister un nombre triplement infini de tels tétraèdres.*

Pour que les tétraèdres considérés soient en nombre doublement infini, il faut et il suffit que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A' , il y en ait deux qui soient quadritangentes à B .

En ce cas, chaque point, ω , de B est le sommet de quatre tétraèdres de la famille; trois quelconques des quatre plans menés par ω tangentielllement à A et à A' sont trois faces d'un même tétraèdre.

Soit T un quelconque des tétraèdres considérés; par chacun de ses sommets passe un nouveau plan touchant à la fois A et A' : les quatre plans ainsi déterminés forment un tétraèdre, T' , de la famille. Le tétraèdre T se déduit de T' par la même construction.

Les huit faces et les huit sommets de T et de T' peuvent se grouper de trois autres manières pour former deux tétraèdres analogues.

19. On peut compléter ces résultats par la proposition suivante, moins intéressante que la précédente, et qu'on établirait par des considérations de même nature.

Pour qu'il existe une série *simplement infinie* de tétraèdres inscrits à la quadrique B et circonscrits à la fois aux quadriques A et A' , il *suffit* que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A' , il y en ait une qui soit quadritangente

à B. Le lieu des sommets de ces tétraèdres est une biquadratique tracée sur B.

Il existe alors une seconde série de tétraèdres inscrits à B et circonscrits à A et à A', dont les sommets décrivent, sur B, une seconde biquadratique.

Les faces d'un tétraèdre quelconque de la première série et celles d'un tétraèdre quelconque de la seconde forment un système de huit plans, tangents à une double infinité de quadriques.

Tout plan tangent à la fois à A et à A' est face d'un tétraèdre de chaque série.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 MARS 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur les dérivées modulaires des polynomes.*

M. G. Fontené : *Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive.*

SÉANCE DU 16 MARS 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Suchar : *Sur les mouvements réciproques.*

M. de Polignac : *Sur la recherche du facteur intégrant.*

M. Lévy : *Sur une construction de statique graphique.*

SÉANCE DU 13 AVRIL 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Élections :

Sont élus membres de la Société à la majorité des membres présents :

MM. Sundman, présenté par MM. Painlevé et Borel;	
Curtiss, »	J. Tannery et Hadamard;
Bernstein, »	Picard et Estanave;
Metzler, »	Picard et Perott.

Communications :

M. Bernstein : *Sur les équations différentielles du second ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur la résolution nomographique des triangles sphériques.*

MM. Andoyer, Carvallo et Lévy : *Observations à ce sujet.*

M. Humbert : *Sur une extension du théorème de Poncelet à l'espace.*

M. Suchar : *Sur l'équilibre d'un fil.*

SÉANCE DU 27 AVRIL 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Bricard : *Sur une propriété des parties entières des racines carrées.*

SÉANCE DU 4 MAI 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Ralfy : *Sur un théorème de Minding relatif aux équations différentielles du premier ordre.*

M. Bricard : *Sur certaines identités arithmétiques.*

SÉANCE DU 18 MAI 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Zervos : *Démonstration de l'impossibilité d'une certaine identité entre fonctions entières.*

M. Touche : *Sur le vol par orbes.*

M. Carvallo fait hommage à la Société d'un travail intitulé : *Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en Mécanique et en Physique.*

M. Touche : *Sur la théorie des vecteurs.*

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Lecornu : *Sur la déviation des projectiles.*

M. Bioche : *Sur une réciproque d'un théorème d'Halphen*

relativement à des propriétés des courbes gauches du quatrième ordre comportant un cas d'exception.

M. Félix Lucas : *Sur les dérivés modulaires des polynomes; identités qui en résultent.*

SÉANCE DU 15 JUIN 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

M. P. Boutroux, présenté par MM. Poincaré et Borel, est élu membre de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Remoundos : *Sur les fonctions entières de genre fini.*

M. Raffy : *Sur les surfaces isothermiques.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. CLAIRIN.

Pour intégrer par la méthode de M. Darboux une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, il faut chercher si les deux systèmes de caractéristiques (C) et (Γ), que nous supposons distincts, possèdent des invariants. M. Goursat a étudié ⁽¹⁾ les équations qui définissent ces invariants et il a obtenu des résultats importants; ceux de ces résultats qui sont relatifs aux invariants du second ordre peuvent être énoncés ainsi :

S'il existe un invariant du premier ordre pour le système (C) de caractéristiques, il y a au plus un invariant du second ordre pour le même système;

Si l'équation donnée est une équation de Monge-Ampère, il y a au plus un invariant du second ordre pour chaque système de caractéristiques.

Dire qu'il n'y a qu'un invariant du second ordre signifie qu'il est toujours possible d'exprimer tous les invariants de cet ordre en fonction de l'un d'entre eux et des invariants du premier ordre.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers de la proposition suivante :

Si le système (C) se compose de caractéristiques du premier ordre, ce système possède au plus un invariant du second ordre.

Soit

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

une équation de l'espèce indiquée; soient en outre m et μ les

⁽¹⁾ *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Ch. VII. Les notations dont je me sers sont les mêmes que celles qui ont été employées par M. Goursat dans cet Ouvrage.

racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

la racine m correspondant au système (C) de caractéristiques, c'est-à-dire au système composé de caractéristiques du premier ordre. L'équation (1) peut être regardée comme le résultat de l'élimination de m entre les équations

$$(2) \quad \begin{cases} r + ms + g(x, y, z, p, q, m) = 0, \\ s + mt + k(x, y, z, p, q, m) = 0; \end{cases}$$

autrement dit l'on a

$$f(x, y, z, p, q, s, t) = ms + g(x, y, z, p, q, m),$$

m étant une fonction de x, y, z, p, q, s, t définie par la seconde équation (2).

Pour trouver tous les invariants du second ordre du système (C), il faut intégrer les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (ms - f) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &+ (s + mt) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0; \end{aligned}$$

en remplaçant $ms - f$ et $s + mt$ par leurs valeurs, cette dernière équation devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - g(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ - k(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une intégrale $u(x, y, z, p, q, s, t)$ et prenons comme variables x, y, z, p, q, u, t ; une fonction φ de x, y, z, p, q, s, t devient une fonction Φ des nouvelles variables; on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

et l'on peut substituer dans cette égalité y, z, p, q, t à x , tandis

que l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s}.$$

En remplaçant par leurs expressions les dérivées de φ dans les équations qui définissent les invariants et en remarquant que u satisfait à ces équations il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &- g(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - k(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0; \end{aligned}$$

t ne figure dans les coefficients que par l'intermédiaire de m ; d'ailleurs, m et u étant deux fonctions indépendantes de s et t , t figure effectivement dans ces coefficients.

Toute intégrale de ce système satisfait également aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial m} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial k}{\partial m} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial^2 k}{\partial m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

D'après cette dernière équation, si la fonction Φ existe on devra avoir entre g et k une relation de la forme

$$(3) \quad \alpha g + \beta k + \gamma + \delta m = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des fonctions de x, y, z, p, q .

Admettons qu'il en soit ainsi, Φ est une fonction de x, y, z, p, q, u définie par les trois équations

$$\begin{aligned} \beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \beta \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Une intégrale de ce système d'équations est une intégrale du

système suivant d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz - p \, dx - q \, dy &= 0, \\ \alpha \, dp + \beta \, dq - \gamma \, dx - \delta \, dy &= 0; \end{aligned}$$

or une intégrale de ce système est une intégrale des équations

$$\begin{aligned} dz - p \, dx - q \, dy &= 0, \\ dp + g \left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx} \right) dx &= 0, \\ dq + k \left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx} \right) dx &= 0, \end{aligned}$$

qui définissent le système (C) de caractéristiques du premier ordre, comme on le vérifie immédiatement en multipliant les deux membres des deux dernières équations respectivement par α et β et en ajoutant, à condition de tenir compte de (3).

Le théorème est donc démontré : Φ ne peut être qu'une fonction de u et des invariants du premier ordre du système (C).

Nous n'avons pas restreint la généralité en supposant l'équation (1) remplacée par le système (2) : il n'y aurait, si la chose était impossible, qu'à effectuer au préalable une transformation de contact convenable pour substituer à l'équation donnée une équation équivalente à un système tel que (2).

SÉPARATION ANALYTIQUE D'UN SYSTÈME DE RAYONS INCIDENTS ET RÉFLÉCHIS (suite);

Par M. M. DE MONTCHEUIL.

Dans un article précédent (1), nous avons considéré le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, d'ailleurs quelconque; et nous avons vu comment les quatre plans isotropes, tangents en un même point, aux deux courbes du réseau qui s'y rencontrent, déterminent par leurs intersections quatre congruences de droites normales à autant de familles de surfaces. Ces congruences, avons-nous dit, se répartissent en deux couples formant chacun un système de rayons incidents et réfléchis analy-

(1) T. XXXI, fascicule 4, p. 233.

tiquement séparable. Nous avons montré comment cette propriété appartient encore aux nappes des enveloppes de sphères dont le centre décrit la surface dirimante, ces nappes étant d'ailleurs formées par les quatre familles de surfaces normales aux congruences.

Nous nous proposons aujourd'hui de déterminer sur une surface absolument quelconque une catégorie de réseaux jouissant de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Il serait aisé, comme nous le montrerons dans la suite, de déterminer les réseaux que nous avons en vue, sans passer par l'intermédiaire des surfaces de translation. Toutefois, deux motifs nous engagent à les faire intervenir.

Nous y gagnerons d'abord de pouvoir mettre en relief une correspondance intéressante, qui relie une surface arbitrairement donnée à un ensemble de surfaces de translation dépendant de deux paramètres.

Cette façon de procéder nous permettra encore de définir une catégorie, d'ailleurs illimitée, de formules qui, établies dans l'hypothèse d'une surface de translation, s'étendent au cas de surfaces quelconques.

Surfaces de translation. — Avant d'aborder l'objet propre de ce travail, nous allons rappeler brièvement et compléter quelques résultats que nous avons exposés ailleurs concernant les surfaces de translation (¹).

Nous avons défini les coordonnées de ces surfaces au moyen du système suivant (²) :

$$(1) \quad \begin{cases} y = \int \frac{1-u^2}{4} C''' du + \frac{1-u^2}{4} D' + \int \frac{1-u_1^2}{4} C_1''' du_1 + \frac{1-u_1^2}{4} D_1', \\ x = i \int \frac{1+u^2}{4} C''' du + i \frac{1+u^2}{4} D' - i \int \frac{1+u_1^2}{4} C_1''' du_1 - i \frac{1+u_1^2}{4} D_1', \\ z = \int \frac{u}{2} C''' du + \frac{u}{2} D' + \int \frac{u_1}{2} C_1''' du_1 + \frac{u_1}{2} D_1'. \end{cases}$$

D' , C''' représentent ici les dérivées premières et troisièmes de

(¹) Thèse de doctorat.

(²) *Ibid.*, p. 55.

deux fonctions arbitraires de la variable u ; D'_1 , C''_1 les dérivées correspondantes de la variable u_1 . On vérifie, en outre, que les fonctions D , D_1 représentent les longueurs des arcs des deux courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface de translation.

L'interprétation géométrique du système (1) peut être formulée comme il suit :

Sur les tangentes à deux courbes minima quelconques prenons deux points eux aussi quelconques; le milieu du segment qui relie les deux points décrira la surface de translation dont les coordonnées sont définies par les relations précédentes.

Interpréter les formules du système (1), comme nous venons de le faire, revient à considérer les surfaces de translation comme le lieu d'un point du plan tangent à une surface minima quelconque. Cela équivaut à appliquer le mode de construction de Ribaucour à ces surfaces. La surface minima est ici la surface de référence.

Poursuivant nos investigations, considérons le point du plan tangent à la surface de référence qui engendre la surface de translation précédemment définie et, par ce point, menons une parallèle à la normale de la surface minima. Nous obtenons ainsi une congruence de droites normale à une famille de surfaces. Ces surfaces, que nous avons appelées ailleurs *surfaces* Ξ ⁽¹⁾, donnent la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0,$$

ξ , u , u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet. Nous avons montré que la surface de translation correspondante en constituait la développée moyenne ponctuelle. Il suit de là que la surface minima est l'enveloppe d'un plan perpendiculaire au segment focal de Ξ et le coupant en son milieu. De là, nous tirons cette conséquence :

Si l'on associe à une surface minima quelconque une des

(¹) Thèse de doctorat.

surfaces de translation, lieu du point du plan tangent à celle-là, précédemment défini, ces deux surfaces seront les développées moyennes tangentielle et ponctuelle de la famille de surfaces Ξ normales à la congruence des droites menées par chaque point de la surface de translation parallèlement aux normales de la surface minima.

Le segment focal de la famille de surfaces Ξ est donné, à une constante près, par la relation

$$(2) \quad \rho = - \frac{D + D_1}{2}.$$

La surface Ξ correspondante a pour équation

$$(3) \quad \xi = u G_1 + u_1 C - \frac{1 + uu_1}{2} (G' + G'_1 + D + D_1).$$

Il suffira de supprimer les fonctions D et D_1 dans cette équation pour obtenir celle de la surface minima développée tangentielle de Ξ .

Il resterait à indiquer comment, des surfaces trouvées, on déduit les deux systèmes de rayons incidents et réfléchis normaux à quatre familles de surfaces Ξ dont font partie celles que nous avons déterminées. Nous renvoyons, pour ces développements, à l'article précédemment cité.

Extension des formules (1) à des surfaces quelconques. — Exprimer les coordonnées d'une surface de translation au moyen du système (1) revient à la considérer comme la développée moyenne (1) d'une surface Ξ définie par l'équation (3), ξ, u, u_1 désignant toujours les coordonnées d'O. Bonnet.

Étendons ce mode de représentation à une surface quelconque. Soient donc x, y, z les coordonnées d'une surface développée moyenne d'une seconde surface définie par une fonction ξ de u, u_1 . Nous désignerons par la lettre ξ cette surface.

(1) Par développée moyenne nous entendons toujours la développée moyenne ponctuelle.

ρ désignant le segment focal de ξ , on trouve

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \left[(u + u_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], \\ y = \frac{i}{2} \left[(u_1 - u) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], \\ z = \frac{1}{2} \left[(uu_1 - 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \left[(uu_1 + 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right]. \end{array} \right.$$

C'est ce système (4) qui, dans le cas des surfaces de translation, se confond avec le système (1).

Or nous allons définir quatre nouvelles fonctions, que nous désignerons, comme les précédentes, par les lettres C, D, C₁, D₁, et qui entraîneront l'identification des systèmes (1) et (4) *quelles que soient les surfaces de coordonnées x, y, z.*

Il est évident que, dans le cas général, les nouvelles fonctions dépendent chacune des deux variables u, u_1 . Du reste, il suffit, pour les obtenir, d'écrire que les deux systèmes de valeurs des expressions de x, y, z, ρ , définies par les équations (1) et (2) d'une part et (4) de l'autre, sont identiques.

Cette identification conduit aux relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial \xi}{\partial u_1} - u \xi \right], \\ C_1 = \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \xi \right], \\ D = D_1 = -\frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right]. \end{array} \right.$$

De ce système on déduit l'identité

$$(6) \quad \xi = u_1 C + u C_1 - \frac{1 + uu_1}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial u_1} + D + D_1 \right).$$

Ainsi donc, sous le bénéfice du système (5), l'équation d'une surface quelconque ξ prend la forme de l'équation (3) que vérifient les surfaces Ξ .

Il ne serait pas sans intérêt de prendre pour point de départ cette équation de la surface ξ et d'en déduire [toujours en tenant

compte du système (5)] les éléments géométriques qui s'y rattachent : développée moyenne, etc. Sans entreprendre cette étude en détail, nous signalerons les résultats suivants :

Les dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ de la fonction ξ définie par l'équation (6) peuvent s'obtenir en opérant comme si C , D étaient des fonctions de u seulement; C_1 , D_1 des fonctions de u_1 seulement.

La même remarque s'applique aux dérivées $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, $\frac{\partial^n \xi}{\partial u_1^n}$, $\frac{\partial^{n+1} \xi}{\partial u^n \partial u_1}$, $\frac{\partial^{n+1} \xi}{\partial u_1^n \partial u}$, où l'on suppose $n \geq 2$, avec cette restriction que les expressions trouvées doivent être multipliées par le facteur 2.

Il suit de là que toute expression où figurent les seules quantités u , u_1 , ξ , $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ prend la même forme, qu'on y remplace ξ et ses dérivées par les expressions déduites de l'équation (3) particulières aux surfaces Ξ ou par celles que l'on déduit de l'équation (6) qui convient à toutes les surfaces.

La même remarque s'applique, au facteur près 2^n , à toute expression homogène et de degré n en $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, ...

Nous avons ainsi défini la catégorie illimitée de formules dont nous avons parlé au début qui, établies dans l'hypothèse des surfaces Ξ ou, ce qui revient au même, des surfaces de translation, leurs développées moyennes, conviennent à des surfaces quelconques.

Comme application des remarques précédentes, considérons les coordonnées de la développée moyenne d'une surface Ξ , définie par le système (1) où C , D , C_1 , D_1 sont fonctions respectives d'une seule variable. Le système (4) montre que les expressions des coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque ne contiennent que les seules quantités u , u_1 , ... Nous pouvons donc affirmer sans calcul que le système (1), où l'on considère les fonctions C , D , ... comme définies par le système (5), donnera les coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque.

Les lignes de courbure de ξ nous fourniront une autre application de notre proposition.

Ces lignes sont définies par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2,$$

équation homogène en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

D'ailleurs, dans le cas des surfaces Ξ , cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} & \left[2 u_1 \frac{\partial D}{\partial u} + (1 + uu_1) \left(\frac{\partial^3 C}{\partial u^3} + \frac{\partial^2 D}{\partial u^2} \right) \right] du^2 \\ &= \left[2 u \frac{\partial D_1}{\partial u_1} + (1 + uu_1) \left(\frac{\partial^3 C_1}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial u_1^2} \right) \right] du_1^2. \end{aligned}$$

Cette équation sera donc celle des lignes de courbure d'une surface quelconque; C, D, C_1, D_1 et leurs dérivées désignent alors les fonctions définies par le système (5).

Nous venons de voir comment, C, D, C_1, D_1 désignant les fonctions à deux variables, les formules du système (1) représentent les coordonnées d'une surface quelconque. Or, de ces formules, on peut en déduire de beaucoup plus simples.

On vérifie en effet que, si dans l'un quelconque des seconds membres du système (1) on groupe d'une part les termes en C, D , de l'autre les termes en C_1, D_1 , ces deux groupes représentent des valeurs égales. Il suit de là que les quantités x, y, z, ρ peuvent s'exprimer au moyen d'un seul de ces groupes à la condition de le multiplier par 2.

Ainsi donc les coordonnées d'une surface et le segment focal ρ correspondant pourront être exprimées par le système

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) + u \frac{\partial C}{\partial u} - C, \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) - u \frac{\partial C}{\partial u} + C \right], \\ z = u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) - \frac{\partial C}{\partial u}, \\ \rho = -D. \end{cases}$$

On déduirait le second système de celui-ci en changeant C, D en C_1, D_1 et i en $-i$.

Ces formules sont celles que nous avons établies ailleurs (1),

(1) *Bulletin de la Soc. math.*, t. XXXI, fascicule 4, p. 235.

dans le but d'obtenir des expressions rationnelles et sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe.

Ici, seulement, les deux systèmes définissent deux familles de courbes de paramètres u_1 et u qui engendrent chacun la même surface. Nous reviendrons sur le réseau de ces courbes.

Les coordonnées de la développée moyenne tangentielle de ξ se déduisent de celles de la développée moyenne ponctuelle de la façon la plus simple.

On passe de cette seconde surface à la première par un simple changement de signe devant les termes en D' , D'_1 qui figurent dans les formules du système (1).

Nous supposons toujours les fonctions C , D , C_1 , D_1 définies par le système (5).

Enveloppes et enveloppées. — Rappelons les surfaces définies respectivement par les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = u_1 C(u, u_1) + u C_1(u, u_1) \\ - \frac{1 + uu_1}{2} \left[\frac{\partial C(u, u_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(u, u_1)}{\partial u_1} + D(u, u_1) + D_1(u, u_1) \right], \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = u_1 C(u, \alpha_1) + u C_1(\alpha, u_1) \\ - \frac{1 + uu_1}{2} \left[\frac{\partial C(u, \alpha_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(\alpha, u_1)}{\partial u_1} + D(u, \alpha_1) + D_1(\alpha, u_1) \right]. \end{array} \right.$$

Les fonctions C , D , C_1 , D_1 qui figurent dans la première équation sont celles que définit le système (5). Les fonctions qui rentrent dans l'expression de ζ se déduisent des précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans C , D , de u en α dans C_1 , D_1 , α , α_1 désignant des paramètres quelconques.

L'équation (8) définit une surface quelconque, dont la développée moyenne ponctuelle est représentée par le système (7).

L'équation (9) définit un ensemble de surfaces Ξ à deux paramètres qui auront pour développées moyennes des surfaces de translation.

Avant d'étudier les rapports qui existent soit entre les surfaces ξ et les surfaces ζ , soit entre leurs développées moyennes, nous devons déterminer la nature de ces surfaces.

La surface ξ et sa développée moyenne sont absolument quel-

conques. La surface définie par la fonction ζ est une surface Ξ et sa développée moyenne une surface de translation. Mais cette dernière surface n'est pas la plus générale de cette catégorie. Nous devons donc préciser sa nature.

Pour y arriver nous pourrions procéder comme il suit :

Supposons l'une des familles des courbes lieux des extrémités du segment mobile, dont le milieu décrit la surface de translation, définie par le système (7), où C, D désignent des fonctions quelconques de la variable u et d'un paramètre arbitraire α_1 . Supposons la seconde famille définie par un système analogue que nous appellerons le système (7)' et qu'on déduira du précédent en changeant C, u, α_1, i en $C_1, u_1, \alpha, -i$.

Assujettissons maintenant deux courbes quelconques de famille différente à se rencontrer. Écrivant seulement la première équation de condition, nous aurons

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1-u^2}{2} \left[\frac{\partial^2 C(u, \alpha_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial D(u, \alpha_1)}{\partial u} \right] + u \frac{\partial C(u, \alpha_1)}{\partial u} - C(u, \alpha_1) \\ & = \frac{1-u_1^2}{2} \left[\frac{\partial^2 C_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1^2} + \frac{\partial D_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1} \right] + u_1 \frac{\partial C_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1} - C_1(u_1, \alpha). \end{aligned} \right.$$

Nous allons imposer à ces courbes une nouvelle condition et exiger que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles. Si nous remarquons que les variables u, u_1 désignent deux paramètres directeurs de plans isotropes tangents aux courbes de chaque famille, nous nous rendons compte aisément que, au point de rencontre de deux courbes, u sera fonction de α seulement et u_1 de α_1 . On peut d'ailleurs, sans restreindre la généralité du problème, supposer qu'on a précisément en ce point $u = \alpha, u_1 = \alpha_1$.

Mais, alors, le système (10) sera vérifié pour $u = \alpha, u_1 = \alpha_1$, ou, ce qui revient au même, pour $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$. Dès lors, les trois relations (10) expriment trois conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $C(u, u_1), D(u, u_1), \dots$ définies par le système (5). Cela résulte de ce fait que les coordonnées des surfaces définies par ces fonctions doivent pouvoir être représentées indifféremment par les systèmes (7) ou (7)'.

D'ailleurs, le système (5) montre que, entre les fonctions

$C(u, u_1), \dots$, il ne saurait y avoir plus de trois relations distinctes. Ainsi donc, les conditions que nous nous sommes imposées nous ont conduit à déterminer *précisément* les quatre fonctions $C, D, \dots$ définies par le système (5), c'est-à-dire les quatre fonctions qui figurent dans l'expression de ξ donnée par la relation (8). D'ailleurs, les fonctions $C(u, \alpha_1), \dots$ sont bien déduites des fonctions précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans la première, de u en α dans la seconde. Ce sont donc bien les fonctions qui figurent dans l'expression de ζ définie par l'équation (9). Nous pourrons donc maintenant exprimer comme il suit le caractère des surfaces, développées moyennes des surfaces ζ .

L'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes des surfaces ζ , s'obtient en prenant pour courbes lieux des extrémités du segment mobile, deux familles de courbes telles que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles.

Nous allons étudier maintenant quelques-unes des relations qui existent entre les surfaces ξ et ζ , ou encore entre leurs développées moyennes.

Si l'on forme les dérivées de ξ et ζ au moyen des relations (8) et (9), on vérifie que, pour les points des deux surfaces définis par les relations

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1,$$

on a

$$\begin{aligned} \xi &= \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u}, & \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial u_1}, \\ \frac{\partial^n \xi}{\partial u^n} &= 2 \frac{\partial^n \zeta}{\partial u^n}, & \frac{\partial^n \xi}{\partial u_1^n} &= 2 \frac{\partial^n \zeta}{\partial u_1^n}, \\ \frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u^n \partial u_1} &= 2 \frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u^n \partial u_1}, & \frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u_1^n \partial u} &= 2 \frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u_1^n \partial u}. \end{aligned}$$

Nous supposons $n \geq 2$.

De ces relations nous déduisons la conclusion suivante :

Une expression en $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ ne change pas de valeur quand on y remplace ces quantités par les quantités correspondantes $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \dots$ et qu'on y fait $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$.

Par cette substitution une expression homogène en $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, ... de degré p se trouve divisée par 2^p .

Tirons quelques conséquences de ces propositions.

Les coordonnées de la surface ξ sont fonctions des seules quantités $u, u_1, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ ('). D'ailleurs, les coordonnées de ζ se déduisent des premières par la substitution de la fonction ζ à la fonction ξ . Nous en concluons que les points correspondants des deux surfaces se confondent. D'autre part, les variables u, u_1 définissent la direction commune des normales à ces mêmes surfaces; elles sont donc tangentes au point considéré.

Ainsi donc la surface ξ est l'enveloppe de la surface ζ .

Considérons maintenant les développées moyennes.

Pour le même motif que tout à l'heure, les points correspondants sont confondus.

Il est facile de prouver qu'ici encore les deux surfaces sont tangentes en ces points. En effet, on vérifie que les différentielles dx, dy, dz de ces surfaces sont des fonctions linéaires des seules dérivées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}, \dots$. Elles sont donc proportionnelles. Les deux surfaces ont donc leurs normales confondues aux points correspondants.

Ainsi donc la développée moyenne de ξ est l'enveloppe de l'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes de ζ .

La même remarque s'applique aux lignes de courbure dont les équations sont homogènes en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

Par conséquent, les lignes de courbure de ξ sont les enveloppes des lignes de courbure de ζ .

Faisons encore une application des résultats précédents.

On vérifie que l'élément linéaire d'une développée moyenne

(') Voir DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 246.

quelconque est définie par la relation

$$(11) \quad ds^2 = d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1^2} du du_1,$$

ρ désignant toujours le segment focal de ξ et ayant sa différentielle définie par la relation

$$\begin{aligned} d\rho = & \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial u_1} - u \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \right] du \\ & + \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^3 \xi}{\partial u \partial u_1^2} - u \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \right] du_1. \end{aligned}$$

On voit par là que ds^2 est homogène et du second degré en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$, ... Si donc nous désignons par dS^2 l'élément linéaire relatif à la développée moyenne de ζ , on aura la relation

$$ds^2 = 4 dS^2$$

au point où l'enveloppe touche l'enveloppée.

Cette relation nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Supposons qu'on ait réussi par un procédé quelconque à déterminer deux ensembles de surfaces de translation à deux paramètres, définies comme précédemment et telles que, aux points de contact avec leurs enveloppes, leur élément linéaire ait la même valeur : ces enveloppes seront applicables.

Remarquons, en terminant, que les courbes lieux des extrémités du segment mobile dont le point milieu décrit les surfaces de translation, développées moyennes de ζ , décrivent l'enveloppe de ces mêmes surfaces.

Cela résulte de ce fait que deux courbes quelconques de famille différente se rencontrent.

Réseaux (u, u_1) . — Nous désignerons ainsi la catégorie de réseaux dont nous avons parlé au début et qui, tracés sur une surface quelconque, jouissent de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Pour nous rendre compte de cette analogie, remarquons que ce dernier réseau peut être considéré comme formé de deux familles

de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chacune des courbes de l'autre tangentiellement à une famille de droites parallèles. D'après la définition même des surfaces de translation, de pareils réseaux ne se rencontrent que sur ces surfaces. Mais nous pouvons élargir la définition donnée en substituant à la famille des droites parallèles tangentes aux courbes d'une même famille une famille de plans parallèles tangents à ces mêmes courbes. Prenons par exemple des plans isotropes. Dès lors, la définition précédente caractérisera les réseaux composés de deux familles de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles. Cette définition comprendra encore, comme cas particulier, le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, mais, dans le cas général, elle caractérisera une catégorie de réseaux susceptibles d'être tracés sur une surface quelconque.

Tels sont les réseaux (u, u_1) dont nous nous proposons d'indiquer sommairement quelques propriétés.

Nous remarquerons d'abord que, sur une surface donnée, ils forment une catégorie caractérisée par deux fonctions arbitraires.

En effet, considérons la surface proposée comme la développée moyenne d'une surface ξ . Cette surface pourra être considérée comme définie par le système (4). Or, si l'on porte les valeurs x, y, z ainsi déterminées dans l'équation de cette même surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \xi, u, u_1\right) = 0,$$

dont l'intégrale générale ξ renferme deux fonctions arbitraires.

D'ailleurs, chacune des valeurs de ξ donnera un réseau (u, u_1) . En effet, les deux familles de ces réseaux (on s'en rend compte aisément) sont données séparément par les systèmes (7) et (7)' où l'on fait respectivement $u_1 = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ Or, à chaque valeur de ξ correspond, en vertu des relations (5), un système de valeurs des fonctions C, D, C_1, D_1 . La proposition est ainsi démontrée.

L'élément linéaire de la surface étant donné par la relation (11), on voit que, pour toutes les courbes du réseau, on aura

$$ds^2 = d\zeta^2.$$

Cette relation entraîne la propriété suivante :

Les arcs des courbes de tout réseau (u, u_1) sont, à une constante près, égaux au segment focal de la surface ξ , qui admet la proposée pour développée moyenne.

Cette propriété du réseau (u, u_1) tracé sur la développée moyenne de ξ le rapproche des réseaux des deux nappes de la surface des centres correspondant au réseau des lignes de courbure de cette même surface ξ . On sait qu'au réseau de ces lignes correspond, sur chaque nappe de la développée, une famille de courbes dont les arcs, en chaque point, sont égaux à la distance de ces points à la surface ξ . C'est bien la propriété que nous venons de constater pour les courbes du réseau (u, u_1) . Si nous désignons par R, R' les rayons de courbure de ξ , les longueurs respectives des arcs de courbe considérées seront R, R' pour les nappes de la développée, $\frac{R + R'}{2}$ pour la développée moyenne.

Indiquons encore les propriétés suivantes :

Les paramètres des courbes du réseau (u, u_1) sont ceux des génératrices rectilignes de la sphère de rayon 1 sur laquelle on effectue la représentation sphérique de ξ .

Les réseaux (u, u_1) sont les seuls dont les coordonnées et les arcs des courbes qui les composent puissent s'exprimer rationnellement et sans signe de quadrature en fonction des quantités u, u_1, ξ et des dérivées de ξ , quelles que soient les surfaces proposées.

Cette propriété résulte de ce fait que les coordonnées de ces courbes sont définies par les systèmes (7) ou (7)', où D, D_1 représentent les arcs de courbes.

Pour tout autre réseau, les arcs de courbes sont définis par la relation

$$ds = \sqrt{d\zeta^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du du_1},$$

où l'on a

$$du\,du_1 \neq 0,$$

expression qui ne saurait être rationnelle quelle que soit la fonction ξ ⁽¹⁾.

On voit, par ce que nous venons de dire, quelles relations étroites établit le réseau précédemment défini entre une surface donnée quelconque et un ensemble à deux paramètres de surfaces de translation.

Pour mieux nous rendre compte de ces relations, considérons le système géométrique formé de l'ensemble des surfaces ζ précédemment défini, des surfaces de translation leurs développées moyennes, des deux familles de développables de chacune des surfaces ζ . Des remarques précédentes on déduit aisément que l'enveloppe de ce système à deux paramètres constitue un système de même nature dont chaque élément est l'enveloppe de l'élément correspondant dans le premier système.

Pour obtenir les équations du système enveloppe, il suffit de faire $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ dans les équations du système enveloppé.

Les deux plans isotropes de chaque courbe du réseau sont analytiquement séparables.

Les quatre plans isotropes tangents en un même point de la surface, aux deux courbes d'un réseau (u, u_1) qui s'y rencontrent, forment quatre congruences de droites, divisées en deux couples de rayons incidents et réfléchis. Ces deux couples sont formés de congruences analytiquement séparables. Les congruences de l'un des systèmes sont normales à deux familles de surfaces dont l'une admet la surface dirimante pour développée moyenne.

Cette dernière propriété, que nous avons exposée dans l'hypothèse des surfaces de translation ⁽²⁾, va faire l'objet d'un paragraphe spécial.

⁽¹⁾ Nous ne considérons pas le cas où l'on a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = 0$. Cette équation définit les surfaces de Monge, dont la développée moyenne, sur laquelle est supposé tracé le réseau, se réduit à une courbe.

⁽²⁾ *Bull. de la Soc. math.*, t. XXI, fasc. 4, p. 247.

Systèmes de rayons et nappes d'enveloppes analytiquement séparables. — Nous avons établi ailleurs ⁽¹⁾ une série de formules relatives aux quatre plans isotropes, tangents à deux courbes en leurs points de rencontre. Or, les calculs effectués alors se réduisent à de simples opérations d'algèbre et de dérivation portant sur les quantités définies par les systèmes (7) et (7)' qui déterminent les deux courbes. Nous supposons alors le système (7) indépendant de u_1 et le système (7)' indépendant de u . Du reste, les dérivées en u_1 ne figurant pas dans le premier système, et les dérivées en u ne figurant pas dans le second, les quantités u_1 et u y jouent respectivement le rôle de simples paramètres sans influence sur la nature des précédents calculs.

Nous en concluons que toutes les formules établies alors peuvent être transcrites ici sans modification, et qu'elles s'appliquent exactement au réseau (u, u_1) défini par les systèmes (7) et (7)'. En d'autres termes, nous pouvons appliquer au cas d'une surface quelconque toute une série de formules établies pour les seules surfaces de translation. Ici seulement, les fonctions C, D, C_1, D_1 ne seront plus les fonctions d'une seule variable qui figurent dans le système (1), mais plutôt les fonctions à deux variables que définit le système (5).

D'après cela, les quatre équations des plans tangents au point de rencontre de deux courbes du réseau (u, u_1) seront données par le système

$$(12) \quad \begin{cases} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 2C = 0, \\ (1-v^2)X + i(1+v^2)Y + 2vZ + 2G = 0, \\ (1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 2C_1 = 0, \\ (1-v_1^2)X - i(1+v_1^2)Y + 2v_1Z + 2G_1 = 0, \end{cases}$$

où v et G représentent des fonctions de u, u_1 définies par les relations

$$(13) \quad \begin{cases} v = u + \frac{2 \frac{\partial D}{\partial u}}{\frac{\partial^3 C}{\partial u^3} + \frac{\partial^2 D}{\partial u^2}}, \\ G = C + \frac{v-u}{2} \left[2 \frac{\partial C}{\partial u} + (v-u) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) \right]. \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Ibid.*, p. 247 et suivantes.

On obtient les relations de v_1 , G_1 en affectant d'indices les lettres qui figurent dans les formules précédentes.

Les deux premières équations du système (12) sont celles des deux plans isotropes tangents aux courbes de paramètre u_1 , les deux dernières se rapportent aux courbes de paramètre u .

Le système (13), rapproché du système (5) qui définit les fonctions C , D , C_1 , D_1 , montre que les quatre équations des plans isotropes sont rationnelles en u , u_1 , ξ et les dérivées de ξ .

Ainsi donc, les deux plans isotropes, tangents en un même point d'une courbe quelconque du réseau (u, u_1) , sont analytiquement séparables.

Les quatre congruences formées des intersections de ces plans isotropes sont données par le système

$$\frac{X-x}{u+u_1} = \frac{Y-y}{i(u_1-u)} = \frac{Z-z}{uu_1-1},$$

et par les trois autres systèmes qu'on déduit de celui-ci en remplaçant d'abord u par v , puis u_1 par v_1 , et enfin simultanément u, u_1 par v, v_1 .

Nous renvoyons, pour les calculs, à l'article précédemment indiqué.

Il nous reste à examiner lesquelles de ces congruences sont normales à des familles de surface. Or, nous aurons, dans les cas des surfaces de translation,

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(u+u_1)dx + i(u_1-u)dz + (uu_1-1)dz}{1+uu_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1 = d\rho, \\ \frac{(v+u_1)dx + i(u_1-v)dy + (v_1u-1)dz}{1+u_1v} = -\frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1, \\ \frac{(u+v_1)dx + i(v_1-u)dy + (v_1u-1)dz}{1+uv_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} du - \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1, \\ \frac{(v+v_1)dx + i(v_1-v)dy + (vv_1-1)dz}{1+vv_1} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1\right) = -d\rho, \end{array} \right.$$

ρ désigne toujours le segment focal de ξ .

Bien que ces formules soient de même forme que celles relatives aux surfaces de translation, elles ne doivent pas être interprétées de la même manière. Dans le cas des surfaces de translation, ρ est la somme de deux fonctions respectives de u et de u_1 . Il suit de là

que les quatre seconds membres du système précédent sont autant de différentielles exactes. D'où nous devons conclure que les quatre congruences étaient normales à autant de familles de surfaces.

Dans le cas général, il n'en est plus ainsi. Des formules précédentes, seules la première et la dernière jouissent de la propriété indiquée.

Nous avons donc ici deux systèmes de rayons incidents et réfléchis analytiquement séparables, mais dont l'un seulement se compose de congruences normales à deux familles de surfaces.

D'après ce que nous venons de voir, la détermination : des plans isotropes tangents aux courbes génératrices d'une surface de translation ; des congruences de droites intersections de ces plans, et, par suite, des systèmes de rayons incidents et réfléchis formés avec ces convergences, dépendent de calculs qui s'appliquent sans restriction au cas de surfaces quelconques. Pour les adapter au cas général, il nous a suffi de substituer dans les formules les fonctions C , D , etc., définies par le système (5) aux fonctions d'une seule variable désignées par les mêmes lettres.

C'est seulement quand nous avons voulu considérer les surfaces normales aux congruences de droites que nous avons vu se manifester une différence dans les résultats. Au lieu de quatre familles de surfaces normales aux congruences, nous n'en avons trouvé que deux.

Nous constatons une seconde différence. Dans le cas des surfaces Ξ , les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile admettent la surface dirimante pour développée moyenne. Dans le cas général, une seule de ces nappes jouit de cette propriété. On en peut conclure que les surfaces Ξ donnent la solution complète du problème suivant :

Déterminer les surfaces telles que la congruence de leurs normales se réfléchisse sur la développée moyenne ponctuelle, normalement à une famille de surfaces admettant au même titre la surface dirimante.

Du reste, comme nous allons le voir, les coordonnées des deux

nappes s'expriment rationnellement en fonction de u , u_1 , ξ et des dérivées de ξ .

Nous pouvons donc affirmer ici encore que les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante sont analytiquement séparables.

Série de systèmes de rayons analytiquement séparables. — Nous allons maintenant, comme nous l'avons annoncé au début, prendre une méthode plus directe qui nous fera retrouver, en les complétant, les résultats précédents. Nous montrerons, en particulier, comment des normales à une surface quelconque on peut déduire une série illimitée de systèmes de rayons incidents et réfléchis dont les équations s'expriment toutes rationnellement en fonction des coordonnées u , u_1 , ξ relatives à la surface donnée et des dérivées de ξ .

Soit donnée une surface quelconque définie par le système (4), que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(15) \quad \begin{cases} x - iy = u_1 s - p, \\ x + iy = us - q, \\ z = \frac{1}{2}(uu_1 - 1)s - up - u_1 q + \xi. \end{cases}$$

Nous désignons par p , q , r , s , t les dérivées premières et secondes de ξ par rapport aux variables u , u_1 .

Calculons les quatre paramètres directeurs des plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u , u_1 tracées sur la surface.

Si nous désignons par w et w_1 deux quantités absolument quelconques, nous vérifions les deux identités

$$(16) \quad \begin{cases} (1 - w^2) dx + i(1 + w^2) dy + 2w dz \\ \quad = \frac{w - u}{2} \left[w \left(r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) - \frac{\partial s}{\partial u} \right] du + \frac{1 + wu_1}{2} \left(u \frac{\partial s}{\partial u_1} - t - w \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) du_1, \\ (1 - w_1^2) dx - i(1 + w_1^2) dy + 2w_1 dz \\ \quad = \frac{1 + uw_1}{2} \left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r - w_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) du + \frac{w_1 - u_1}{2} \left[w_1 \left(t - u \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial s}{\partial u_1} \right] du_1, \end{cases}$$

Supposons maintenant que les différentielles dx , dy , dz se rapportent aux courbes de paramètre u_1 dans la première des relations (16) et aux courbes de paramètre u dans la seconde. Supposons encore que les quantités w , w_1 désignent les paramètres

directeurs respectifs des plans isotropes tangents à ces courbes.

On aura alors

$$2 \left[(1 - w^2) \frac{\partial x}{\partial u} + i(1 + w^2) \frac{\partial y}{\partial u} + 2w \frac{\partial z}{\partial u} \right] \\ = (w - u) \left[w \left(r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) - \frac{\partial s}{\partial u} \right] = 0.$$

$$2 \left[(1 - w_1^2) \frac{\partial x}{\partial u_1} - i(1 + w_1^2) \frac{\partial y}{\partial u_1} + 2w_1 \frac{\partial z}{\partial u_1} \right] \\ = (w_1 - u_1) \left[w_1 \left(t - u \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial s}{\partial u_1} \right] = 0.$$

On obtient donc les quatre systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} w = u, \\ w_1 = u_1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ w_1 = v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = u, \\ w_1 = v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ w_1 = u_1, \end{array} \right\}$$

qui définissent les directions des quatre congruences formées par les intersections des quatre plans isotropes.

Pour que ces congruences soient normales à une famille de surfaces, il faut que l'expression

$$\frac{(w + w_1) dx + i(w_1 - w) dy + (ww_1 - 1) dz}{1 + ww_1}$$

soit une différentielle exacte.

Or, on trouve

$$\frac{(w + w_1) dx + i(w_1 - w) dy + (ww_1 - 1) dz}{1 + ww_1} \\ = \frac{(w - u) \left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r - w_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) + (1 + uw_1) \left[\left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r \right) w + \frac{\partial s}{\partial u} \right]}{2(1 + ww_1)} du \\ + \frac{(w_1 - u_1) \left(u \frac{\partial s}{\partial u_1} - t - w \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) + (1 + u_1 w) \left[\left(u \frac{\partial s}{\partial u_1} - t \right) w_1 + \frac{\partial s}{\partial u_1} \right]}{2(1 + ww_1)} du_1$$

Pour

$$w = u, \quad w_1 = u_1,$$

il vient

$$\frac{(u + u_1) dx + i(u_1 - u) dy + (uu_1 - 1) dz}{1 + uu_1} \\ = \frac{(1 + uu_1) \frac{\partial s}{\partial u} - ur}{2} du + \frac{(1 + uu_1) \frac{\partial s}{\partial u_1} - u_1 t}{2} du_1 = d\varphi,$$

φ désignant toujours le segment focal de ξ , segment défini par la relation

$$(17) \quad \varphi = \frac{1}{2} [(uu_1 + 1)s - up - u_1 q + \xi].$$

Prenons

$$v = v, \quad v_1 = v_1,$$

v, v_1 ayant les valeurs définies plus haut.

Il vient

$$(18) \quad \left\{ \frac{(v + v_1) dx + i(v_1 - v) dy + (vv_1 - 1) dz}{1 + vv_1} = \frac{u - v}{2v} \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{u_1 - v_1}{2v_1} \frac{\partial s}{\partial u_1} du_1 = -d\varphi. \right.$$

On obtient donc encore ici une différentielle exacte. D'ailleurs, le calcul montre qu'il n'en sera pas ainsi pour les deux autres congruences. Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés, en établissant les formules (14).

Il nous reste à déterminer les équations de la surface normale à la seconde congruence qui forme avec ξ les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile.

Soient X, Y, Z les coordonnées de cette surface, x, y, z désignant toujours les coordonnées de la surface directrice définie par le système (15); et φ le segment focal de ξ ; il viendra, en tenant compte de (18),

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= x + \frac{v + v_1}{1 + vv_1} \varphi, \\ Y &= y + i \frac{v_1 - v}{1 + vv_1} \varphi, \\ Z &= z - \frac{vv_1 - 1}{1 + vv_1} \varphi. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, imaginons le plan tangent à la surface cherchée défini par la relation

$$(20) \quad (v + v_1)X - i(v_1 - v)Y + (vv_1 - 1)Z + \xi_0 = 0.$$

ξ_0 désignant une fonction de v, v_1 qu'il s'agit de déterminer.

Portant dans l'équation (20) les valeurs des quantités X, Y, Z , définies par le système (19), et tenant compte des valeurs des quantités x, y, z, ρ , on obtient le système

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = -(1 + v_1 u)(1 + v u_1) s + v(1 + v_1 u) p + v_1(1 + v u_1) q - v v_1 \xi, \\ v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right.$$

qui détermine les coordonnées de la seconde nappe en fonction de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ . D'ailleurs, ces expressions sont toutes trois rationnelles par rapport à u, u_1, ξ et ses dérivées.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Une surface quelconque étant donnée, le système formé des rayons normaux à cette surface et des rayons réfléchis par la développée moyenne sont analytiquement séparables. Il en est de même des surfaces normales à ces congruences qui forment les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante.

Nous avons pris pour point de départ la surface ξ et nous en avons déduit la surface ξ_0 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de la première. Cette surface ξ_0 est d'ailleurs l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$(v + v_1)x + i(v_1 - v)y + (vv_1 - 1)z + \xi_0 = 0.$$

Si nous opérons sur cette équation comme nous avons fait sur celle qui définit ξ , nous en déduirons la développée moyenne de ξ_0 , puis la congruence des rayons réfléchis une seconde fois, sur la nouvelle développée et ainsi de suite indéfiniment. D'ailleurs, les éléments de ces congruences de rayons réfléchis, ainsi que de leurs surfaces dirimantes et des surfaces qui leur sont normales seront toutes définies par des expressions rationnelles des

coordonnées u, u_1, ξ de la surface primitive et des dérivées de ξ .

Nous allons établir les formules qui permettent de déduire les uns des autres ces divers systèmes de rayons. Nous allons modifier légèrement les notations précédentes. Nous désignerons par u, v les variables relatives à la première surface ξ , par $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ celles relatives aux surfaces successives $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ que nous déduirons de la première ξ .

Nous aurons donc, pour coordonnées de la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ ,

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = -(1 + v_1 u)(1 + v u_1) s + u_1(1 + u v_1) p + v_1(1 + v u_1) q - u_1 v_1 \xi, \\ u_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - v \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial v}}{t - u \frac{\partial s}{\partial v}}. \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned} du_1 &= r \left(\frac{u_1}{\frac{\partial s}{\partial u}} \right)^2 \left(r \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} dv \right), \\ dv_1 &= t \left(\frac{v_1}{\frac{\partial s}{\partial v}} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} du + t \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} dv \right). \end{aligned}$$

Si l'on considère u_1, v_1 comme des fonctions de u, v déterminées par les relations précédentes, la première des équations du système (22) définit la surface qui, associée à ξ , donne les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la développée moyenne de la proposée. Si, au contraire, nous considérons u, v comme des paramètres indépendants de u_1, v_1 , nous avons l'équation de la sphère mobile elle-même.

Calculons les dérivées premières et secondes de ξ_1 . Mais, auparavant, remarquons que, en vertu du système (22),

$$(1 + v_1 u) \left(r - v \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial v_1} = (1 + v u_1) \left(t - u \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial u_1} = \frac{rt \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Cette relation établie, nous trouvons

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 + uv_1)(p - vs) + v_1(vq - \xi), \\ q_1 &= (1 + vu_1)(q - us) + u_1(up - \xi), \\ r_1 &= (1 + v_1u) \left(r - v \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial u_1} = \frac{1 + v_1u}{u_1} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_1}, \\ t_1 &= (1 + u_1v) \left(t - u \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial v_1} = \frac{1 + vu_1}{v_1} \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_1}, \\ s_1 &= -uvs + up + vq - \xi + \frac{rt \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1v_1)}{\partial(uv)}}. \end{aligned}$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la développée moyenne de ξ_1 , par ρ_1 le segment focal de cette même surface.

Posons encore

$$\lambda = \frac{rt \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Il viendra

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - iy_1 &= v_1 s_1 - p_1 = vs - p + v\lambda, \\ x_1 + iy_1 &= u_1 s_1 - q_1 = us - q + u\lambda, \\ z_1 &= \frac{1}{2} \left[(u_1 v_1 - 1) s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(uv - 1) s - up - vq + \xi \right] + \frac{uv - 1}{2} \lambda, \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \left[(u_1 v_1 + 1) s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[(uv + 1) s - up - vq + \xi \right] + \frac{uv + 1}{2} \lambda. \end{aligned} \right.$$

La développée moyenne de ξ_1 , nouvelle surface dirimante des rayons une première fois réfléchis par la développée moyenne de ξ , étant ainsi déterminée, il nous reste à déterminer les paramètres directeurs u_2, v_2 des rayons réfléchis une seconde fois. Dans ce but, nous considérerons les plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u_1, v_1 tracées sur la développée moyenne de ξ_1 . Nous aurons les relations

$$\begin{aligned} (1 - u_2^2) dx_1 + i(1 + u_2^2) dy_1 + 2u_2 dz_1 &= 0, \\ (1 - v_2^2) dx_1 - i(1 + v_2^2) dy_1 + 2v_2 dz_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nous trouverions quatre systèmes de valeurs, comme précédemment, et nous serions amenés à poursuivre les calculs de la manière indiquée plus haut.

Nous pouvons donc résumer les résultats précédents dans la proposition suivante :

Une surface quelconque étant définie au moyen des coordonnées u, v, ξ d'O. Bonnet, on pourra exprimer, au moyen de fonctions rationnelles de u, v, ξ et des dérivées de ξ , la congruence des normales réfléchies sur la développée moyenne; la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis et formant avec ξ les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante; la congruence des rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ_1 ; la surface ξ_2 normale à ces rayons, et ainsi de suite indéfiniment.

Surfaces particulières. — Dans le cas général, la suite des congruences réfléchies sur les développées moyennes successives est illimitée. Nous nous proposons de déterminer les surfaces spéciales pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

Reprenons les formules du système (23). Si nous les considérons comme définissant la développée moyenne et le segment focal de la surface ξ_{n+1} , nous aurons le système

$$\begin{aligned} x_{n+1} - iy_{n+1} &= x_n - iy_n + \lambda_n v_n = x - iy + \lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \\ x_{n+1} + iy_{n+1} &= x_n + iy_n + \lambda_n u_n = x + iy + \lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \\ z_{n+1} &= z_n + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2} = z + \lambda \frac{uv - 1}{2} + \dots + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2}, \\ \rho_{n+1} &= -\rho_n + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2} = \pm \rho + \lambda \frac{uv + 1}{2} + \dots + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2}, \\ \lambda_n &= \frac{r_n t_n \frac{\partial^2 s_n}{\partial u_n \partial v_n}}{\frac{\partial(u_{n+1}, v_{n+1})}{\partial(u_n, v_n)}}. \end{aligned}$$

Or, dans l'hypothèse actuelle, on devra avoir

$$x_{n+1} = x, \quad y_{n+1} = y, \quad z_{n+1} = z,$$

relations qui ne seront vérifiées qu'à la condition d'avoir

$$\lambda_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 s_n}{\partial u_n \partial v_n} = 0.$$

Nous retrouvons les surfaces Ξ qui admettent pour développée moyenne les surfaces de translation.

Ainsi donc :

La suite des congruences de rayons réfléchis déduite de la congruence des normales à une surface donnée rencontrant la développée moyenne aura une limite toutes les fois qu'on sera amené à trouver une surface de translation par l'une des surfaces dirimantes.

Nous plaçant à un point de vue un peu différent, nous pouvons encore formuler cette proposition :

Les surfaces de translation, à l'exclusion de toutes les autres, jouent le rôle de surfaces dirimantes à l'égard d'un système de rayons incidents et réfléchis respectivement normaux à deux familles de surfaces, qui admettent celles-ci pour développées moyennes.

Cherchons une seconde catégorie de surfaces : celles dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.

On a pour équation des rayons de courbure de la surface proposée

$$(24) \quad r \, du^2 - t \, dv^2 = 0.$$

Après réflexion, les rayons seront normaux à la surface ξ_1 , dont l'équation des lignes de courbure pourra s'écrire

$$r_1 \, du_1^2 - t_1 \, dv_1^2 = 0.$$

Or cette équation, transformée au moyen des formules du système (22), devient

$$r \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} \, du^2 - t \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} \, dv^2 = 0.$$

Rapprochant cette équation de l'équation (24), on voit qu'il

faut avoir

$$\frac{\partial^2 \log \left(\frac{r}{t} \right)}{\partial u \partial v} = 0.$$

Si l'on désigne par U, V deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de v , l'équation précédente pourra s'écrire

$$(25) \quad Vr = Ut,$$

équation du second degré qui se ramène à l'équation à invariants égaux de Laplace.

L'équation (25) définit donc les surfaces dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.

APPLICATION.

Nous allons prendre pour point de départ la surface définie par l'équation

$$\xi = {}_2FF_1,$$

où F, F_1 désignent deux fonctions respectives de u et de u_1 , et en déduire, d'après la méthode exposée, les divers éléments géométriques qui constituent le système d'enveloppes et d'enveloppées précédemment défini.

Équations du système. — Formons d'abord les fonctions $C(u, u_1), D(u, u_1), \dots$ définies par les systèmes (5) et (13).

Il vient

$$(26) \quad \begin{cases} C(u, u_1) = [u(u_1 F'_1 - F_1) + F'_1] F, \\ D(u, u_1) = -(u F' - F)(u_1 F'_1 - F_1) - F' F'_1, \\ v = \frac{F'_1}{F_1 - u_1 F'_1}, \\ G = C + \frac{v - u}{2} \left[2 \frac{\partial C}{\partial u} + (v - u) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Les autres formules se déduisent des précédentes en affectant d'un indice les lettres qui y figurent.

Désignons par A, A', A_1, A'_1 ce que deviennent les fonctions $F,$

F', F_1, F'_1 quand on y fait

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1.$$

Il vient

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(u, \alpha_1) = [u(\alpha_1 \Lambda'_1 - \Lambda_1) + \Lambda'_1] F, \\ D(u, \alpha_1) = -(u F' - F)(\alpha_1 \Lambda'_1 - \Lambda_1) - \Lambda'_1 F', \\ v = \frac{\Lambda'_1}{\Lambda_1 - \alpha_1 \Lambda'_1} = \text{const.}, \\ G = 0. \end{array} \right.$$

On trouvera les autres relations par le procédé indiqué tout à l'heure.

Ces dernières formules montrent que, dans le cas particulier qui nous occupe, les paramètres directeurs relatifs aux rayons réfléchis se réduisent à des constantes.

D'où nous concluons que la congruence des rayons réfléchis se compose de droites parallèles, et la seconde nappe de l'enveloppe de la sphère, dont le centre décrit la surface dirimante, a un plan perpendiculaire à ces droites.

Pour obtenir les coordonnées de la surface dirimante, il nous suffirait de porter les expressions trouvées pour les fonctions $C(u, \alpha_1)$, ... et leurs dérivées dans les équations des systèmes (7) et (7)'. Toutefois, nous obtiendrons des formules plus simples en effectuant un changement de variables.

Nous poserons donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\varphi_1 - v_1 \varphi'_1}, & F_1 &= \frac{1}{\varphi - v \varphi'}, \\ u &= \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - v_1 \varphi'_1}, & u &= \frac{\varphi'}{\varphi - v \varphi'}, \end{aligned}$$

φ, φ_1 désignant deux fonctions quelconques : celle-là de v , celle-ci de v_1 , nouvelles variables substituées aux variables u, u_1 ; φ', φ'_1 désignant les dérivées de ces fonctions.

Des deux relations précédentes on déduit le système

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\varphi_1 - v_1 \varphi'_1}, & \varphi_1 &= \frac{1}{F - u F'}, \\ u &= \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - v_1 \varphi'_1}, & v_1 &= \frac{F'}{F - u F'}, \\ F' &= \frac{v_1}{\varphi_1}, & \varphi'_1 &= \frac{u}{F}, \\ u F' - F &= -\frac{1}{\varphi_1}, & v_1 \varphi'_1 - \varphi_1 &= -\frac{1}{F}, \end{aligned}$$

Les autres formules se déduisent des précédentes par la permutation des indices.

Cela posé, désignons par β, β_1 ce que deviennent les variables v, v_1 pour $u = \alpha, u_1 = \alpha_1$. Le système précédent nous permettra de calculer $C(u, \alpha_1), \dots$ en fonction des nouvelles variables et, par suite, de calculer les coordonnées des surfaces de translation à deux paramètres, développées moyennes des surfaces Ξ , ainsi que l'équation de ces surfaces.

Désignons par x, y, z les coordonnées des surfaces de translation, par ρ le segment des surfaces Ξ .

Il vient

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - iy = -\frac{\beta_1}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{v}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ x + iy = -\frac{v}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{\beta}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ z = \frac{1 - \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} + \frac{1 - \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ \rho = -\frac{1 + \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{1 + \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}. \end{array} \right.$$

Cherchons maintenant l'enveloppe de ces dernières surfaces. Nous avons dit qu'on obtient les coordonnées de cette enveloppe et le segment focal correspondant, en faisant $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$ (ce qui revient ici à faire $\beta = v, \beta_1 = v_1$) dans les formules correspondantes de l'enveloppée. Faisant donc $\beta = v, \beta_1 = v_1$ dans le système précédent, il viendra

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{v + v_1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ y = -i\frac{v_1 - v}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ z = -\frac{vv_1 - 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ \rho = \frac{vv_1 + 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}. \end{array} \right.$$

Les développées moyennes enveloppes et enveloppées étant ainsi déterminées, cherchons les surfaces enveloppes et enveloppées qui admettent ces développées moyennes.

Pour obtenir les surfaces enveloppées qui sont ici des surfaces Ξ ,

il suffit de porter les expressions $C(u, \alpha_1), \dots$ définies par le système (27) dans l'équation (9).

Il vient

$$\xi = [\Lambda_1 + (u_1 - \alpha_1)\Lambda'_1]F + [\Lambda + (u - \alpha)\Lambda']F_1.$$

Nous reconnaissons les surfaces Ξ définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe de ces surfaces, nous devons faire $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ dans l'équation de ξ . Nous trouvons immédiatement

$$\xi = 2FF_1,$$

qui est notre équation du point de départ.

Les lignes de courbure de ξ sont données par l'équation

$$[\Lambda_1 + (u_1 - \alpha_1)\Lambda'_1]F'' du^2 = [\Lambda + (u - \alpha)\Lambda']F''_1 du_1^2.$$

Pour obtenir les lignes de courbure de ξ enveloppes des lignes de courbure de ζ , nous devons faire encore ici $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ et nous trouvons

$$F_1 F'' du^2 = F F''_1 du_1^2.$$

Nous venons de voir comment, la surface $\xi = 2FF_1$ étant donnée, on en déduit les divers éléments des systèmes géométriques que nous avons étudiés. Il nous reste à étudier séparément les surfaces qui en font partie.

Surfaces de translation. — Désignons comme précédemment par x, y, z les coordonnées de ces surfaces, coordonnées définies par le système (28); par ρ le segment focal correspondant; par $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1$ les coordonnées respectives des courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface.

Du système (28) on tire les relations

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1^2)X - i(1 + \beta_1^2)Y + 2\beta_1 Z &= 0, \\ (1 - \beta^2)X + i(1 + \beta^2)Y + 2\beta Z &= 0. \end{aligned}$$

Nous déduisons de ces équations que les courbes, lieux des extrémités du segment mobile, sont deux courbes quelconques, tracées dans deux plans isotropes.

Nous avons montré (1) que ces surfaces étaient toutes définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Les coordonnées des surfaces de translation définies par (28) vérifient les relations

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1^2)x - i(1 + \beta_1^2)y + 2\beta_1 z + \frac{(1 + \beta\beta_1)(v_1 - \beta_1)}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)} &= 0, \\ (1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y + 2\beta z + \frac{(1 + \beta\beta_1)(v - \beta)}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous remarquons que v , v_1 sont des fonctions respectives de u_1 et de u , nous nous rendons compte aisément que les équations précédentes définissent deux familles de plans isotropes coupant les surfaces de translation, suivant le réseau (u, u_1) des courbes génératrices.

Nous en concluons que le réseau (u, u_1) , formé par les courbes génératrices des surfaces de translation considérées, se compose de courbes planes, intersections de la surface par deux familles de plans isotropes parallèles.

Si nous considérons maintenant le système de rayons incidents et réfléchis qui admettent ces surfaces de translation pour surfaces dirimantes, nous voyons que l'une des congruences est formée de rayons parallèles.

Pour s'en assurer, il suffit de se rappeler que les quantités v , v_1 (2) sont ici des constantes.

Considérons le système des deux rayons incidents et réfléchis qui se rencontrent en un point de la surface dirimante. Ces rayons, nous l'avons vu, sont les intersections de plans isotropes tangents en un même point, à deux courbes du réseau (u, u_1) . Or l'un de ces rayons sera déterminé par l'intersection des deux plans isotropes qui contiennent les deux courbes passant par le point d'incidence. L'autre rayon sera formé par l'intersection de deux

(1) Thèse de doctorat.

(2) Nous parlons ici des quantités v , v_1 définies par le système (27) et non de celles que nous avons désignées ailleurs par les mêmes lettres.

autres plans isotropes tangents aux deux courbes sans les contenir.

On déduit de là un mode de construction des rayons non parallèles :

Soit donnée une surface de translation définie par le système (28) et, sur cette surface, un point arbitraire. Pour obtenir la direction des rayons incidents et réfléchis passant par ce point, on pourra procéder comme il suit. On déterminera les plans des deux courbes génératrices passant par ce point. L'intersection de ces plans donnera le rayon incident. En déterminant les deux autres plans isotropes tangents aux mêmes courbes, on obtiendra le rayon réfléchi qui sera formé par leur intersection.

Nous venons d'étudier la nature d'une surface de translation définie par le système (28). Il nous reste à caractériser la variation de ces surfaces quand varient les paramètres α , α_1 . Il suffit de répéter ici ce que nous avons dit du cas général en remarquant que les deux familles de plans isotropes dont nous parlions alors se composent actuellement de plans parallèles contenant les courbes correspondantes. Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

Soient données deux courbes variables assujetties à se rencontrer constamment, tandis que les plans isotropes qui les contiennent se déplacent parallèlement à eux-mêmes, le point de rencontre de ces courbes décrira l'enveloppe des surfaces de translation, lieux du milieu du segment qui les relie.

Ces surfaces de translation seront celles que définit le système (28).

Enveloppes des surfaces de translation. — Nous avons vu que les coordonnées de ces surfaces sont définies par le système (29), qu'on obtient en faisant $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$ dans le système (28).

On tire du système (29)

$$(30) \quad \varphi^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous voyons par cette équation que le segment focal de la sur-

face ξ , dont la surface de coordonnées x, y, z est la développée moyenne, est égal au rayon vecteur de celle-ci.

D'où nous tirons cette conclusion :

Si l'on assujettit le centre d'une sphère passant par un point fixe à décrire la surface de translation définie par le système (29), l'enveloppe de cette sphère admettra la surface lieu de son centre pour développée moyenne.

La relation (30) caractérise l'ensemble des surfaces, pour lesquelles le système (29) est vérifié.

En effet, ξ désignant une surface quelconque, ρ son segment focal, x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, on a l'identité

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

La relation (30) est donc équivalente à l'équation

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = 0,$$

dont la fonction

$$\xi = 2FF_1$$

donne la solution générale.

Du système (29) on déduit les relations

$$\begin{aligned} (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz &= 0, \\ (1 - v_1^2)x + i(1 + v_1^2)y + 2v_1z &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se rappelle que v, v_1 sont deux fonctions respectives de u_1 et de u , on en conclut que les deux familles de plans isotropes définies par le système précédent découpent la surface définie par le système (29) suivant un réseau (u, u_1) .

Ainsi donc le réseau (u, u_1) relatif à la surface considérée est formé de l'ensemble des courbes planes tracées dans les deux familles de plans isotropes passant par un point fixe.

Considérons maintenant le système des rayons incidents et réfléchis relatifs à la surface proposée.

Ces congruences de rayons étant respectivement normales aux

deux nappes de la sphère passant par un point fixe, l'une de ces congruences passera par ce point.

Ainsi donc la congruence des normales à la surface $\xi = 2FF_1$ se réfléchit suivant des directions convergentes.

D'après ce que nous venons de dire, on voit comment, d'un système à deux paramètres de rayons réfléchis dans des directions parallèles, on déduit immédiatement un système de rayons réfléchis dans des directions convergentes. Les divers éléments géométriques du premier système ont pour enveloppes respectives les éléments correspondants du second, et l'on obtiendra les équations de ceux-ci en égalant les paramètres arbitraires aux variables dans les équations de ceux-là.

Pour

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} = 0,$$

on trouve

$$x = y = z = \rho.$$

Si l'on remarque que le centre de convergence des rayons n'est autre que l'origine, on sera amené à conclure que les normales de la surface ξ convergent après réflexion sur la développée moyenne en un point commun à ξ et à la surface dirimante.

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. FÉLIX LUCAS.

Soit

$$(1) \quad f(z) = A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_{p-1} z + A_p$$

un polynome de degré p , à coefficients réels ou imaginaires.

Formons l'expression

$$(2) \quad \Delta_x f(z) = pf(z) - (z - x)f'(z);$$

c'est un polynome du degré $(p - 1)$ en z et du premier degré en x , que nous appellerons la *dérivée modulaire* (module x) de $f(z)$.

En opérant m fois de suite cette sorte de dérivation, nous ob-

tiendrons la $m^{\text{ième}}$ dérivée modulaire

$$(3) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{p-\theta}^p \frac{1}{P_0} (z-\alpha)^{\theta} f^{(\theta)}(z);$$

c'est un polynome du degré $(p-m)$ en z et du degré m en α . On peut considérer ce polynome comme la somme de $(p-m+1)(m+1)$ termes et écrire

$$(4) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{k=m} b_{h,k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Proposons-nous de déterminer la valeur du coefficient $b_{h,k}$.

A cet effet, commençons par développer le second membre de (3), suivant les puissances décroissantes de z , en posant

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m (B_0 z^{p-m} + B_1 z^{p-m-1} + \dots \\ \quad + B_h z^{p-m-h} + \dots + B_{p-m-1} z + B_{p-m}), \end{array} \right.$$

chacun des coefficients B désignant un polynome en α du degré m .

Nous voyons immédiatement que

$$(6) \quad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [D_z^{p-m-h} \Delta_{\alpha}^m f(z)]_{z=0},$$

D étant le symbole de la dérivation ordinaire.

Or on a identiquement

$$D_z \Delta_{\alpha} f(z) = (p-1) f'(z) - (z-\alpha) f''(z) = \Delta_{\alpha} D_z f(z);$$

d'où, plus généralement,

$$(7) \quad D_z^n \Delta_{\alpha}^m f(z) = \Delta_{\alpha}^m D_z^n f(z) = \Delta_{\alpha}^m f^{(n)}(z);$$

on peut donc transposer les signes D et Δ .

Appliquant cette observation à la formule (6), nous trouvons

$$(8) \quad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [\Delta_{\alpha}^m f^{(p-m-h)}(z)]_{z=0}.$$

Comme $f^{(p-m-h)}(z)$ est un polynome du degré $(m+h)$, nous avons

$$(9) \quad \Delta_{\alpha}^m f^{(p-m-h)}(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{m+h-\theta}^h \frac{1}{P_0} (z-\alpha)^{\theta} f^{(p-m-h+\theta)}(z),$$

doit être q au lieu de $p - m$ si q est le plus petit de ces deux nombres.)

Par conséquent :

Le coefficient de chaque terme du degré $p - q$ dans une dérivée modulaire de degré quelconque est égal au coefficient du terme du même degré dans $f(z)$ multiplié par un facteur simplement numérique.

Si le terme du degré $(p - q)$ manque dans $f(z)$, le polynôme du même degré manque dans toutes ses dérivées modulaires.

Reportons-nous à la formule (3) et faisons $\alpha = z$; tous les termes du second membre s'annuleront, à l'exception de celui qui correspond à $\theta = 0$; par conséquent,

$$(15) \quad [\Delta_{\alpha}^m f(z)]_{\alpha=z} = (-1)^m P_m C_p^{p-m} f(z);$$

le coefficient de z^{p-q} est donc

$$(-1)^m P_m C_p^{p-m} A_q.$$

D'autre part, en faisant $\alpha = z$ dans le polynôme du degré $p - q$, en α et z , indiqué plus haut, nous trouvons pour coefficient de z^{p-q}

$$(-1)^m P_m A_q \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h}.$$

Égalant ces valeurs d'un même coefficient, nous obtenons cette formule (peu connue, bien qu'elle ne soit pas nouvelle)

$$(16) \quad \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h} = C_p^{p-m},$$

dans laquelle il faut regarder comme nulle la valeur de tout coefficient C dont l'indice supérieur serait négatif.

Nous allons maintenant indiquer une propriété remarquable des dérivées modulaires.

A cet effet, reprenons la formule (13) en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\Delta_{\alpha}^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^m C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^k A_{h+k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Le second membre ne change pas si l'on permute $p - m$ et m , z et x . Par conséquent,

$$\frac{\Delta_x^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \frac{\Delta_z^{p-m} f(x)}{(-1)^{p-m} P_{p-m}}.$$

Soit, sous une forme plus simple, la formule remarquable

$$(17) \quad (-1)^p P_{p-m} \Delta_x^m f(z) = P_m \Delta_z^{p-m} f(x).$$

Remplaçons dans le second membre $\Delta_z^{p-m} f(x)$ par le second membre de l'équation (3), dans lequel nous permuterons z et x , m et $p - m$. Nous obtiendrons pour $\Delta_x^m f(z)$ l'expression nouvelle

$$(18) \quad \Delta_x^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=p-m} (-1)^\theta C_{p-\theta}^m \frac{1}{P_\theta} (x-z)^\theta f^{(\theta)}(x).$$

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. FÉLIX LUCAS.

Dans une précédente Communication, nous avons donné le nom de *dérivée modulaire* (module α) du polynome $f(z)$, du degré p , à la fonction

$$(1) \quad \Delta_\alpha f(z) = pf(z) - (z - \alpha)f'(z),$$

et nous avons étudié les dérivations modulaires successives faites avec conservation du module.

Nous allons étudier aujourd'hui les dérivations modulaires successives faites avec changement du module.

On a identiquement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_\beta \Delta_\alpha f(z) &= \Delta_{\alpha, \beta}^2 f(z) = p(p-1)f(z) - (p-1) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha) \\ + (z-\beta) \end{matrix} \right\} f'(z) \\ &\quad + (z-\alpha)(z-\beta)f''(z); \end{aligned} \right.$$

cette fonction étant symétrique relativement à α et β , on voit que l'on peut intervertir l'ordre des dérivations.

On a ensuite

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma}^3 f(z) &= p(p-1)(p-2)f(z) - (p-1)(p-2) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha) \\ + (z-\beta) \\ + (z-\gamma) \end{matrix} \right\} f'(z) \\ &\quad + (p-2) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha)(z-\beta) \\ + (z-\beta)(z-\gamma) \\ + (z-\gamma)(z-\alpha) \end{matrix} \right\} f''(z) - (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)f'''(z). \end{aligned} \right.$$

La loi de formation est simple; le résultat des dérivations successives pour une série de m modules $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ est

$$(4) \quad \Delta_{\alpha, \beta, \dots, \lambda}^m f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta \Lambda_{p-\theta}^{m-\theta} S_\theta f^{(\theta)}(z);$$

dans cette formule S_θ désigne la somme des produits θ à θ des m binomes $(z - \alpha), (z - \beta), \dots, (z - \lambda)$; $\Lambda_{p-\theta}^{m-\theta}$ désigne le nombre des arrangements de $(p - \theta)$ objets $(m - \theta)$ à $(m - \theta)$. Conventionnellement $S_0 = 1$.

Nous pouvons poser

$$(5) \quad (z - \alpha)(z - \beta) \dots (z - \lambda) = \varpi(z);$$

$\varpi(z)$ sera un polynome du degré m dont le terme du degré le plus élevé a pour coefficient l'unité. Nous écrirons alors symboliquement

$$(6) \quad \Delta_{\alpha, \beta, \dots, \lambda}^m f(z) = \Delta_{(\varpi)}^m f(z)$$

pour désigner le résultat des m dérivations modulaires successives faites avec les m racines de l'équation $\varpi(z) = 0$.

On a identiquement

$$\begin{aligned} S_m &= \varpi(z), \\ S_{m-1} &= \varpi'(z); \end{aligned}$$

pour obtenir S_{m-2} , nous remarquons que cette somme des produits $(n - 2)$ à $(n - 2)$ des m binomes $(z - \alpha), (z - \beta), \dots, (z - \lambda)$ contient $\frac{n(n-1)}{2}$ termes, tandis que $\varpi''(z)$ contient deux fois ce nombre de termes; par conséquent

$$S_{m-2} = \frac{1}{1.2} \varpi''(z);$$

on trouve ensuite

$$S_{m-3} = \frac{1}{1.2.3} \varpi'''(z),$$

et généralement

$$(7) \quad S_\theta = S_{m-(m-\theta)} = \frac{1}{P_{m-\theta}} \varpi^{(m-\theta)}(z),$$

en désignant, suivant l'usage, par $P_{m-\theta}$ la factorielle

$$1.2.3 \dots (m - \theta).$$

Avec ces notations nouvelles, la formule (4) devient

$$(8) \quad \Delta_{(\varpi)}^m f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta C_{p-\theta}^{m-\theta} \varpi^{(m-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z),$$

$C_{p-\theta}^{m-\theta}$ désignant le nombre des combinaisons de $(p-\theta)$ objets $(m-\theta)$ à $(m-\theta)$.

Il est intéressant de considérer le cas où $\varpi(z)$ est du même degré que $f(z)$, c'est-à-dire le cas où m est égal à p . La formule précédente devient alors

$$(9) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \varpi^{(p-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z).$$

Nous avons, d'ailleurs, par la formule (7), dans laquelle nous remplaçons m par p ,

$$(10) \quad \varpi^{p-\theta}(z) = P_{p-\theta} S_\theta.$$

De même, en admettant que le polynome $f(z)$ ait l'unité pour coefficient de son terme du plus haut degré et en désignant par $T_{p-\theta}$ la somme des produits $(p-\theta)$ à $(p-\theta)$ des p facteurs binomes de ce polynome, on a

$$(11) \quad f^{(\theta)}(z) = P_\theta T_{p-\theta}.$$

La formule (9) peut, par conséquent, s'écrire sous la forme

$$(12) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta P_{p-\theta} P_\theta S_\theta T_{p-\theta}.$$

Comme chaque dérivation modulaire abaisse d'une unité le degré du polynome $f(z)$, le second membre de cette formule (12) doit être du degré *zéro*; en d'autres termes, ce second membre doit se réduire à une constante. Par conséquent, les coefficients de toutes les puissances de z doivent être identiquement nuls.

Pour déterminer ces coefficients, désignons par

$$s_1, \quad s_2, \quad \dots, \quad s_p$$

les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, ..., p à p des p racines de

l'équation $\varpi(z) = 0$, et, de même, par

$$t_1, \quad t_2, \quad \dots, \quad t_p$$

les sommes de produits analogues pour les racines de l'équation $f(z) = 0$, Nous aurons alors

$$(13) \quad \begin{cases} S_0 = C_p^0 \left[z_0 - \frac{0}{p} s_1 z_0^{-1} + \frac{0(0-1)}{p(p-1)} s_2 z_0^{-2} \dots \right], \\ T_{p-0} = C_p^{p-0} \left[z^{p-0} - \frac{p-0}{p} t_1 z^{p-0-1} + \frac{(p-0)(p-0-1)}{p(p-1)} t_2 z^{p-0-2} \dots \right], \end{cases}$$

et, par suite,

$$(14) \quad S_0 T_{p-0} = C_p^0 C_p^{p-0} \left\{ \begin{aligned} & z^p - \left(\frac{0}{p} s_1 + \frac{p-0}{p} t_1 \right) z^{p-1} \\ & + \left[\frac{0(0-1)}{p(p-1)} s_2 + \frac{0}{p} \frac{p-0}{p} s_1 t_1 + \frac{(p-0)(p-0-1)}{p(p-1)} t_2 \right] z^{p-2} \\ & + \dots \end{aligned} \right.$$

En portant cette valeur de $S_0 T_{p-0}$ dans la formule (12) et exprimant ensuite que les coefficients des diverses puissances de z sont nuls, nous obtiendrons les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^2 A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

que nous pouvons réunir dans l'équation générale

$$(16) \quad \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^m A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0,$$

l'exposant m désignant n'importe lequel des nombres entiers 0, 1, 2, ..., $(p-1)$.

Divisons le premier membre de cette équation par la constante P_p et posons pour simplifier les écritures

$$(17) \quad (-1)^\theta \frac{A_p^\theta A_p^{p-\theta}}{P_p} = x_\theta;$$

modulaire

$$\Delta_{(\varpi)}^p f(z).$$

Le second membre de cette formule se réduit à son terme constant, que l'on obtient en faisant $z = 0$; on trouve, par conséquent,

$$(20) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta P_{p-\theta} P_\theta s_\theta t_{p-\theta}.$$

Il est intéressant d'examiner le cas où le polynôme $\varpi(z)$ ne diffère pas de $f(z)$. Nous obtenons ainsi la $p^{\text{ième}}$ dérivée modulaire de $f(z)$ relativement à ses p racines

$$(21) \quad \Delta_{(f)}^p f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta P_{p-\theta} P_\theta t_\theta t_{p-\theta},$$

t_m désignant la somme des produits m à m des p racines de $f(z)$.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = z^p - 1,$$

la dérivée modulaire prise relativement à toutes les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité se réduit à zéro si p est impair et à -2 si p est pair.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = (z - \alpha)^p,$$

la dérivée modulaire considérée est toujours nulle, car on a

$$\Delta_{(f)}^p = \Delta_\alpha^p (z - \alpha)^p = (-1)^p (z - \alpha)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \Lambda_p^\theta \Lambda_p^{p-\theta} = 0.$$

Ce dernier exemple concerne les dérivées modulaires sans changement de module dont nous avons parlé dans notre précédente Communication. Voici une remarque nouvelle au sujet de ces dérivées.

Posons

$$(22) \quad \frac{f'(z)}{(z - \alpha)^p} = \varphi(z),$$

$f(z)$ désignant un polynome du degré p . On a identiquement

$$(23) \quad \begin{cases} \Delta_x f(z) = (-1)(z - \alpha)^{p+1} \varphi'(z), \\ \Delta_x^2 f(z) = (-1)^2 (z - \alpha)^{p+1} [2\varphi'(z) + (z - \alpha)\varphi''(z)], \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

et généralement

$$(24) \quad \Delta_x^m f(z) = (-1)^m (z - \alpha)^{p+1} \left\{ \begin{array}{l} b_{m,1} \varphi'(z) + b_{m,2} (z - \alpha) \varphi''(z) + \dots \\ + \dots\dots\dots + b_{m,h} (z - \alpha)^{h-1} \varphi^{(h)}(z) + \dots \\ + \dots\dots\dots + b_{m,m} (z - \alpha)^{m-1} \varphi^{(m)}(z) \end{array} \right\},$$

les $b_{m,h}$ désignant des coefficients numériques. La loi de formation de ces nombres est représentée par la formule

$$(25) \quad b_{m,h} = (m + h - 1)b_{m-1,h} + b_{m-1,h-1};$$

on a d'ailleurs

$$b_{m,1} = P_m \quad \text{et} \quad b_{m,m} = 1.$$

On peut former ainsi avec ces nombres le triangle suivant :

	1	2	3	4	5	6	h
1	1						
2	2	1					
3	6	6	1				
4	24	36	12	1			
5	120	240	120	20	1		
6	720	1800	1200	300	30	1	
	...			...	..	.	
m							

Un nombre quelconque de ce triangle est égal au produit du nombre placé au-dessus de lui par la somme des rangs de la ligne et de la colonne de ce terme, augmenté du nombre qui précède celui-ci dans la même ligne.

C'est une loi de formation beaucoup moins simple que celle des nombres du triangle arithmétique de Pascal.

SUR LA RÉOLUTION NOMOGRAPHIQUE GÉNÉRALE DES TRIANGLES SPHÉRIQUES;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Nous avons naguère fait remarquer ⁽¹⁾ que tous les cas de résolution des triangles sphériques (désignés par ABC) pouvaient se ramener à l'usage de la formule unique

$$\cos t = \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos T,$$

où t, u, v sont remplacés soit par les diverses permutations de a, b, c (T prenant l'une des valeurs A, B, C), soit par les diverses permutations de $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ (T prenant l'une des valeurs $\pi - a, \pi - b, \pi - c$). Si donc la formule précédente est traduite par un nomogramme sur lequel on puisse prendre à volonté pour inconnue l'une des quatre variables t, u, v, T , ce nomogramme unique pourra servir à la résolution des triangles sphériques dans tous les cas possibles. Un tel nomogramme nous a été fourni par la méthode des points alignés ⁽²⁾. L'équation ci-dessus mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos t & 1 \\ 1 & -\cos T & 1 \\ \sin u \sin v - 1 & \cos u \cos v & \sin u \sin v + 1 \end{vmatrix} = 0$$

exprime l'alignement des trois points

$$\begin{array}{ll} (t) & x = -1, \quad y = \cos t, \\ (T) & x = 1, \quad y = -\cos T, \\ (u, v) & x = \frac{\sin u \sin v - 1}{\sin u \sin v + 1}, \quad y = \frac{\cos u \cos v}{\sin u \sin v + 1}, \end{array}$$

ce dernier point étant fourni par la rencontre des deux ellipses

⁽¹⁾ *Bulletin astronomique*, t. XI, 1894, p. 5.

⁽²⁾ Voir la Note citée du *Bulletin astronomique* et notre *Traité de Nomographie* (p. 329). On trouvera là tous les détails relatifs à la construction du nomogramme, ainsi que l'indication de la règle précise qui permet de discerner parmi les points communs aux ellipses (u) et (v) celui qui doit être pris sur l'alignement.

correspondant aux cotes $\alpha = u$ et $\alpha = v$ dans le système unique

$$(\alpha) \quad \frac{(1+x)^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{4y^2}{\cos^2 \alpha} = (1-x)^2,$$

inscrit dans le quadrilatère formé par les quatre droites

$$y = \pm 1, \quad y = \pm x.$$

Cette solution est évidemment, au point de vue théorique, la plus satisfaisante. Mais, pratiquement, on lui préférera, lorsque le choix sera possible, celle que nous avons fait connaître précédemment ⁽¹⁾ en vue d'un problème particulier (celui de la distance sphérique de deux points de la mappemonde, définis par leurs coordonnées géographiques). On obtient cette autre solution en mettant, ainsi que l'a proposé M. Collignon, l'équation ci-dessus sous la forme

$$2 \cos t = (1 + \cos T) \cos(u - v) + (1 - \cos T) \cos(u + v).$$

Si on l'écrit

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(u + v) & 1 \\ 1 & \cos(u - v) & 1 \\ \cos T & \cos t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit qu'elle exprime l'alignement des points

$$\begin{aligned} (u + v) \quad x &= -1, & y &= \cos(u + v), \\ (u - v) \quad x &= 1, & y &= \cos(u - v), \\ (t, T) \quad x &= \cos T, & y &= \cos t. \end{aligned}$$

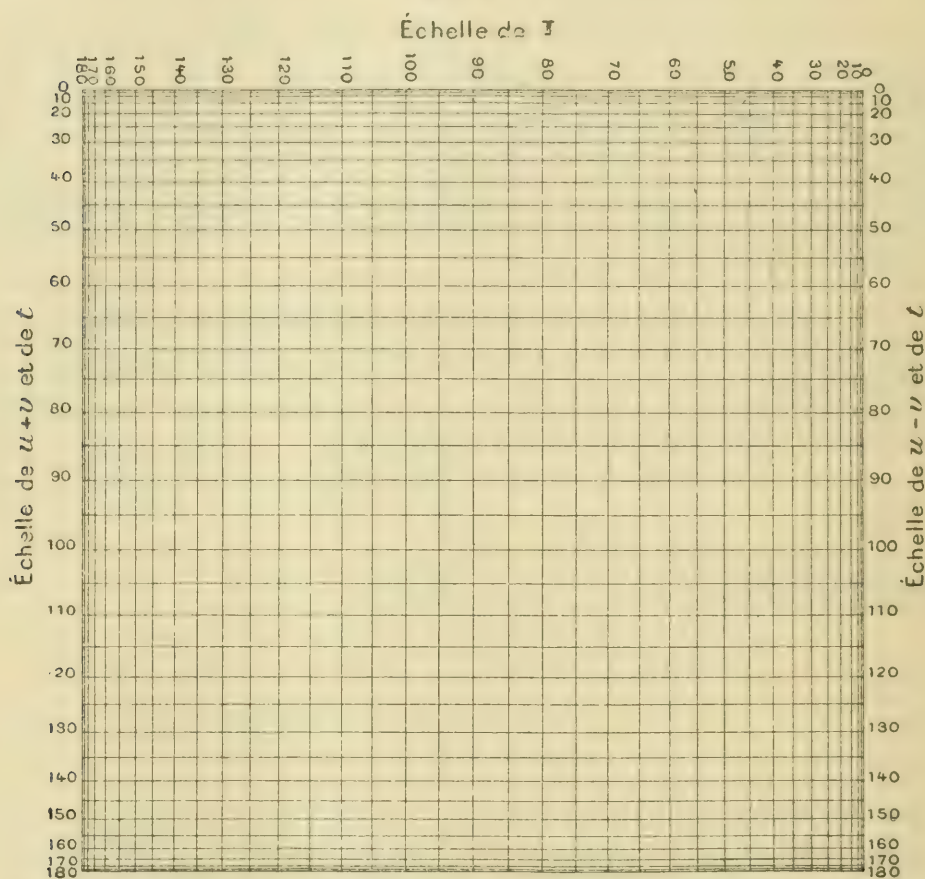
Ces formules définissent l'abaque ici représenté (*fig. 1*) (à une échelle réduite pour se plier aux nécessités du format) dont la construction est des plus simples : il s'obtient en joignant deux à deux par des parallèles à Ox et à Oy les points d'égale division d'un cercle ayant son centre à l'origine. Son emploi résulte de l'énoncé : *la droite joignant le point $(u + v)$ au point $(u - v)$ passe par*

⁽¹⁾ *Nomographie*, 1891, p. 84, et *Traité de Nomographie*, p. 327. Une erreur s'est glissée à cet endroit, provenant d'une confusion entre les latitudes λ et λ' de la première formule du n° 123 et les colatitudes correspondantes. Toutes les valeurs de λ et λ' données à la page 329 doivent donc être remplacées par leurs compléments.

le point de rencontre de la parallèle (t) à Ox et de la parallèle (T) à Oy .

Il est inutile d'insister sur la simplicité de construction de cet abaque comparé au précédent. Son infériorité tient à ce que u et v n'y entrant pas directement, mais seulement dans les graduations $(u + v)$ et $(u - v)$, ni l'une ni l'autre de ces variables n'y peut être prise pour inconnue. L'abaque ne peut fournir que la valeur de t ou de T ; par suite, il ne peut servir *directement* à la résolu-

Fig. 1.



tion d'un triangle sphérique que si les données comprennent trois éléments de même espèce (les trois côtés ou les trois angles) ou trois éléments consécutifs (deux côtés et l'angle compris ou deux angles et le côté contigu). Les cas où les données comprennent deux éléments de même espèce et l'élément opposé à l'un d'eux échappent à l'usage de cet abaque.

Or, telle est sa simplicité, que nous avons cherché s'il n'y aurait pas moyen, à l'aide de quelque artifice, de le faire encore servir en pareil cas.

Nous avons, en effet, fait connaître dernièrement un tel procédé ⁽¹⁾ sur lequel nous allons revenir ici avec plus de détail.

Ce procédé repose sur la considération de ce que nous proposerons d'appeler les *triangles annexes* du triangle sphérique envisagé.

Si $A'B'C'$ est le triangle supplémentaire de ABC , nous appelons *éléments homologues* de ces deux triangles ceux qui, à l'accentuation près, sont désignés par les mêmes lettres. Par exemple, le sommet A est l'homologue de A' , le côté AB l'homologue de $A'B'$, ... Ceci posé, *tout triangle annexe du triangle ABC sera un triangle formé par deux éléments de même espèce de ABC et l'homologue de l'un d'eux dans $A'B'C'$* . En associant ainsi deux à deux les sommets de ABC , on obtient six triangles annexes, et de même six autres au moyen des côtés ⁽²⁾.

La considération de trois de ces triangles annexes permet, dans chaque cas, d'obtenir trois angles auxiliaires déterminables par l'abaque ci-dessus et qui ramènent la résolution du triangle à un cas où l'on connaît trois éléments consécutifs, par conséquent à un de ceux où l'emploi de l'abaque fournit immédiatement la solution.

Soient donnés, par exemple, pour rendre les idées plus claires, les côtés $BC = a$, $CA = b$ et l'angle A (*fig. 2*). Considérons le triangle annexe formé par les côtés AB et AC de l'angle donné avec l'homologue $A'B'$ de celui de ces côtés dont la grandeur n'est pas connue. Pour cela, prolongeons les grands cercles AC et AB jusqu'en leurs rencontres C_1 et B_1 avec le grand cercle $A'B'$. Dans le triangle AB_1C_1 l'angle A est égal à l'angle A de ABC , le côté AC_1 à $\frac{\pi}{2} - b$, l'angle C_1 à $\frac{\pi}{2}$, puisque C est le pôle de $A'B'$. Donc, en prenant

$$t = \pi - B_1, \quad u = \pi - A, \quad v = \frac{\pi}{2}, \quad T = \frac{\pi}{2} + b,$$

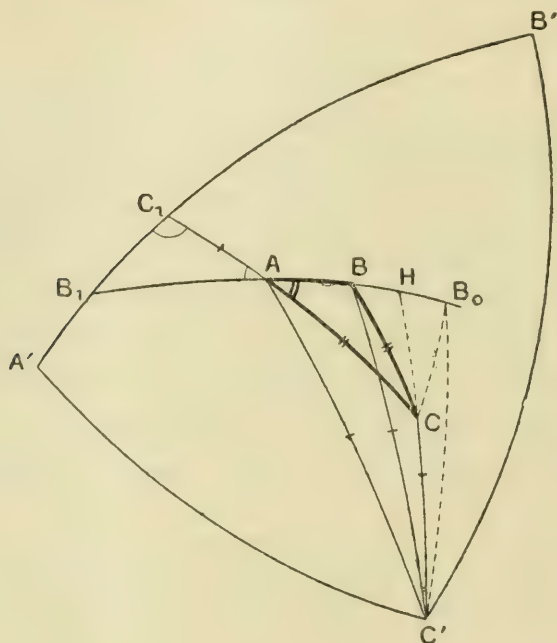
on aura, par l'abaque, la valeur de B_1 .

⁽¹⁾ *Comptes rendus* du 11 janvier 1904, p. 70.

⁽²⁾ Il y a douze manières de donner dans un triangle deux éléments de même espèce et l'élément de l'autre espèce opposé à l'un d'eux, d'où, par permutation, l'emploi, dans les conditions indiquées ici sur un exemple particulier, des douze triangles annexes.

Considérons maintenant les deux triangles annexes formés chacun par les deux extrémités d'un des côtés donnés et l'homologue de celle de ces extrémités qui est opposée au côté inconnu, c'est-à-dire les triangles ACC' et BCC' . Dans chacun d'eux on connaît les trois côtés, attendu que leur côté commun CC' est égal à l'angle B , qui vient d'être obtenu comme joignant les pôles

Fig. 2.



des deux grands cercles AB et $A'B'$ qui comprennent cet angle, et qu'on a, en outre,

$$CA = b, \quad CB = a, \quad C'A = C'B = \frac{\pi}{2},$$

Donc, en prenant successivement

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad u = b, \quad v = B_1, \quad T = \widehat{ACC'},$$

et

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad u = a, \quad v = B_1, \quad T = \widehat{BCC'},$$

on aura, par l'abaque, les valeurs des angles ACC' et BCC' dont la différence est précisément l'angle C du triangle ABC . Dès lors, connaissant dans celui-ci les côtés CA , CB et l'angle C compris, on est ramené à un cas que l'abaque permet de résoudre complètement.

Nous avons supposé l'angle B inconnu obtus. Si H est le point où le grand cercle CC' rencontre AB, le point B tombe entre A et H, et l'on a bien

$$G = BCC' - ACC'.$$

Mais il y a une seconde solution correspondant à l'hypothèse de B aigu. Dans ce cas, la disposition est celle que définit le point B₀; l'angle B₀CC' a bien la même valeur que l'angle BCC', mais on a alors

$$G = 2\pi - (ACC' + B_0CC').$$

En pratique, on a généralement le moyen de savoir d'avance si l'angle en B est aigu ou obtus, et, par suite, de décider laquelle de ces deux solutions il convient d'adopter.

Remarquons en terminant que la solution générale ci-dessus, qu'il était important de mettre en évidence au point de vue théorique, ne supprime pas l'intérêt que peuvent offrir des abaques visant tel ou tel problème particulier réductible à une résolution de triangle sphérique.

Quand nous disons que l'abaque général résout tous les cas, nous entendons par là qu'il permet, pour n'importe quel cas, d'obtenir, dans un certain ordre, les trois éléments inconnus. Or, dans la plupart des problèmes d'application, on n'a besoin que d'un seul de ces trois éléments et, si ce n'est pas le premier de ceux que donnerait l'abaque général, il y a intérêt à construire un abaque particulier qui le donne directement. Nous avons déjà, pour notre part, fait connaître un certain nombre de tels abaques. Nous tenons à signaler aujourd'hui celui que, toujours par application de la méthode des points alignés, vient de construire M. le lieutenant de vaisseau Perret pour le calcul de l'azimut en mer. Le tableau ainsi obtenu, de quelques décimètres carrés, renferme des solutions beaucoup plus étendues que les volumineuses Tables employées pour cet objet jusqu'à ce jour, et dont la meilleure, celle de Decante, ne comprend pas moins de sept Volumes, tout en ne convenant qu'aux astres compris entre -48° et $+48^\circ$ de déclinaison.

M. Perret est d'ailleurs l'auteur de nombreuses applications de la Nomographie à l'Astronomie pratique, parmi lesquelles celles qui visent la prédiction des occultations et la préparation des

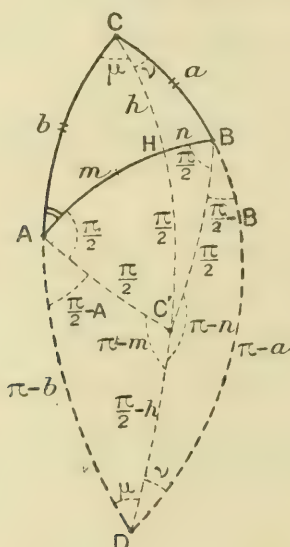
observations à l'astrolabe à prisme méritent aussi une mention spéciale.

Addendum.

Depuis la communication de cette Note, M. G. Pesci, Professeur à l'Académie navale de Livourne, après avoir pris connaissance de notre Note des *Comptes rendus*, nous a adressé une autre solution du même problème que nous tenons à joindre à la nôtre.

Soient D le point diamétralement opposé au sommet C sur la sphère et CHD le grand cercle orthogonal à AB. Le pôle C' de AB

Fig. 3.



se trouve sur CD et les grands cercles C'A et C'B sont orthogonaux sur AB.

Dans l'hypothèse de $B < \frac{\pi}{2}$, appelons m et n les segments déterminés par le grand cercle CHD sur AB, μ et ν les angles qu'il fait avec CA et CB.

Dans le triangle DAC' on connaît trois éléments consécutifs, savoir l'angle en A, égal à $\frac{\pi}{2} - A$, et les deux côtés qui le comprennent, $AD = \pi - b$, $AC' = \frac{\pi}{2}$. L'abaque permet alors de calculer les trois autres éléments du triangle, savoir : le côté C'D, l'angle en C' égal à $\pi - m$ (d'où m) et l'angle en D égal à μ .

C'D venant d'être calculé, on connaît les trois côtés du triangle DBC'. L'abaque permet alors d'en calculer les trois angles, savoir $\frac{\pi}{2} - B$ (d'où B), $\pi - n$ (d'où n) et γ .

On a enfin

$$AB = m + n \quad \text{et} \quad C = \mu + \gamma.$$

Si B est obtus il faut prendre

$$AB = m - n, \quad C = \mu - \gamma.$$

SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE DANS LESQUELS LES DIFFÉRENTS POINTS DE LA FIGURE DÉCRIVENT DES COURBES SPHÉRIQUES;

Par M. LUCIEN LÉVY.

I. On doit à M. Darboux un beau théorème sur le mouvement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes *planes* ⁽¹⁾. M. Mannheim a en outre démontré que *tous les points d'une droite décrivent des lignes sphériques dont les centres sont dans un même plan si quatre points de la droite jouissent de cette propriété. Le lieu des centres des sphères qui contiennent les lignes sphériques est une conique* (*Principes de Géométrie cinématique*, p. 180). Il en résulte immédiatement que, dans le cas général, si tous les points d'une droite décrivent des lignes sphériques, le lieu des centres des sphères est une cubique gauche, puisque ce lieu ne peut pas être coupé par un plan en quatre points sans en faire entièrement partie.

Duporcq (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a donné un élégant théorème sur le mouvement d'une droite : *s'il existe sur une droite cinq points qui, pour cinq positions déterminées de la droite, soient situés sur cinq sphères, les cinq positions d'un sixième point quelconque de la droite seront sur une même sphère.*

(1) *Comptes rendus*, 1881. Voir aussi Kœnigs, *Leçons de Cinématique*. Note III de M. Darboux, p. 353. M. Mannheim s'est attaché au mouvement inverse de celui dont il s'agit, *d'une figure dont les plans passent par des points fixes* et en a fait une étude élégante (*Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 389).

Enfin, M. Raoul Bricard (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a déterminé tous les déplacements dans lesquels tous les points d'un plan décrivent des lignes sphériques dont les centres sont dans un même plan.

La présente Note a seulement pour objet de retrouver par le calcul quelques-uns des résultats précédents et d'étendre le procédé à quelques théorèmes que nous croyons nouveaux.

2. Désignons par $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$ les coordonnées des points $M_0, M_1, \dots$ de la figure mobile; par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \dots$ celles des centres $C_0, C_1, \dots$ des sphères sur lesquelles restent les points correspondants, par $R_0, R_1, \dots$ les rayons de ces sphères. Enfin, lorsque les points $M_0, M_1, \dots$ seront sur une même droite (D), nous désignerons par a, b, c les cosinus directeurs de cette droite, et par ρ_i la distance $\overline{M_0 M_i}$, de sorte qu'on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_0 = 0, \\ x_i = x_0 + a\rho_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i, \end{cases}$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On a aussi, dans tous les cas,

$$(2) \quad (x_0 - \alpha_0)^2 + (y_0 - \beta_0)^2 + (z_0 - \gamma_0)^2 = R_0^2,$$

$$(3) \quad (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 + (z_i - \gamma_i)^2 = R_i^2,$$

et, dans le cas où tous les points M_i sont en ligne droite,

$$(4) \quad (x_0 + a\rho_i - \alpha_i)^2 + (y_0 + b\rho_i - \beta_i)^2 + (z_0 + c\rho_i - \gamma_i)^2 = R_i^2.$$

Soit O l'origine des coordonnées : posons

$$(5) \quad \overline{Oc_i}^2 = d_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2.$$

L'équation (4) devient

$$(6) \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_i^2 + d_i^2 \\ - 2[\alpha_i(x_0 + a\rho_i) + \beta_i(y_0 + b\rho_i) + \gamma_i(z_0 + c\rho_i)] \\ + 2\rho_i(a x_0 + b y_0 + c z_0) = R_i^2. \end{cases}$$

En retranchant l'équation (2) de l'équation (6), on obtient la nouvelle égalité

$$(7) \quad \begin{cases} 2(\alpha \rho_i + \alpha_0 - \alpha_i)x_0 + 2(b \rho_i + \beta_0 - \beta_i)y_0 + 2(c \rho_i + \gamma_0 - \gamma_i)z_0 \\ - 2(\alpha x_i + b \beta_i + c \gamma_i)\rho_i + \rho_i^2 + d_i^2 - d_0^2 - R_i^2 + R_0^2 = 0, \end{cases}$$

que nous écrirons

$$(8) \quad \begin{cases} 2\alpha \rho_i(x_0 - \alpha_i) + 2b \rho_i(y_0 - \beta_i) + 2c \rho_i(z_0 - \gamma_i) \\ = l_i^2 + 2[(\alpha_i - \alpha_0)x_0 + (\beta_i - \beta_0)y_0 + (\gamma_i - \gamma_0)z_0], \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(9) \quad l_i^2 = R_i^2 - R_0^2 - \rho_i^2 - d_i^2 + d_0^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un certain nombre de théorèmes.

3. THÉORÈME DE M. MANNHEIM. — *Supposons que quatre points de la droite (D), ceux qui correspondent à $i = 0, 1, 2, 3$, soient sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, que nous prendrons pour plan des yz . On aura*

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

On peut même, pour simplifier l'écriture, supposer $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$.

L'égalité (8) est une identité pour $i = 0$. Nous déduisons donc de (8) trois égalités qui sont vérifiées, par hypothèse :

$$(10) \quad \begin{cases} 2\alpha \rho_1(x_0 - \alpha_1) + 2b \rho_1(y_0 - \beta_1) + 2c \rho_1 z_0 = l_1^2 + 2(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0), \\ 2\alpha \rho_2(x_0 - \alpha_2) + \dots, \\ 2\alpha \rho_3(x_0 - \alpha_3) + \dots \end{cases}$$

Considérons maintenant un cinquième point M_4 de la droite, $i = 4$. On tire des formules (1)

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = x_4 - \alpha \rho_4, \\ y_0 = y_4 - b \rho_4, \\ z_0 = z_4 - c \rho_4 \end{cases}$$

et aussi

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_4^2 + 2\rho_4(\alpha x_0 + b y_0 + c z_0)$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$(12) \quad x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = R_0^2 + \rho_4^2 + 2\rho_4(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (11) dans les seconds membres de (10); ces égalités peuvent s'écrire

$$2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) - 2\alpha_1\rho_1a - 2\beta_1\rho_1b = l_1^2 + 2\alpha_1x_4 + 2\beta_1y_4 - 2\rho_4(ax_1 + b\beta_1),$$

.....

ou

$$(13) \quad \begin{cases} 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) + 2(\rho_4 - \rho_1)\alpha_1a + 2(\rho_4 - \rho_1)\beta_1b \\ \quad = l_1^2 + 2\alpha_1x_4 + 2\beta_1y_4, \\ 2\rho_2(ax_0 + by_0 + cz_0) + \dots, \\ 2\rho_3(\dots\dots\dots) + \dots \end{cases}$$

En éliminant a, b et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre les équations (12) et (13), nous obtenons le lieu du point M_4

$$0 = \begin{vmatrix} x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - R_0^2 - \rho_4^2 & 2\rho_4 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2\alpha_1x_4 + 2\beta_1y_4 & 2\rho_1 & 2(\rho_4 - \rho_1)\alpha_1 & 2(\rho_4 - \rho_1)\beta_1 \\ l_2^2 + 2\alpha_2x_4 + 2\beta_2y_4 & 2\rho_2 & 2(\rho_4 - \rho_2)\alpha_2 & 2(\rho_4 - \rho_2)\beta_2 \\ l_3^2 + 2\alpha_3x_4 + 2\beta_3y_4 & 2\rho_3 & 2(\rho_4 - \rho_3)\alpha_3 & 2(\rho_4 - \rho_3)\beta_3 \end{vmatrix}$$

qui peut s'écrire, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - 2\xi x_4 - 2\eta y_4 + \lambda = 0.$$

Le lieu est donc une sphère ayant son centre C_4 dans le plan des xy .

On calculerait aisément ξ, η d'où résulterait, par l'élimination de ρ_4 , la conique lieu du point C_4 . Nous ne donnerons pas ce calcul.

4. AUTRE THÉORÈME. — *Si cinq points d'une droite décrivent des lignes sphériques, tous les points de la droite décrivent des lignes sphériques.*

Le mode de démonstration est tout à fait le même. Nous pouvons encore supposer $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$; mais les quatre centres C_1, C_2, C_3, C_4 sont quelconques.

L'équation (8) s'écrit ici

$$(14) \quad \begin{cases} 2\rho_i[(x_0 - \alpha_i)a + (y_0 - \beta_i)b + (z_0 - \gamma_i)c] \\ \quad = l_i^2 + 2(\alpha_ix_0 + \beta_iy_0 + \gamma_iz_0) \end{cases}$$

et cette équation en vaut quatre en faisant $i = 1, 2, 3, 4$.

Considérons maintenant un sixième point M_s ($i = 5$); des formules (1), on tire

$$(15) \quad \begin{cases} x_0 = x_5 - a\rho_5, \\ y_0 = y_5 - b\rho_5, \\ z_0 = z_5 - c\rho_5 \end{cases}$$

et aussi

$$(16) \quad x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = R_0^2 + \rho_5^2 + 2\rho_5(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (15) dans les seconds membres des quatre équations (14); on obtient quatre nouvelles équations qui peuvent s'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} 2\alpha_i(\rho_5 - \rho_i)a + 2\beta_i(\rho_5 - \rho_i)b + 2\gamma_i(\rho_5 - \rho_i)c \\ = l_i^2 + 2(\alpha_i x_5 + \beta_i y_5 + \gamma_i z_5) + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0). \end{cases}$$

En éliminant a, b, c et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre ces quatre équations et l'équation (16), on trouve enfin

$$\begin{vmatrix} x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - R_0^2 - \rho_5^2 & 2\rho_5 & 0 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2(\alpha_1 x_5 + \beta_1 y_5 + \gamma_1 z_5) & 2\rho_1 & 2\alpha_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\beta_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\gamma_1(\rho_5 - \rho_1) \\ l_2^2 + \dots & & & & \\ l_3^2 + \dots & & & & \\ l_4^2 + \dots & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée et ordonnée s'écrit

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - 2\xi x_5 - 2\eta y_5 - 2\zeta z_5 + \lambda = 0,$$

ce qui montre que le lieu du point quelconque M_s est sur une sphère, et le théorème est démontré.

Le calcul des coordonnées ξ, η, ζ du centre de cette sphère se fait sans difficulté; il est seulement un peu long et nous nous bornerons à transcrire le résultat. Il est de la forme

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = \frac{(\mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \varpi_1) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \varpi}, \\ \eta = \frac{(\mu_2 \rho_5^2 + \nu_2 \rho_5 + \varpi_2) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \varpi}, \\ \zeta = \frac{(\mu_3 \rho_5^2 + \nu_3 \rho_5 + \varpi_3) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \varpi}. \end{cases}$$

Ces équations définissent une cubique gauche, comme c'était prévu.

5. *Corollaire.* — En éliminant a, b, c entre les quatre équations (14), on obtient une équation du second degré en x_0, y_0, z_0 . Cette équation jointe à

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R_0^2$$

montre que le point M_0 et, puisque ce point n'a rien de spécial, tous les points de la droite (D) décrivent des biquadratiques sphériques (Duporcq).

6. La même méthode fournit des théorèmes sur le nombre de points qui suffisent à assurer le mouvement sur des lignes sphériques de tous les points d'une figure quelconque, plane ou non. En voici quelques-uns.

THÉORÈME. — *Si treize points arbitraires d'un solide décrivent des lignes sphériques, il en sera de même de tous les points du solide.*

Un point mobile quelconque M_i peut être représenté par les formules suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} x_i = x_0 + a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i + b'\rho'_i + b''\rho''_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i + c'\rho'_i + c''\rho''_i, \end{cases}$$

dans lesquelles $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle mobile. L'interprétation géométrique de ces formules est évidente. Par le point M_0 menons trois droites dont les cosinus directeurs soient respectivement $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ et prenons-les pour nouveaux axes de coordonnées. Les constantes $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i$ représenteront les coordonnées du point mobile M_i rapportées à ces axes mobiles. Les formules (19) sont des formules de transformation de coordonnées.

Convenons enfin de désigner par le signe S la somme de trois termes déduits de l'un d'eux par la substitution des lettres x, y, z à x , ou a, b, c à a ou α, β, γ à $\alpha, \dots$. En élevant les équations

tions (19) au carré, et ajoutant, on obtient l'identité

$$(20) \quad Sx_i^2 = Sx_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho_i' + a''\rho_i'')x_0.$$

Si le point M_0 reste sur une sphère ayant son centre à l'origine, on aura

$$Sx_0^2 = R_0^2,$$

d'où

$$(21) \quad Sx_i^2 = R_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho_i' + a''\rho_i'')x_0$$

et, si le point M_i est aussi sur une sphère, on aura nécessairement

$$(22) \quad S(a\rho_i + a'\rho_i' + a''\rho_i'')x_0 = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i + p_i,$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, p_i$ étant des constantes dont les trois premières sont les coordonnées du centre c_i de la sphère sur laquelle reste le point M_i . Remplaçons dans (22) x_i, y_i, z_i par leurs valeurs tirées de (19) et ordonnons par rapport aux constantes $\rho_i, \rho_i', \rho_i''$; il vient

$$(23) \quad \begin{cases} \rho_i S(ax_0) + \rho_i' S(a'x_0) + \rho_i'' S(a''x_0) \\ = S(\alpha_i x_0) + \rho_i S(a\alpha_i) + \rho_i' S(a'\alpha_i) + \rho_i'' S(a''\alpha_i) + p_i. \end{cases}$$

Cela posé, considérons un point quelconque M ayant pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes et ρ, ρ', ρ'' par rapport au trièdre mobile, de sorte que

$$(24) \quad \begin{cases} x = x_0 + a\rho + a'\rho' + a''\rho'', \\ y = y_0 + b\rho + b'\rho' + b''\rho'', \\ z = z_0 + c\rho + c'\rho' + c''\rho'' \end{cases}$$

et

$$(25) \quad Sx^2 = R^2 + \rho^2 + \rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho S(ax_0) + 2\rho' S(a'x_0) + 2\rho'' S(a''x_0).$$

Entre les égalités (24), (25) et les douze qu'on déduira de (23) en donnant à i douze valeurs distinctes, on pourra éliminer les quinze inconnues $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', S(ax_0), S(a'x_0), S(a''x_0)$ qui y figurent au premier degré. Il en résultera une relation de la forme

$$(26) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z + \lambda = 0,$$

qui exprime que le point M reste sur une sphère si M_0 et les douze points M_i restent sur des sphères.

7. Supposons ρ''_i et ρ'' nuls; tout ce qui renferme les lettres a'' , b'' , c'' et $S(a''x_0)$ disparaît et il suffit de donner à i dans les formules (23) huit valeurs différentes pour avoir ce nouveau théorème : *Si neuf points d'un plan décrivent des lignes sphériques, il en est de même de tous les points de ce plan.*

8. Enfin si l'on supposait de plus ρ'_i et ρ' nuls, on retomberait sur le théorème du n° 3.

9. Les raisonnements précédents ne prouvent pas qu'on ne puisse pas se contenter d'assujettir moins de neuf points d'un plan ou moins de treize points d'un solide à décrire des lignes sphériques, tous les points du plan ou du solide décrivant en conséquence des lignes sphériques. Soit, en effet, $M_0\rho\rho'\rho''$ le trièdre mobile. Dès qu'on aura assujetti cinq points de $M_0\rho$ et un point de $M_0\rho'$ à décrire des lignes sphériques le mouvement sera entièrement déterminé; tous les autres points du système décriront des courbes déterminées et l'on n'a aucune indication sur le nombre de ces courbes qu'il faut assujettir à être sphériques pour entraîner la sphéricité des autres. Il y a cependant des présomptions : si $M_0\rho'$ était indépendante de $M_0\rho$, il faudrait bien assujettir cinq points de $M_0\rho$ à être sur des sphères, ce qui, avec les cinq points de $M_0\rho$ parmi lesquels on peut compter M_0 , fait bien neuf points. On ferait le même raisonnement pour les points de $M_0\rho''$, ce qui semble donner treize points pour la possibilité d'un mouvement satisfaisant d'une figure solide.

10. D'ailleurs la possibilité même du mouvement reste à établir; c'est bien ce qu'a fait M. Bricard dans le Mémoire dont nous avons déjà parlé en montrant que si les centres des sphères sont assujettis à être dans deux plans rectangulaires, tandis que les points qui décrivent les lignes sphériques sont eux-mêmes dans deux plans rectangulaires, aucun point attaché aux deux plans mobiles ne peut décrire de ligne sphérique en dehors de ceux situés dans ces plans.

11. *Cas particuliers.* — Le nombre des conditions diminue si les centres ont certaines positions particulières. Sans parler du cas évident où toutes les sphères sont concentriques, nous citerons

par exemple le cas signalé par M. Mannheim des sphères ayant leurs centres dans un même plan et où il suffit qu'une droite ait quatre points satisfaisants pour que tous ses points décrivent des lignes sphériques.

Par analogie avec le raisonnement du n° 9, on peut prévoir que *tous les points d'un plan resteront sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan dès que sept points du plan mobile jouissent de cette propriété*. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

Prenons en effet pour plan fixe le plan des xy ; dans les équations des pages 9 et 10, il faudra faire $\gamma_i = 0$, et les seconds membres des équations (23) ne contiendront plus comme inconnues que x_0, y_0, a, b, a', b' , parce que $\varphi_i'' = 0$. Comme de plus $\varphi'' = 0$, il n'y aura en dehors des inconnues précédentes que $S(ax_0)$, $S(a'x_0)$ et enfin z_0 qui ne figure que dans la troisième équation (24), et dont par conséquent il n'y a pas à tenir compte. Pour pouvoir éliminer les huit inconnues, il n'y a donc à joindre à l'équation (25) et aux deux premières équations (24) que six équations (23). En d'autres termes, en comptant le point M_0 , il suffit de supposer que sept points du plan mobile décrivent des lignes sphériques. La non-utilisation de la troisième équation (24) prouve que, dans l'équation (26), on aura

$$\zeta = 0,$$

c'est-à-dire que les centres des sphères sur lesquelles restent les points du plan mobile sont bien dans le plan fixe.

NOTE DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX;

Par M. E. GENTY.

1. L'objet principal de cette Note est de montrer avec quelle simplicité les procédés de la géométrie vectorielle conduisent à l'équation différentielle du troisième ordre dont dépend la recherche des *familles de Lamé*, c'est-à-dire des familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal. Mais, avant d'aborder cette question, nous allons donner quelques indications sur certaines notations différentielles dont nous aurons à faire usage et sur les formules principales qui s'y rapportent.

Nous emploierons, dans ce qui va suivre, les notations de M. Gibbs, savoir : $\alpha, \beta, \gamma \dots$ étant des vecteurs, $\alpha. \beta$ désignera $S\alpha\beta$, c'est-à-dire le *produit projectif* des vecteurs α et β , et $\alpha \times \beta$ désignera $V\alpha\beta$, c'est-à-dire le *moment orienté* de ces deux vecteurs. On aura ainsi $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\alpha \times \beta} \dots$ désignant les longueurs ou modules des vecteurs $\alpha, \beta, \alpha \times \beta \dots$,

$$\begin{aligned}\alpha. \beta &= \overline{\alpha} \overline{\beta} \cos (\alpha, \beta); \\ \overline{\alpha \times \beta} &= \overline{\alpha} \overline{\beta} \sin (\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Enfin la notation $\alpha\beta\gamma$ désignera l'un ou l'autre des trois scalaires égaux

$$\alpha.(\beta \times \gamma), \quad \beta.(\gamma \times \alpha), \quad \gamma.(\alpha \times \beta).$$

2. Soit u une fonction scalaire de ρ et $v.d\rho$ la différentielle de cette fraction. Pour rappeler l'origine du vecteur v , nous poserons

$$v = \nabla u,$$

et, par suite,

$$du = d\rho. \nabla u.$$

Si l'on remplace dans cette équation $d\rho$ par $dl\lambda$, λ étant un orienteur quelconque, constant ou fonction de ρ , on aura

$$\frac{du}{dl} = \lambda. \nabla u;$$

c'est ce que nous appellerons *dérivée de la fonction u prise suivant la direction λ* .

3. Soit de même σ un vecteur fonction de ρ ; on aura

$$d\sigma = \varphi d\rho,$$

$\varphi d\rho$ étant une fonction vectorielle linéaire de la différentielle $d\rho$ qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même, et

$$\frac{d\sigma}{dl} = \varphi \lambda$$

sera la dérivée de σ prise suivant la direction λ .

Si de plus α, β et γ sont trois orienteurs rectangulaires quelconques, nous poserons

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \alpha \times \varphi\alpha + \beta \times \varphi\beta + \gamma \times \varphi\gamma = \Sigma(\alpha \times \varphi\alpha); \\ D\sigma &= \alpha. \varphi\alpha + \beta. \varphi\beta + \gamma. \varphi\gamma = \Sigma(\alpha. \varphi\alpha).\end{aligned}$$

On sait d'ailleurs que, si ω est un vecteur quelconque, on a

$$\varphi\omega = \varphi'\omega = \Delta\tau \times \omega,$$

φ' désignant, comme d'usage, la conjuguée de la fonction φ , et que l'expression $D\tau$ est égale au coefficient M_2 de l'équation symbolique

$$\varphi^3 - M_2\varphi^2 + M_1\varphi - M = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction φ .

Dans le cas où φ est une fonction conjuguée à elle-même, on a

$$\Delta\tau = 0.$$

C'est ce qui a lieu lorsque, τ étant le ∇ d'une fonction scalaire u , l'expression $\sigma.d\rho$ est une différentielle exacte.

Dans le cas plus général où cette expression n'est pas une différentielle exacte, mais peut le devenir lorsqu'on la multiplie par un certain facteur, on a, ainsi que l'a démontré Hamilton,

$$(1) \quad \sigma.\Delta\tau = 0;$$

c'est la condition d'intégrabilité de l'équation

$$\sigma.d\rho = 0.$$

4. Soit maintenant

$$(2) \quad d\varphi\lambda = \Phi(\lambda, d\rho),$$

λ étant un vecteur qu'on suppose constant dans la dérivation. $\Phi(\lambda, d\rho)$ sera une fonction vectorielle linéaire tout à la fois par rapport à λ et par rapport à $d\rho$. Nous allons montrer que, dans cette fonction, λ et $d\rho$ sont interchangeables, c'est-à-dire qu'on a

$$\Phi(\lambda, d\rho) = \Phi(d\rho, \lambda).$$

Soient, en effet, d et δ deux symboles de différentiation complètement indépendants.

Si dans l'équation (2) nous remplaçons λ par $\delta\rho$, il vient

$$d\varphi\delta\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

Mais

$$d\varphi\delta\rho = d\delta\rho = \delta d\tau = \delta\varphi d\rho;$$

donc

$$\delta\varphi d\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

ou, en remplaçant $d\rho$ par λ ,

$$(3) \quad \partial\varphi\lambda = \Phi(\partial\rho, \lambda),$$

et la proposition est démontrée.

Comme conséquence, si $\varphi\lambda$ est conjuguée à elle-même par rapport à λ , la fonction $\Phi(\lambda, d\rho)$, qui jouit évidemment de la même propriété, est aussi conjuguée à elle-même par rapport à $d\rho$.

5. Voici quelques applications.

Soit le vecteur $u\sigma$; on aura

$$\begin{aligned} d(u\sigma) &= \nabla u \cdot d\rho\sigma + u\varphi d\rho; \\ \text{d'où} \quad \Delta(u\sigma) &= \nabla u \times \sigma + u\Delta\sigma, \\ (4) \quad D(u\sigma) &= \Sigma\alpha \cdot \nabla u\alpha \cdot \sigma + u\Sigma(\alpha \cdot \varphi\alpha) = \sigma \cdot \nabla u + uD\sigma. \end{aligned}$$

Soit encore le scalaire $\sigma \cdot \tau$.

Si

$$d\tau = \theta d\rho,$$

on aura

$$\begin{aligned} d(\sigma \cdot \tau) &= \tau \cdot \varphi d\rho + \sigma \cdot \theta d\rho = (\varphi'\tau + \theta'\sigma) \cdot d\rho; \\ \text{d'où} \quad \nabla\sigma \cdot \tau &= \varphi'\tau + \theta'\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on a identiquement

$$\sigma \cdot \tau = 0,$$

c'est-à-dire si σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, on aura aussi identiquement

$$(5) \quad \varphi'\tau + \theta'\sigma = 0.$$

Considérons enfin le vecteur $\sigma \times \tau$. On aura

$$d(\sigma \times \tau) = \varphi d\rho \times \tau + \sigma \times \theta d\rho$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma \times \tau) &= \Sigma[x \times (\varphi\alpha \times \tau)] - \Sigma[x \times (\theta\alpha \times \sigma)], \\ D(\sigma \times \tau) &= \Sigma\overline{\alpha\varphi\alpha\tau} - \Sigma\overline{\alpha\theta\alpha\sigma}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \Sigma[x \times (\varphi\alpha \times \tau)] &= \varphi\tau - D\tau\sigma, \\ \Sigma[x \times (\theta\alpha \times \sigma)] &= \theta\sigma - D\sigma\tau, \\ \Sigma\overline{\alpha\varphi\alpha\tau} &= \tau \cdot \Delta\sigma, \\ \Sigma\overline{\alpha\theta\alpha\sigma} &= \sigma \cdot \Delta\tau. \end{aligned}$$

Donc on a

$$(6) \quad \Delta (\sigma \times \tau) = \varphi \tau - \theta \sigma - D\tau\sigma + D\sigma\tau,$$

$$(7) \quad D (\sigma \times \tau) = \Delta\sigma.\tau - \Delta\tau.\sigma,$$

Dans le cas où σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, l'expression de $\Delta (\sigma \times \tau)$ peut se mettre sous une autre forme qui nous sera très utile plus tard.

On a, en effet, dans ce cas (5)

$$\varphi'\tau + \theta'\sigma = 0;$$

on peut donc écrire

$$\Delta (\sigma \times \tau) = \varphi - \varphi')\tau + (\theta - \theta')\sigma - 2\theta\sigma - D\tau\sigma + D\sigma\tau,$$

ou

$$(8) \quad \Delta (\sigma \times \tau) = \Delta\sigma \times \tau + \Delta\tau \times \sigma - 2\theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

On obtient de même la formule

$$(9) \quad \Delta (\sigma \times \tau) = 2\varphi\theta - \Delta\sigma \times \tau - \Delta\tau \times \sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

6. Arrivons maintenant à la question que nous avons en vue et considérons les familles de surfaces qu'on obtient en égalant à des constantes trois fonctions scalaires données u , u_1 et u_2 de ρ . Soient d'ailleurs

$$du = v.d\rho, \quad du_1 = v_1.d\rho, \quad du_2 = v_2.d\rho,$$

et

$$dv = \varphi.d\rho, \quad dv_1 = \varphi_1.d\rho, \quad dv_2 = \varphi_2.d\rho.$$

Les fonctions φ , φ_1 et φ_2 de $d\rho$ seront conjuguées à elles-mêmes, de sorte qu'on aura

$$(10) \quad \Delta v = \Delta v_1 = \Delta v_2 = 0.$$

Ceci posé, si deux surfaces quelconques appartenant à deux familles différentes se coupent partout à angle droit, on aura identiquement

$$(11) \quad v_1.v^2 = 0; \quad v_2.v = 0 \quad \text{et} \quad v.v_1 = 0;$$

d'où

$$v_1 = v_2 \times v.$$

L'équation

$$\overline{v^2 v} d\rho = 0,$$

qui ne diffère de

$$v_1 \cdot d\varphi = 0$$

que par un facteur scalaire, est donc intégrable, et l'on a, par suite,

$$(v_2 \times v) \cdot \Delta(v_2 \times v) = 0,$$

ou

$$v_1 \cdot \Delta(v_1 \times v) = 0.$$

Mais la formule (8) devient ici

$$\Delta(v_2 \times v) = 2\varphi v_2 - Dv_2 v + Dvv_3,$$

et l'équation qui précède se réduit à

$$(12) \quad v_1 \cdot \varphi v_2 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre qu'au point ρ , v_1 et v_2 , qui sont des vecteurs situés dans le plan tangent de la surface de paramètre u , sont deux directions conjuguées, et comme ces deux directions sont rectangulaires, ce sont celles des lignes de courbure de cette surface.

On a donc la propriété suivante, qui est due, comme on sait, à Dupin :

Les surfaces appartenant à deux familles différentes d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

7. Il en résulte qu'on obtiendra les conditions qui expriment qu'une famille de surfaces fait partie d'un système triple orthogonal, en écrivant que les lignes de courbure des surfaces qui la constituent sont normales respectivement à deux familles de surfaces, c'est-à-dire qu'on a, v_1 et v_2 étant des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure,

$$(13) \quad v_1 \cdot \Delta v_1 = 0; \quad v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Il est facile de voir, d'ailleurs, que ces deux conditions se réduisent à une seule.

Le vecteur v_1 ne diffère, en effet, de $v_2 \times v$ que par un facteur scalaire, de sorte que la première condition (13) peut être rem-

placée par la suivante :

$$v_1 \cdot \Delta (v_2 \times v) = 0.$$

Or on a (8)

$$\Delta (v_2 \times v) = \Delta v_2 \times v - 2 \varphi v_2 = Dv_2 v + Dv v_2,$$

et, en tenant compte de la relation (12), la condition qui précède devient

$$\overline{vv_1 \Delta v_2} = 0,$$

ou

$$v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

On est conduit ainsi à la proposition suivante, qui comprend et complète celle de Dupin :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de surfaces se coupant à angle droit fassent partie d'un système triple orthogonal, c'est-à-dire pour qu'il existe une troisième famille de surfaces coupant les premières à angle droit, est que les signes d'intersection de deux surfaces de familles différentes soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles.

Ces lignes d'intersection ne peuvent pas d'ailleurs être lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles sans être aussi lignes de courbure pour les surfaces de l'autre famille.

8. L'une ou l'autre des conditions (13) nous conduirait, ainsi que nous le montrerons plus loin, à l'équation différentielle des familles de Lamé. Mais nous pouvons obtenir aussi cette équation par le procédé suivant, qui est plus simple et plus élégant.

Reprenons la condition

$$(14) \quad v_1 \cdot \varphi v_2 = 0.$$

Si M est le point où la normale au point φ à la surface de paramètre u rencontre la surface de paramètre $u \times du$, les surfaces de paramètre u_1 et u_2 passeront en M et leurs normales en ce point devront être tangentes aux lignes de courbure de la surface de paramètre $u + du$. On obtiendra la condition pour qu'il en soit ainsi en prenant la dérivée de l'équation (14) suivant le vecteur v ,

ce qui donne

$$\varphi_1 v \cdot \varphi v_2 + v_1 \cdot \varphi \varphi_2 v + v_1 \cdot \Phi(v_2, v) = 0,$$

ou, en tenant compte des identités

$$\varphi_1 v + \varphi v_1 = 0, \quad \varphi_2 v + \varphi v_2 = 0,$$

et posant

$$\Phi(v_2, v) = \Phi(v, v_2) = \Psi v_2,$$

$$(15) \quad v_1 \cdot (\Psi - 2\varphi^2) = 0.$$

Si maintenant on élimine v_1 et v_2 entre les équations (11), (14) et (15), on aura une relation qui ne contiendra plus que la fonction u et ses dérivées jusqu'au 3^e ordre; ce sera donc l'équation différentielle définissant les familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal.

Il suffit d'ailleurs, pour faire cette élimination, d'écrire la condition bien connue qui exprime que le plan

$$v \cdot w = 0$$

coupe les quadriques

$$w \cdot \varphi w = 1, \quad w \cdot (\Psi - 2\varphi^2) w = 1,$$

suivant deux coniques coaxiales. Il vient ainsi

$$v \cdot [\overline{v}^2 \eta - \varphi v \times (\Psi - 2\varphi^2) v] = 0$$

ou

$$(16) \quad \overline{v}^2 v \cdot \eta - \overline{v \varphi v \Psi v} + 2 \overline{v \varphi v \varphi^2 v} = 0,$$

où l'on a posé, α , β et γ étant trois orienteurs rectangulaires quelconques,

$$\eta = \Sigma [\varphi \alpha \times (\Psi - 2\varphi^2) \alpha] = \Sigma (\varphi \alpha \times \Psi \alpha) = \Sigma (\alpha \times \Psi \varphi \alpha).$$

La relation vectorielle

$$\eta = 0$$

exprime, ainsi qu'il est facile de le voir, que les deux fonctions conjuguées à elles-mêmes φ et Ψ ont les mêmes directions principales.

9. Dans le cas particulier où les directions principales α , β et γ

de la fonction ρ sont fixes, on a

$$\varphi\lambda = s_1\alpha.\lambda\alpha = s_2\beta.\lambda\beta = s_3\gamma.\lambda\gamma.$$

d'où

$$\Psi\lambda = \nu.\nabla s_1\alpha.\lambda\alpha + \nu.\nabla s_2\beta.\lambda\beta + \nu.\nabla s_3\gamma.\lambda\gamma.$$

On a alors $\eta = 0$ et, si l'on pose

$$\alpha.\nu = a, \quad \beta.\nu = b, \quad \gamma.\nu = c,$$

l'équation (16) devient

$$(17) \quad abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ \nu.\nabla s_1 - 2s_1^2 & \nu.\nabla s_2 - s_2^2 & \nu.\nabla s_3 - s_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons, par exemple, une solution de la forme

$$u = X + Y + Z,$$

où X, Y et Z sont des fonctions de $\alpha.\rho$, $\beta.\rho$ et $\gamma.\rho$ respectivement.

On aura

$$\nu = X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma,$$

$$d\nu = \varphi d\rho = X''\alpha.d\rho\alpha + Y''\beta.d\rho\beta + Z''\gamma.d\rho\gamma,$$

d'où

$$a = X', \quad b = Y', \quad c = Z',$$

$$s_1 = X'', \quad s_2 = Y'', \quad s_3 = Z'',$$

$$\nu.\nabla s_1 = X'X''', \quad \nu.\nabla s_2 = Y'Y''', \quad \nu.\nabla s_3 = Z'Z'''$$

et l'équation (17) devient

$$X'Y'Z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'X''' - X''^2 & Y'Y''' - Y''^2 & Z'Z''' - Z''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est conforme à un résultat obtenu par Bouquet.

10. L'équation (15) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(18) \quad d\rho.(\Psi - 2\varphi^2)\delta\rho = 0$$

où d et δ sont des symboles de dérivation relatifs à des déplacements suivant les lignes de courbure de la surface (u). Si d'ailleurs nous désignons par ρdu la distance des surfaces de para-

mètres u et $u \times du$, on aura

$$\rho = \frac{1}{\psi}.$$

Si nous différencions cette équation pour un déplacement $d\rho$ suivant une des lignes de courbure de la surface de paramètre u , il vient

$$-d\rho = p^2 \psi . d\psi = p^3 d\rho . \varphi \psi = \omega . d\rho,$$

en posant

$$\omega = p^3 \varphi \psi;$$

et l'on aura

$$(19) \quad d\omega = \psi d\rho = p^3 (\Psi + \varphi^2) d\rho - 3p^5 \varphi \psi . d\rho \varphi \psi;$$

d'où

$$(20) \quad \delta\rho . \Psi d\rho = p^3 \delta\rho . (\psi + \varphi^2) d\rho - 3p^5 \varphi \psi . \delta\rho \varphi \psi . \delta\rho.$$

Or les vecteurs $\psi \times \varphi d\rho$ et $\psi \times \varphi \delta\rho$ sont respectivement parallèles à $d\rho$ et $\delta\rho$: donc on a

$$(\psi \times \varphi d\rho) . (\psi \times \varphi \delta\rho) = 0,$$

d'où

$$\psi^{-2} d\rho . \varphi^2 \delta\rho = \psi . \varphi d\rho \psi . \varphi \delta\rho.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (20) devient

$$d\rho . \psi \delta\rho = p^3 d\rho . (\Psi - 2\varphi^2) \delta\rho,$$

de sorte que l'équation (18) peut s'écrire sous la forme

$$d\rho . \psi d\rho = 0,$$

où la fonction ψ définie par l'équation (19) est conjuguée à elle-même.

L'équation (16) d'une famille de Lamé peut donc elle-même être remplacée par la suivante :

$$(21) \quad \psi^{-2} \varepsilon . \psi - \overline{\psi \varphi \psi \varphi \psi} = 0,$$

où

$$\varepsilon = \Sigma (\varphi \alpha \times \psi \alpha) = \Sigma (\alpha \times \psi \varphi \alpha).$$

44. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces de paramètre u était résolue par rapport à u . Considérons maintenant le cas où cette équation est de

la forme

$$f(\varphi, u) = 0$$

et ne peut pas être résolue par rapport à u .

Si nous différencions cette équation, il vient

$$v.d\varphi + \frac{\partial f}{\partial u} du = 0,$$

et la quantité que nous avons désignée par p aura pour valeur

$$p = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{v}.$$

Il est évident d'ailleurs que tous les résultats du Paragraphe qui précède subsisteront en partant de cette valeur de p et en laissant u constant dans les dérivations.

12. L'équation (21) est vérifiée pour $p = \text{constante}$, c'est-à-dire quand la famille de paramètre u est composée de surfaces parallèles.

Toutes les solutions de l'équation

$$(22) \quad p = a\varphi^{-2} + 2\lambda.\varphi + b,$$

où les scalaires a et b et le vecteur λ sont des fonctions de u , appartiennent également à l'équation (21) et feront par suite connaître des familles de Lamé.

On a, en effet, u restant constant,

$$dp = 2(a\varphi.d\varphi + \lambda.d\varphi),$$

d'où

$$\omega = 2(a\varphi + \lambda)$$

et

$$d\omega = \psi d\varphi = 2a d\varphi;$$

en sorte que l'équation

$$d\varphi.\psi \delta\varphi = 0$$

se réduit à

$$d\varphi.\delta\varphi = 0,$$

et elle est toujours vérifiée par les directions rectangulaires $d\varphi$ et $\delta\varphi$.

Les familles de sphères et de plans rentrent dans ce cas par-

ticulier et peuvent dès lors faire partie d'un système triple orthogonal.

En effet, une famille quelconque de sphères a une équation de la forme

$$\overline{\rho - \alpha}^2 = R^2,$$

α et R étant des fonctions de u , et l'on a

$$\begin{aligned} \nu &= \rho - \alpha, & \bar{\nu} &= \overline{\rho - \alpha} = R, \\ \rho &= - \frac{\alpha' \cdot (\rho - \alpha)}{R}, \end{aligned}$$

α' étant la dérivée du vecteur α par rapport à u ; et cette équation est bien une forme particulière de l'équation (22).

13. Nous allons enfin montrer comment on peut obtenir l'équation (16) en exprimant que les lignes de courbure des surfaces de la famille considérée sont normales respectivement à deux familles de surfaces. Mais, auparavant, nous ferons quelques remarques sur l'orienteur normal d'une surface et ses différentielles.

14. Désignons par ν l'orienteur de la normale, et soit

$$d\nu = \psi d\rho.$$

On a, puisque ν est un orienteur,

$$\nu \cdot d\nu = 0$$

ou

$$\nu \cdot \psi d\rho = d\rho \cdot \psi' \nu = 0;$$

et, comme $d\rho$ est un vecteur quelconque, on a identiquement

$$\psi' \nu = 0.$$

On voit donc que la fonction ψ appliquée à un vecteur quelconque l'amène dans le plan tangent et que l'équation vectorielle

$$\varpi \times \psi \varpi = 0$$

n'a que deux racines distinctes pour lesquelles $\psi \varpi$ est différent de zéro.

Si ε et ε_1 sont les deux orienteurs qui satisfont à cette équation,

on aura

$$\psi \varepsilon = s \varepsilon, \quad \psi \varepsilon_1 = s_1 \varepsilon_1,$$

s et s_1 étant les racines de l'équation

$$(23) \quad s^2 - m_2 s + m_1 = 0.$$

La fonction ψ satisfait d'ailleurs à l'équation symbolique

$$\psi(\psi^2 - m_2 \psi + m_1) = 0,$$

qui, pour un vecteur situé dans le plan tangent, se réduit à

$$(24) \quad \psi^2 - m_2 \psi + m_1 = 0.$$

On voit immédiatement que ε et ε_1 satisfont également à l'équation des lignes de courbure de la surface (u)

$$\overline{\nu d\nu d\rho} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\nu \psi d\rho d\rho} = 0;$$

ce sont donc les orienteurs des lignes de courbure de la surface (u) au point ρ .

Les orienteurs ν , ε et ε_1 déterminent ainsi un système de trois directions rectangulaires.

D'autre part, la relation

$$(\psi - \psi')\nu = \Delta\nu \times \nu$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$\psi\nu = \Delta\nu \times \nu.$$

L'équation $\nu \cdot d\rho = 0$ étant d'ailleurs intégrable, on a

$$\nu \cdot \Delta\nu = 0$$

et, par suite,

$$\Delta\nu = \nu \times \psi\nu.$$

Si donc on pose

$$\psi\nu = r\lambda, \quad \Delta\nu = r\mu,$$

λ et μ étant des orienteurs, on aura un second système d'orienteurs rectangulaires λ , μ et ν dont on aperçoit immédiatement la signification géométrique : ν est l'orienteur de la tangente, λ celui de la normale principale et μ celui de la binormale des trajectoires orthogonales de la famille de surfaces considérée, et r est la courbure de la trajectoire qui passe au point ρ .

Si, de plus, r_1 est la torsion de cette courbe, on aura

$$\frac{d\mu}{dn} = r_1 \lambda,$$

$\frac{d}{dn}$ étant un symbole de dérivation suivant la normale à la surface u , c'est-à-dire suivant la tangente à la trajectoire orthogonale.

L'équation

$$\Delta u = v \times \psi v$$

montre enfin qu'on a

$$\lambda \times \psi \lambda + \mu \times \varphi \mu = 0.$$

15. Revenons maintenant à la question que nous avons en vue. Nous avons montré précédemment que, si v_1 et v_2 sont des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure de la surface u , la condition qui exprime que les lignes de courbure de toutes les surfaces de la famille sont, pour chaque système, orthogonales à une famille de surfaces, est indifféremment

$$v_1 \cdot \Delta v_1 = 0 \quad \text{ou} \quad v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Il est clair dès lors qu'on peut mettre cette condition sous la forme

$$(24 \text{ bis}) \quad v_1 \cdot \Delta v_1 + v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Or on obtiendra deux vecteurs dirigés suivant les lignes de courbure de la surface v en opérant avec $\psi - s$ et avec $\psi - s_1$ sur un vecteur quelconque du plan tangent; par exemple, sur le vecteur μ . L'équation (24 bis) peut donc s'écrire

$$(\psi \mu - s \mu) \cdot \Delta(\psi \mu - s \mu) + (\psi \mu - s_1 \mu) \cdot \Delta(\psi \mu - s_1 \mu) = 0,$$

ou, en développant et remarquant que $s + s_1 = m_2$ et $ss_1 = m_1$,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2\psi \mu - m_2 \mu) \cdot \Delta \psi \mu \\ + (m_2^2 \mu - 2m_1 \mu - m_2 \psi \mu) \cdot \Delta \mu - \overline{\mu \psi \mu \nabla m_2} = 0. \end{array} \right.$$

Nous allons calculer séparément chacun des trois termes du premier membre de cette équation.

Posons

$$d\Delta v = \theta d\zeta \quad \text{et} \quad d\mu = \gamma d\zeta;$$

nous aurons

$$d\psi\mu = \Psi(\mu, d\varphi) + \psi\chi d\varphi.$$

On aura donc, en employant, selon le cas, l'un ou l'autre des deux systèmes d'orienteurs rectangulaires que nous avons signalés dans le paragraphe qui précède,

$$\Delta\psi\mu = \Sigma[\alpha \times \psi(\mu, \alpha)] + \Sigma\lambda \times \psi\chi\lambda = \frac{d\Delta v}{dm} + \Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda).$$

Mais, dans l'expression $\Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda)$, nous pouvons négliger les termes $\lambda \times \psi\chi\lambda$ et $\mu \times \psi\chi\mu$, qui sont dirigés suivant la normale, ainsi qu'on le reconnaît en les projetant avec λ et avec μ , et qui n'influent pas dès lors sur le résultat que nous avons en vue.

On a donc

$$\Delta\psi\mu = \frac{d\Delta v}{dm} + v \times \psi\chi v = \theta\mu + v \times \psi \frac{d\mu}{dn} + \dots,$$

ou enfin

$$\Delta\psi\mu = \theta\mu + r_1 v \times \psi\lambda + \dots$$

Le premier terme de l'équation (25) peut donc s'écrire

$$(2\psi\mu - m_2\mu) \cdot (\theta\mu + r_1 v \times \psi\lambda),$$

ou encore, en remarquant que

$$m_1 = \Sigma \overline{v\psi\lambda\psi\mu} = \overline{v\psi\lambda\psi\mu},$$

$$(2\psi\mu - m_2\mu) \cdot \theta\mu + 2m_1 r_1 - m_2 r_1 \lambda \cdot \psi\lambda.$$

Pour calculer le second terme de l'équation (25), nous allons chercher les composantes du vecteur $\Delta\mu$ suivant les directions λ et μ .

On a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Delta\mu &= \overline{\mu v \Delta\mu} = -\mu \cdot (\chi - \chi')v = -\mu \cdot \frac{d\mu}{dn} + v \cdot \chi\mu = v \cdot \chi\mu \\ &= v \cdot \frac{d\mu}{dm} = -\mu \cdot \frac{dv}{dm} = -\mu \cdot \psi\mu. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mu \cdot \Delta\mu &= \lambda \cdot (\chi - \chi')v = \lambda \cdot \frac{d\mu}{dn} - v \cdot \chi\lambda = r_1 - v \cdot \frac{d\mu}{dl} \\ &= r_1 + \mu \cdot \frac{dv}{dl} = r_1 + \mu \cdot \psi\lambda = r_1 + \lambda \cdot \psi\mu, \end{aligned}$$

$$\text{car } (\psi - \psi')\mu = \Delta v \times \mu = 0.$$

Donc

$$\Delta\mu = -\mu.\psi\mu\lambda + r_1 + \lambda.\psi\mu)\mu + \dots$$

En tenant compte de cette expression de $\Delta\mu$, le deuxième terme de l'équation (25) se ramène immédiatement à la forme

$$m_2^2 r_1 + m_2^2 \lambda.\psi\mu - 2 m_1 r_1 - 2 m_1 \lambda.\psi\mu - m_2 r_1 \mu.\psi\mu.$$

Enfin le troisième terme de l'équation (25) est égal à

$$\frac{dm_2}{dn} \lambda.\psi\mu.$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (25) devient

$$(26) \quad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + \left(m_2^2 - 2m_1 + \frac{dm_2}{dn}\right) \lambda.\psi\mu = 0.$$

On peut simplifier l'écriture en remarquant que

$$d\psi v = \Psi(v, d\rho) + \psi^2 d\rho;$$

d'où

$$D\psi v = \Sigma \alpha.\Psi(v, \alpha) + \Sigma \alpha.\psi^2 \alpha = m_2^2 - 2m_1 + \frac{dm_2}{dn}.$$

L'équation (26) peut donc s'écrire

$$(27) \quad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + D\psi v \lambda.\psi\mu = 0.$$

On donnera une autre forme à cette équation en introduisant la fonction conjuguée θ' à l'aide de la relation

$$(\theta - \theta')\mu = \Delta^2 v \times \mu,$$

où l'on a posé $\Delta(\Delta v) = \Delta^2 v$.

Il vient en effet, en tenant compte de cette relation,

$$\begin{aligned} (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu &= (2\psi\mu - m_2\mu).\theta'\mu + \overline{2\mu\psi\mu\Delta^2 v} \\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu + v(\overline{v \times \lambda})\psi\mu\Delta^2 v \\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu - 2(\lambda.\psi\mu)(v.\Delta^2 v). \end{aligned}$$

Or on a (n° 9)

$$\Delta^2 v = \Delta(v \times \psi v) = 2\psi v - \Delta v \times \psi v - \Delta\psi v \times v - Dv \psi v + D\psi v v,$$

d'où

$$v.\Delta^2 v = \overline{\Delta v}^2 + D\psi v.$$

On a donc enfin

$$(2\psi\mu - m_2\mu).0\nu = (2\psi\mu - m_2\mu).0'\nu - 2(\overline{\Delta\nu}^2 D\psi\nu)\lambda.\psi\nu.$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation (27) devient

$$(28) \quad (2\psi\mu - m_2\mu)0'\mu - (2\overline{\Delta\nu}^2 D\psi\nu)\lambda.\psi\mu = 0.$$

On obtient enfin une dernière forme de l'équation cherchée en additionnant les équations (27) et (28), ce qui donne

$$(2\psi\mu - m_2\mu).(0 + 0')\mu - 2\overline{\Delta\nu}^2 \psi\nu.\psi\Delta\nu = 0,$$

ou

$$(29) \quad \Delta\nu.(0 + 0')(2\psi\Delta\nu - m_2\Delta\nu) - 2\overline{\Delta\nu}^2 \psi\nu.\psi\Delta\nu = 0.$$

16. Il est intéressant de montrer que l'équation que nous venons d'obtenir est identique à l'équation (16).

On a

$$\nu = p^3\nu,$$

$$dp = -p^3\nu.\varphi d\varphi,$$

$$d\nu = \psi d\varphi = p(\varphi d\varphi - p^2 d\varphi.\varphi\nu\nu) = p(\varphi d\varphi - d\varphi.\varphi\nu\nu),$$

d'où

$$\psi\nu = p(\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\nu),$$

$$m_2 = \Sigma x.\psi x = p(M_2 - \nu.\varphi\nu),$$

en désignant par des lettres majuscules les invariants de la fonction φ ,

$$\Delta\nu = \nu \times \psi\nu = p\nu \times \varphi\nu = p^3\nu \times \varphi\nu$$

et, par suite,

$$\nu.\Delta\nu = 0, \quad \Delta\nu.\varphi\nu = 0$$

et

$$\overline{\Delta\nu}^2 = p^2\nu \times \overline{\varphi\nu}^2,$$

$$\psi\Delta\nu = p\varphi\Delta\nu$$

et enfin

$$\begin{aligned} 0 d\varphi = d\Delta\nu &= p^3(\varphi d\varphi \times \varphi\nu + \nu \times \varphi^2 d\varphi + \nu \times \Psi d\varphi) - 3p^3 d\varphi.\varphi\nu\nu \times \varphi\nu \\ &= p^2(\varphi d\varphi \times \varphi\nu + \nu \times \varphi^2 d\varphi + \nu \Psi d\varphi - 3 d\varphi.\varphi\nu\nu \times \varphi\nu). \end{aligned}$$

Or l'équation (29) peut s'écrire

$$(30) \quad \Delta\nu.0\psi\Delta\nu + \psi\Delta\nu.0\Delta\nu - m_2\Delta\nu.0\Delta\nu - \overline{\Delta\nu}^2 \psi\nu.\psi\Delta\nu = 0,$$

et les formules qui précèdent permettent d'obtenir par des calculs

très simples, pour les quatre termes du premier membre de cette équation, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta v.0\psi \Delta v &= p^4 \left[(v.\varphi^2 v - 2M_2 v.\varphi v + M_2^2 - M_1 - 3v \times \overline{\varphi v}^2) \Delta v.\varphi^2 v \right. \\ &\quad \left. + \Delta v.\varphi \Psi \varphi v - v.\varphi v \overline{v\varphi v \Psi v} \right], \\ \psi \Delta v.0 \Delta v &= p^4 \left[(M_1 - M_2 v.\varphi v + v.\varphi^2 v) \Delta v.\varphi^2 v + v.\varphi^2 v \Delta v.\Psi v - \Delta v.\Psi \varphi^2 v \right. \\ &\quad \left. + M_2 (\Delta v.\Psi \varphi v - v.\varphi v \overline{v\varphi v \Psi v}) \right], \\ m_2 \Delta v.0 \Delta v &= p^4 (M_2 - v.\varphi v) [(M_2 - 2v.\varphi v) \Delta v.\varphi^2 v + \Delta v \Psi \varphi v - v.\varphi v \Delta v.\Psi v], \\ \overline{\Delta v}^2 \psi v.\psi \Delta v &= p^4 v \times \overline{\varphi v}^2 \Delta v.\varphi^2 v.\end{aligned}$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (30) devient

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta v}^2 (2 \Delta v.\varphi^2 v - \Delta v \Psi v) \\ + p^2 (v.\varphi v \Delta v \varphi \Psi v + \Delta v.\Psi \varphi^2 v - \Delta v.\varphi \Psi \varphi v - v.\varphi v \Delta v \Psi \varphi v) = 0. \end{array} \right.$$

Or on a

$$\begin{aligned}v.\varphi v (\Delta v.v \Psi v - \Delta v.\Psi \varphi v) + \Delta v.\Psi \varphi^2 v - \Delta v.\varphi \Psi \varphi v \\ = \Delta v.(\Psi \varphi - \varphi \Psi) \varphi v - v.\varphi v \Delta v.(\Psi \varphi - \varphi \Psi) v \\ = \overline{\Delta v \eta \varphi v} - \overline{\Delta v \eta v} = [(\Delta v \times \eta) + v].(\varphi v \times v) \\ = -\frac{1}{p} (\Delta v \times \eta). (v \times \Delta v) = \frac{\overline{\Delta v}^2}{p} \eta.v.\end{aligned}$$

Donc enfin l'équation (31) peut s'écrire

$$p v.\eta - \Delta v.\Psi v + 2 \Delta v.\varphi^2 v = 0$$

et, sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle est identique à l'équation (16).

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS DE CLASSE 1;

Par M. HENRI LEBESGUE.

On sait que l'on appelle *fonction de classe 1* toute fonction discontinue qui est la limite d'une suite convergente de fonctions de classe 0, c'est-à-dire de fonctions continues. M. Baire ⁽¹⁾ a fait connaître une propriété caractéristique de ces fonctions, nous la retrouverons plus loin comme conséquence de celle qui va nous occuper.

J'ai déjà énoncé cette propriété dans une Note récemment parue ⁽²⁾ en me limitant aux fonctions d'une seule variable; la méthode que j'emploie ici s'applique dans tous les cas, mais, pour simplifier le langage, je raisonnerai toujours comme s'il n'y avait que deux variables x et y .

1. — *Pour qu'une fonction f soit de classe 0 ou 1, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue à moins de ε près; ou encore sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε .*

Je précise d'abord le sens qu'il faut donner à ces deux énoncés et je démontre leur équivalence.

Par la somme d'ensembles composants j'entends l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles composants, que ces ensembles aient ou non des points communs.

⁽¹⁾ Thèse *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899, et ce *Bulletin*, t. XXVIII).

⁽²⁾ *Démonstration d'un théorème de M. Baire*, Note II des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynômes*, de M. ÉMILE BOREL; Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Les questions dont je m'occupe ici sont traitées d'une manière différente et comme cas particuliers dans un Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*, qui paraîtra prochainement dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan.

f sera dite *continue*, à moins de ε près, sur l'ensemble fermé E , s'il existe une fonction continue φ partout définie et telle que $|f - \varphi|$ soit toujours inférieure à ε pour les points de E . Divisons le plan en carrés assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de φ soit au plus égale à η ; il y a une infinité dénombrable de ces carrés. Soient C un des carrés et e l'ensemble des points de E intérieurs à C ou situés sur la frontière de C , e est un ensemble fermé et, sur e , l'oscillation de f est inférieure à $\varepsilon + \eta$; d'ailleurs E est la somme de l'infinité dénombrable des e . Si donc le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que E , il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles e et, si ε est quelconque, $\varepsilon + \eta$ est aussi petit que l'on veut; cela montre l'identité des deux énoncés indiqués. Je vais démontrer le second.

Soit f la limite de la suite convergente de fonctions continues $f_1, f_2, \dots$. Divisons l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles à l'aide des points de divisions

$$\dots, m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots,$$

distants deux à deux de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$. Le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles

$$E(m_i < f < m_{i+2}),$$

formés des points en lesquels est vérifiée l'inégalité écrite entre parenthèses. Dans chacun des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ l'oscillation de f est inférieure à ε , il suffira donc de montrer qu'un tel ensemble est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés pour avoir prouvé que la condition énoncée est nécessaire.

Or $E(m_i < f < m_{i+2})$ est la somme des ensembles $E_{n,p}$ (n et p entiers) pour lesquels on a, quel que soit $q \geq p$,

$$m_i + \frac{1}{n} \leq f_q \leq m_{i+2} - \frac{1}{n}.$$

Par définition même $E_{n,p}$ est l'ensemble des points communs à la fois à tous les ensembles $E\left(m_i + \frac{1}{n} \leq f_q \leq m_{i+2} - \frac{1}{n}\right)$, pour lesquels on a $q \geq p$; tous ces ensembles étant fermés, $E_{n,p}$ est fermé.

Pour démontrer que la condition est suffisante, supposons qu'elle soit remplie par la fonction f . Alors le domaine où f est définie est la somme des ensembles fermés

$$(S_1) \quad E_1^1, E_2^1, E_3^1, \dots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à 1. Ce domaine est aussi la somme des ensembles fermés

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Remplaçons $\mathcal{E}_p$ par les ensembles $\mathcal{E}_{p,q}$ formés des points communs à $\mathcal{E}_p$ et E_q^1 , ensembles qui ont $\mathcal{E}_p$ pour somme.

En opérant ainsi sur chaque $\mathcal{E}_p$ et en rangeant les ensembles $\mathcal{E}_{p,q}$ dans un ordre quelconque nous remplacerons la suite des $\mathcal{E}_p$ par la suite des ensembles fermés

$$(S_2) \quad E_1^2, E_2^2, E_3^2, \dots$$

En opérant d'une manière analogue, on fait correspondre à chaque entier m une suite d'ensembles fermés

$$(S_m) \quad E_1^m, E_2^m, E_3^m, \dots,$$

dont la somme est le domaine considéré, sur chacun desquels f est continue à $\frac{1}{m}$ près et qui sont tous contenus dans l'un au moins des ensembles de la suite correspondant à $m - 1$. A chaque ensemble E_q^p est attaché une constante K_q^p qui diffère de f de moins de $\frac{1}{2^p}$ sur E_q^p .

Pour former le $m^{\text{ième}}$ terme f_m d'une suite de fonctions continues tendant vers f , je divise le plan des xy en carrés de côté $\frac{1}{m}$ par des parallèles aux axes de coordonnées. Soit A le sommet d'un de ces carrés; les quatre carrés ayant A pour sommet forment un carré α . Soit $E_{i_1}^1$ le premier des ensembles de (S_1) ayant des points contenus dans α , c'est-à-dire intérieurs à la frontière de α ou sur cette frontière. Soit $E_{i_2}^2$ le premier des ensembles de (S_2) qui est contenu dans $E_{i_1}^1$ et dont certains points sont contenus dans α ; soit $E_{i_3}^3$ le premier des ensembles de (S_3) qui est contenu dans $E_{i_2}^2$ et

dont certains points sont dans α . En continuant on arrive à la définition d'un ensemble $E_{i_m}^m$; en A je prends $f_m = K_{i_m}^m$.

f_m sera maintenant complètement déterminée par la condition d'être linéaire en x et en y (c'est-à-dire d'être représentable par une expression de la forme $Axy + Bx + Cy + D$, où A, B, C, D sont des constantes) dans chacun des carrés de côté $\frac{1}{m}$ considérés.

Il reste à vérifier que f_m tend vers f .

Soient M un point, $E_{\alpha_1}^1$ le premier ensemble de (S_1) contenant M, $E_{\alpha_2}^2$ le premier ensemble de (S_2) contenu dans $E_{\alpha_1}^1$ et contenant M, $E_{\alpha_3}^3$ sera le premier des ensembles de (S_3) contenu dans $E_{\alpha_2}^2$ et contenant M, et ainsi de suite. Soit q un entier assez grand pour que M soit distant de plus de $\frac{2\sqrt{2}}{q}$ des points de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$ somme des ensembles $E_1^1, E_2^1, \dots, E_{\alpha_1-1}^1$, des ensembles E_k^2 contenus dans $E_{\alpha_1}^1$ et d'indice inférieur plus petit que α_2 , des ensembles E_k^3 contenus dans $E_{\alpha_2}^2$ et d'indice inférieur plus petit que α_3 , etc., des ensembles E_k^m contenus dans $E_{\alpha_{m-1}}^{m-1}$ et d'indice inférieur plus petit que α_m . Étudions maintenant $f_p(M)$ pour $p \geq q$ et $p > m$.

La définition de $f_p(M)$ dépend, comme on l'a vu, de la considération de certains carrés de côté $\frac{1}{p}$, savoir les carrés de la $p^{\text{ième}}$ division du plan en carrés qui ont au moins un sommet en commun avec un carré de cette division contenant M. Tous ces carrés sont intérieurs au cercle de centre M et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{p}$, donc extérieurs à $\mathcal{C}$, par suite aux sommets du ou des carrés contenant M. f_p est égale à la constante K_p^p relative à un ensemble E_p^p contenu dans $E_{\alpha_m}^m$.

Soit P un point de E_p^p , on a

$$|K_p^p - K_{\alpha_m}^m| \leq |K_p^p - f(P)| + |K_{\alpha_m}^m - f(P)| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2m} < \frac{1}{m}.$$

Donc aux sommets du ou des carrés contenant M, f_p diffère de $K_{\alpha_m}^m$ de $\frac{1}{m}$ au plus et, par suite, il en est de même en M. De là nous tirons

$$|f(M) - f_p(M)| \leq |f(M) - K_{\alpha_m}^m| + |f_p(M) - K_{\alpha_m}^m| < \frac{2}{m};$$

et, puisque m est quelconque, il est bien démontré que la suite des f_p converge vers f .

Le théorème précédent permet dans bien des cas, on le conçoit, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1 : je donnerai seulement trois exemples de son emploi.

Soit f une fonction n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité. Soit E l'ensemble fermé dénombrable des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à ε . E est la somme de l'infinité dénombrable de ses points, sur chacun desquels f est d'oscillation nulle. Soit maintenant un point du complémentaire de E ; il est intérieur à un carré dans lequel l'oscillation de f est inférieure à ε et le complémentaire de E est la somme d'une infinité dénombrable de tels carrés. Donc les conditions du théorème I sont remplies ; f est de classe 1.

Soit f une fonction semi-continue supérieurement. M. Baire désigne ainsi une fonction f telle que, quel que soit P , $f(P)$ soit au moins égal à la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P . De là résulte immédiatement que l'ensemble $E(\alpha \leq f)$ des points où f est au moins égale à α est fermé ; car si P est un point limite de cet ensemble la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P , est au moins α , donc $f(P)$ est au moins égal à α .

Ceci posé, je divise l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles partiels de longueur au plus égale à ε . Soit (a, b) l'un d'eux ; le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $E(a \leq f < b)$, formé des points en lesquels est vérifiée l'inégalité entre parenthèses. Sur chacun de ces ensembles, l'oscillation de f est au plus égale à ε , or $E(a \leq f < b)$ s'obtient en retranchant de l'ensemble fermé $E(a \leq f)$ les points de l'ensemble fermé $E(b \leq f)$.

$E(a \leq f < b)$ est, par suite, la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés tels que E_n , formé des points de $E(a \leq f)$, distants de $\frac{1}{n}$ au moins des points de $E(b \leq f)$. D'après le théorème I, f est de la classe 0 ou 1 ⁽¹⁾.

Pour appliquer le théorème I au cas précédent il a fallu démon-

(1) Au sujet de ces fonctions et de leur représentation, voir BAIRE, *Thèse*, p. 5 à 12 et p. 64, et ce *Bulletin*, t. XXVIII et XXXII.

trer que certains ensembles étaient sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés; c'est toujours à cette question que l'on peut ramener l'application du théorème I. D'après la démonstration de la première partie de ce théorème, en effet, si f est de la classe 1, $E(a < f < b)$ est, quels que soient a et b , somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; réciproquement, si cela a lieu, les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ de la démonstration étant sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés, le domaine où f est définie est, quel que soit $\varepsilon > 0$, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε , c'est-à-dire que f est de classe 0 ou 1.

J'applique la méthode qui résulte de là pour démontrer qu'une fonction $f(x, y)$ continue en x et en y est de classe 0 ou 1 (').

Je considère l'ensemble $E(a < f < b)$ comme la somme des ensembles $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ correspondant aux valeurs entières de p . L'ensemble $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ est tel que, si M est un de ses points, il existe un segment (α, β) contenant M , à son intérieur, parallèle à l'axe des x et dont tous les points, extrémités non comprises, font partie de l'ensemble. Considérons l'ensemble $E_{n,p}$ des points M de $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ qui sont compris dans un segment (α, β) tel que (α, M) et (β, M) soient tous deux de longueur supérieure à $\frac{1}{n}$ (n entier). Soient A un point limite de $E_{n,p}$ et $M_1, M_2, \dots$ des points de $E_{n,p}$ tendant vers A . S'ils sont tous, à partir d'un certain indice, sur la parallèle à l'axe des x passant par A , f étant continue en x , A fait évidemment partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} \leq f \leq b - \frac{1}{p}\right).$$

Sinon les intervalles $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \dots$ correspondant aux points $M_1, M_2, \dots$ rencontrent tous, à partir d'un certain rang i , la parallèle à l'axe des y menée par A en des points $\gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots$

(') J'ai déjà démontré cette proposition d'une autre manière dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1898.

qui tendent vers A. Ces points γ font partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right),$$

donc, puisque f est continue en γ , A fait partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} \leq f \leq b - \frac{1}{p}\right).$$

Ainsi, dans tous les cas, l'ensemble fermé $(E_{n,p} + E'_{n,p})$, $E'_{n,p}$ désignant le dérivé de $E_{n,p}$, fait partie de $E(a < f < b)$; ce dernier ensemble est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $(E_{n,p} + E'_{n,p})$, le théorème est démontré.

Il n'y a pas dans ce qui précède de procédé général et régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe I; un tel procédé est d'ailleurs impossible à donner si l'on ne suppose, sur les fonctions que l'on considère, rien d'autre que ceci : elles sont données. Cependant, comme on l'a vu par les exemples, à condition d'employer des raisonnements différents suivant les cas, le théorème I peut être utile parce qu'il montre l'identité de deux problèmes; la solution de l'un de ces problèmes s'aperçoit parfois plus aisément que celle de l'autre. C'est un intérêt du même genre que présente la proposition suivante :

II. *Pour qu'un ensemble donné E puisse être considéré comme l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction, il faut et il suffit qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.*

La condition est nécessaire. L'ensemble des points de discontinuité de f est en effet la somme des ensembles fermés E_n , E_n étant formé des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à $\frac{1}{n}$.

La condition est suffisante. Soit E somme des ensembles fermés $E_1, E_2, \dots$. Par f je désigne une fonction nulle aux points ne faisant pas partie de E et qui, aux points de E, est définie comme il suit. Soit M un point de E_i ne faisant pas partie de

$$E_1 + E_2 + \dots + E_{i-1},$$

si M est intérieur à tout un domaine faisant partie de E_i on prendra

en M f égale à $\frac{1}{i}$ ou 0 suivant que toutes les coordonnées de M seront rationnelles ou non; si M n'est pas intérieur à un tel domaine on prendra $f = \frac{1}{i}$. On vérifie facilement que f est continue pour tous les points ne faisant pas partie de E , et discontinue pour tous les points de E , l'oscillation de f en un point de E_i , n'appartenant pas à $E_1 + E_2 + \dots + E_{i-1}$, étant égale à $\frac{1}{i}$.

Cette proposition va nous permettre d'utiliser un résultat de M. Volterra.

On sait que f est dite ponctuellement discontinue dans le domaine Δ si, dans tout domaine D intérieur à Δ , il y a des points de continuité de f . Si cela est, dans tout domaine D on en peut trouver un autre D' dans lequel f est d'oscillation inférieure à ε choisi arbitrairement positif; cela est évident puisqu'il suffit de prendre D' assez petit et entourant un point de continuité. La réciproque est vraie, en effet, si, dans D , on peut trouver D_1 où l'oscillation de f est inférieure à 1, si, dans D_1 , on peut trouver D_2 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$, si, dans D_2 , on peut trouver D_3 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{3}$, etc.; à l'intérieur de tous ces domaines on peut trouver un point M qui est intérieur à D , en M f est continue.

Supposons maintenant que nous ayons une infinité dénombrable $f_1, f_2, \dots$ de fonctions ponctuellement discontinues dans Δ ; alors on peut reprendre le raisonnement précédent en assujettissant D_p à être intérieur à D_{p-1} et de plus tel que, dans D_p , les oscillations de $f_1, f_2, \dots, f_p$ soient respectivement inférieures à $\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}, \dots, 1$. Alors, au point M , intérieur à tous les D_p , toutes les fonctions f_p sont continues. C'est la proposition de M. Volterra ⁽¹⁾.

Concluons de là, avec M. Volterra, que si E et E_1 sont deux ensembles partout denses dans Δ , c'est-à-dire admettant l'un et l'autre Δ pour ensemble dérivé, et n'ayant aucun point commun, ils ne peuvent être l'un et l'autre ensemble de points de disconti-

(1) En réalité M. Volterra (*Giornale de Battaglini*, 1881) ne s'occupait que d'un nombre fini de fonctions; c'est M. Baire, en utilisant la notion d'ensemble de première catégorie, qui s'est occupé du cas général.

nités pour deux fonctions f et f_1 ; car ces deux fonctions seraient ponctuellement discontinues dans Δ et n'y auraient cependant pas de point de continuité en commun. Par suite, si l'un de ces deux ensembles peut être obtenu comme ensemble $E(a < \varphi < b)$ pour une fonction φ de classe 1, il n'en est certainement pas de même pour l'autre.

Considérons par exemple une fonction f et supposons qu'elle soit supérieure à 0 pour les valeurs irrationnelles de la variable x et pour celles-là seulement. Alors l'ensemble $E(0 < f < +\infty)$ est partout dense ainsi que son complémentaire; celui-ci est d'ailleurs la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés définis chacun par une égalité de la forme $x = \text{constante}$ rationnelle, par suite $E(0 < f < +\infty)$ n'est pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. f n'est donc ni de classe 0 ni de classe 1.

La proposition de M. Volterra nous permet donc d'utiliser le théorème I pour démontrer que certaines fonctions ne sont pas de classe 1. Cette proposition est généralisable de plusieurs manières; en utilisant ces généralisations, on reconnaîtra qu'il y a un rapport étroit entre le théorème de M. Volterra et la condition nécessaire pour qu'une fonction soit de classe 1 qu'a fait connaître M. Baire.

Soit f une fonction de classe 1. Reprenons les nombres m_i qui ont servi pour la démonstration de la première partie de I. Le domaine Δ où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$; d'ailleurs, on peut définir les fonctions φ_i de manière que l'ensemble des points de discontinuité de φ_i soit $E(m_i < f < m_{i+2})$. Toutes ces fonctions ne peuvent être ponctuellement discontinues dans D , intérieur à Δ , sans quoi elles auraient un point de continuité en commun, point qui n'appartiendrait à aucun des $E(m_i < f < m_{i+2})$. Cela revient à dire qu'il existe un certain domaine D' , intérieur à D , et faisant tout entier partie de l'un des $E(m_i < f < m_{i+2})$; en d'autres termes, dans D' , f est d'oscillation inférieure à ε . Puisque ε est quelconque, on conclut de là que f est ponctuellement continue dans Δ .

Pour aller plus loin, remarquons :

1° Que la partie commune à un ensemble parfait $\mathcal{C}$ et à un en-

semble E , somme d'ensembles fermés $E_1, E_2, \dots$, est la somme des ensembles fermés parties communes à $\mathcal{C}$ d'une part et à $E_1, E_2, \dots$ d'autre part ;

2° Que le raisonnement du théorème II légèrement modifié prouve que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E , formé de points d'un ensemble parfait $\mathcal{C}$, soit l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f définie seulement sur $\mathcal{C}$ est qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés ;

3° Que le théorème de M. Volterra peut être démontré pour les fonctions définies sur un ensemble parfait $\mathcal{C}$ et ponctuellement discontinues sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire ayant des points de continuité dans tout domaine contenant, à son intérieur, des points de $\mathcal{C}$.

Dès lors, on peut, dans le raisonnement précédent, remplacer le domaine Δ par un ensemble parfait $\mathcal{C}$ contenu dans Δ et les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ par leurs parties communes avec $\mathcal{C}$. On voit ainsi qu'une fonction de classe 1 est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. C'est la condition nécessaire donnée par M. Baire.

La méthode, très détournée, qui nous y a conduits montre que, théoriquement du moins, la remarque de M. Volterra, jointe au théorème I, permet, tout aussi bien que l'énoncé de M. Baire, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1. Mais cet énoncé est pratiquement plus simple à employer dans la plupart des cas à cause de l'habitude que nous avons d'étudier la continuité ou la discontinuité d'une fonction en un point.

On sait que la condition nécessaire de M. Baire est aussi suffisante en sorte que :

III. *Pour qu'une fonction soit de classe 0 ou 1, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

C'est ce que je vais démontrer.

Il a été démontré que la condition est nécessaire, je vais démontrer qu'elle est suffisante, c'est-à-dire que, si f n'est pas de classe 0 ou 1, il existe un ensemble parfait sur lequel f est totalement discontinue.

Puisque f n'est pas de classe 1, on peut trouver une valeur po-

sitive ε telle que le domaine Δ où f est définie ne soit pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε .

On peut alors distinguer entre les points de Δ . Les uns, les points a , ne peuvent être intérieurs à un domaine D , si petit qu'il soit, sans que D jouisse de la même propriété que Δ ; les autres, les points b , sont intérieurs à des domaines δ assez petits pour être sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ε .

Si M est un point b , tous les points du δ correspondant sont aussi des points b ; par suite, l'ensemble A des points a , s'il en existe, est fermé. Montrons que A existe.

Si Δ ne contenait aucun point a , tous ces points étant b seraient intérieurs à des δ ; d'après un théorème de M. Borel, on doit conclure de là que Δ serait la somme d'un nombre fini de δ et, par suite, la somme de l'ensemble dénombrable des ensembles fermés, en lesquels se décomposaient ces δ , et pour chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε ; cela est contraire à l'hypothèse.

Montrons même qu'il y a plus d'un point a . S'il n'y avait qu'un tel point, le point M , on déduirait du théorème de M. Borel que Δ , moins M , serait la somme d'une infinité dénombrable de δ , donc aussi comme précédemment d'ensembles fermés où f est d'oscillation inférieure à ε . Mais M est lui-même un ensemble fermé d'oscillation inférieure à ε pour f , donc M ne serait pas un point a , mais un point b et l'on pourrait prendre Δ pour δ correspondant.

Concluons de là que l'ensemble A , qui existe certainement, ne contient aucun point isolé, car, si M était un tel point, à condition de prendre autour de M un domaine D assez petit, M serait le seul point a de D .

Donc, *l'ensemble A est parfait.*

Je dis que, sur A , l'oscillation de f est, en tout point, au moins égale à ε . Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour le point M de A . En prenant le domaine D , contenant M , assez petit, f sera d'oscillation inférieure à ε sur l'ensemble parfait α , partie commune à D et A .

L'ensemble des points de D ne faisant pas partie de α est la somme d'une infinité dénombrable de domaines, par exemple des carrés dont les sommets ont des coordonnées rationnelles et qui

ne contiennent pas de points de α . Chacun de ces carrés est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ε , donc il en est de même de leur somme. Et, si l'on ajoute α à ces ensembles, on voit que D est aussi la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés d'oscillation inférieure à ε pour f . Ceci est impossible puisque D contient des points a , par suite f est discontinue sur A en tout point de l'ensemble parfait A .

La démonstration qui précède ⁽¹⁾ montre que le théorème I peut être utilement employé pour l'étude des fonctions de classe 1. Voici deux théorèmes auxquels il conduit facilement ;

IV. *Une série uniformément convergente de fonctions de classe 0 ou 1 a pour somme une fonction de classe 0 ou 1.*

En effet, supposons que la somme f_n des n premiers termes diffère de sa limite f de moins de ε ; le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f_n est d'oscillation inférieure à ε , puisque f_n est de classe 0 ou 1. Or, sur un tel ensemble fermé, f est d'oscillation 3ε au plus ; donc f est de classe 0 ou 1 ⁽²⁾.

Ce théorème, qu'il est aisé de prouver directement, aurait pu nous servir à simplifier la démonstration de I.

V. *Pour qu'une fonction soit de classe 1 dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit de classe 0 ou 1 sur toutes les courbes du domaine et effectivement de classe 1 sur l'une des courbes.*

On sait que, dans le cas de deux variables x, y , par exemple, une courbe est définie par les équations

$$(C) \quad x = f(t), \quad y = g(t),$$

où f et g sont définies et continues dans un intervalle fini. Une

⁽¹⁾ Cette démonstration ne diffère que par la forme de celle que j'ai donnée dans la Note du Livre de M. Borel ; comme elle, elle n'utilise pas la notion de nombre transfini. Dans la Note du Livre de M. Borel, la preuve que la condition énoncée est nécessaire est exposée d'une manière beaucoup plus directe et rapide.

⁽²⁾ On voit que le raisonnement suppose seulement la convergence uniforme simple de la série considérée.

courbe peut remplir un domaine et il existe une infinité de courbes remplissant chacune tout le domaine donné Δ quel qu'il soit.

Si $\Phi(x, y)$ est une fonction donnée, par convention, je dis qu'elle est de classe 1 ou 0 sur la courbe définie plus haut si la fonction composée de $t \Phi[f(t), g(t)] = \varphi(t)$ est de classe 0 ou 1.

Je suppose que la courbe C soit contenue dans le domaine Δ où Φ est définie. Alors, à tout point a de δ correspond, par les formules de définition de C , un point A de Δ , à un point A de C correspond un point au moins a de δ . À un ensemble e de points de δ , nous faisons ainsi correspondre un ensemble E de points de Δ et à un ensemble E de points de C nous faisons correspondre l'ensemble e , de tous les points de δ correspondant à ceux de E . Je dis que, si e (ou E) sont fermés, E (ou e) le sont aussi.

Supposons e fermé et soit $\mathfrak{N}$ un point limite de E . Soient $M_1, M_2, \dots$ des points de E tendant vers $\mathfrak{N}$ et soit m_i l'un des points correspondant à M_i . Les m_i ont au moins un point limite m dont le correspondant M est, puisque f et g sont continues, le point limite de $M_1, M_2, \dots$. Les points M et $\mathfrak{N}$ coïncident donc, et, puisque m fait partie de e , $\mathfrak{N}$ fait partie de E .

Supposons E fermé et soit m un point limite des points $m_1, m_2, \dots$ de e . À ces points correspondent M et $M_1, M_2, \dots$; d'ailleurs, M est évidemment point limite de $M_1, M_2, \dots$, donc fait partie de E , m fait partie de e .

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 0, il en est de même de $\varphi(t)$. Car si $\varphi(m)$ n'était pas la limite de $\varphi(m_i)$, m_i tendant vers m , $\Phi(M) = \varphi(m)$ ne serait pas la limite de $\Phi(M_i) = \varphi(m_i)$, bien que M_i tende vers M ; cela est impossible. Supposons maintenant que Φ soit telle que φ soit continue sur toute courbe C et choisissons pour C une courbe remplissant tout le domaine. Si Φ n'était pas continue, on pourrait trouver une suite de points M_i tendant vers un point limite M et de manière que $\Phi(M_i)$ ait une limite déterminée différente de $\Phi(M)$. Soient E l'ensemble fermé formé des M_i et de M , e , l'ensemble correspondant, m un de ses points limites; m correspond à M . e , étant fermé et φ continue, φ est continue sur e , en m ; or cela est impossible puisque $\varphi(m) = \Phi(M)$ et que $\varphi(m_i) = \Phi(M_i)$ a une limite déterminée différente de $\varphi(m)$. Il y a là une contradiction qui montre que, pour qu'une fonction

soit continue dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit continue sur toute courbe de ce domaine.

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 1, Δ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés E , sur chacun desquels Φ est d'oscillation inférieure à ε . A E correspondant l'ensemble fermé e , φ a sur e même oscillation que Φ sur E et δ est la somme des e ; donc φ est de classe 0 ou 1.

Si, quelle que soit C , φ est de classe 0 ou 1, prenons pour C une courbe remplissant Δ et supposons que, sur C , φ soit de classe 1 (le cas où φ serait de classe 0 a été étudié). Alors δ est la somme d'ensembles fermés e en nombre fini ou dénombrable et sur chacun desquels φ est d'oscillation inférieure à ε , Δ est alors la somme des ensembles fermés E correspondant aux e , donc Φ est de classe 0 ou 1 et l'on sait déjà que Φ ne peut être de classe 0.

Cela démontre le théorème V; c'est ce théorème qui m'a permis, dans une Note des *Comptes rendus* de mars 1899, d'étendre au cas général le théorème III démontré tout d'abord par M. Baire pour les fonctions d'une variable seulement.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE;

Par M. HADAMARD.

1. Soit l'équation linéaire aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont nous voulons déterminer une solution par des données aux limites relatives à une certaine ligne L .

Celle-ci peut se comporter, par rapport aux caractéristiques, de trois façons différentes :

I. Chacune des coordonnées x et y varie, sur L , toujours dans le même sens : autrement dit, L n'admet aucune tangente (sinon tangente d'inflexion) parallèle aux axes, et, si elle présente un point anguleux A , les deux arcs AB , AC issus de ce point sont

situés dans deux angles opposés par le sommet formés par les caractéristiques qui passent en Λ .

Dans ce cas, les données propres à déterminer la solution sont celles de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de z et de ses dérivées premières; et la méthode par laquelle on calcule effectivement la solution ainsi déterminée est celle de Riemann.

II. La ligne L présente un point anguleux A (ou un point pour lequel la tangente est parallèle à l'un des axes) tel que, des quatre angles formés par les caractéristiques qui passent en A , ceux qui contiennent les arcs AB, AC de L sont adjacents.

Dans ce cas, on devra ⁽¹⁾ choisir, *a priori*, les données de Cauchy sur l'un des arcs, AB par exemple, et la valeur de z seul sur l'autre arc.

Le problème ainsi posé se ramène d'ailleurs (moyennant ce qu'on sait sur le cas I) à un autre, pour lequel M. Picard ⁽²⁾ a démontré l'existence de la solution, celui dans lequel on se donne les valeurs sur deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque, se coupant à angle aigu.

Pour résoudre l'un ou l'autre de ces problèmes et calculer la valeur de z en un point quelconque O , ainsi que nous l'avons fait dans un précédent article ⁽³⁾, il ne suffit plus de considérer la fonction u de Riemann. Celle qu'il convient d'introduire, et que nous avons appelée U dans l'article en question, coïncide avec u dans une partie du plan, mais en est distincte dans une autre, séparée de la première par une certaine caractéristique ⁽⁴⁾ dépendant du point O et suivant laquelle la discontinuité qui existe entre ces deux fonctions est proportionnelle à l'exponentielle

$e^{\int b dx}$, soit

$$(2) \quad U(O, M) = u - u_P e^{\int_P^M b dx},$$

P étant le point où la caractéristique en question coupe l'arc AC

⁽¹⁾ Voir un Mémoire précédent : *Sur l'intégrale résiduelle* (ce Bulletin, t. XXVIII, 1900, p. 89 et suiv.).

⁽²⁾ In DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, Note 1.

⁽³⁾ *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (ce Bulletin, t. XXI, 1903).

⁽⁴⁾ PR , figure 1 de l'article qui vient d'être cité.

(et qui n'est d'ailleurs autre que celui où cet arc est coupé par la caractéristique de l'autre système issue du point O).

U est défini par cette condition et celle de s'annuler sur AP.

III. Enfin, lorsque les deux arcs AB, AC sont situés *dans un seul et même angle* formé par les caractéristiques issues de A, M. Goursat a montré ⁽¹⁾ que la fonction z est déterminée lorsqu'on donne des valeurs (sans aucune dérivée) sur AB et sur AC.

Quoique la question n'offre plus le même intérêt que pour les problèmes I et II, en raison de la signification physique de ceux-ci, on est conduit à chercher, pour le problème ainsi posé, une solution effective, par le moyen d'intégrales définies, analogue à celles qui sont acquises pour les précédents.

2. Si le problème III n'a pas une origine physique, nous allons voir qu'il dérive néanmoins, comme cas limite, d'une catégorie de questions qui, au contraire, sont introduites naturellement par les applications.

Nous avons d'ailleurs fait allusion à celle-ci incidemment ⁽²⁾, dans l'article cité : c'est celle à laquelle appartient le problème de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

Il s'agit encore, dans ce cas, de déterminer une solution d'une équation de la forme (1). La ligne L présente, cette fois, la disposition représentée par la figure 1. Elle se compose de deux arcs βB , γC le long desquels le coefficient angulaire de la tangente garde un signe invariable, le même pour les deux (nous supposons que ce signe est +), reliés par un troisième arc $\beta\gamma$ constamment incliné en sens contraire (par conséquent avec $\frac{d\gamma}{dx} < 0$) qui les laisse tous deux d'un même côté. Autrement dit, elle offre deux points anguleux de l'espèce II.

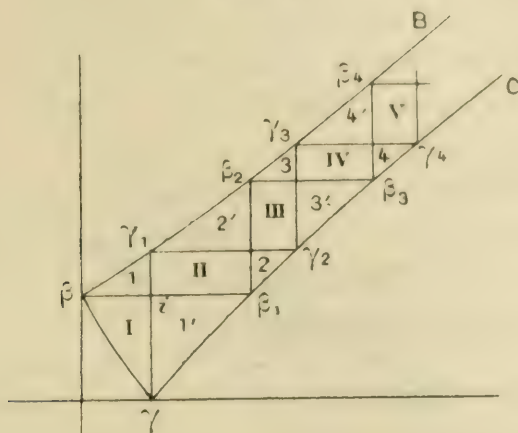
Les données sont celles de Cauchy sur $\beta\gamma$, les valeurs de z sur βB et γC . La fonction cherchée s'obtient par une combinaison des méthodes qui conviennent aux cas I et II. Menons, en effet,

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 8 juin 1903; *Annales Fac. de Toulouse*, 2^e série, Tome VI, p. 117-144.

⁽²⁾ *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 6, note.

par β et γ les caractéristiques $\beta_1\beta_1$ et $\gamma_1\gamma_1$ (dont le point d'intersection sera désigné par i) jusqu'à rencontre en β_1 , γ_1 avec γC , βB respectivement (*fig. 1*); puis, par β_1 et γ_1 , les caractéristiques

Fig. 1.



$\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ qui coupent βB , γC en β_2 , γ_2 , et ainsi de suite. Nous divisons ainsi l'aire Σ comprise entre nos trois arcs de courbe en une série de régions, les unes médianes, I, II, ... (*fig. 1*), qui sont des rectangles (sauf la première), les autres latérales, 1, 2, ...; 1', 2', ..., qui sont des triangles mixtilignes limités chacun par deux segments de caractéristiques et un arc de ligne βB ou γC .

Dans la région I (triangle mixtiligne $\beta i \gamma$), on est dans le cas I et z se détermine par la méthode de Riemann; moyennant quoi, on le calcule dans les régions 1, 1' par la résolution du problème II⁽¹⁾; dans la région II, de nouveau par la méthode de Riemann⁽¹⁾; dans les régions 2, 2' par la résolution du problème II; et ainsi de suite.

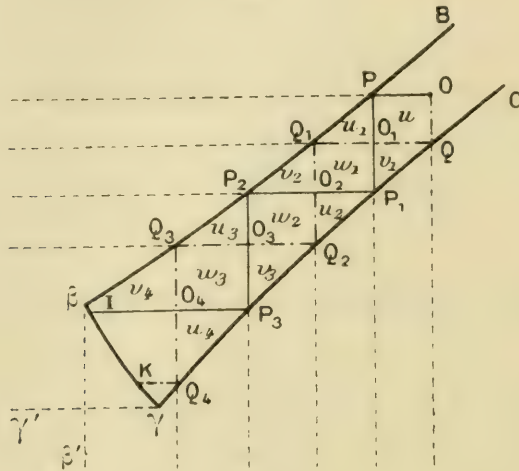
Les caractéristiques qui séparent les unes des autres nos différentes régions correspondent, physiquement, aux ondes et à leurs réflexions successives aux limites (limites représentées par les lignes βB , γC).

(¹) Pour abréger le discours, nous ne distinguons pas entre le problème II et le problème équivalent de M. Picard, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure; ni, de même, entre le problème de Cauchy et la détermination de l'inconnue par ses valeurs sur deux caractéristiques (DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, n° 359), tous deux justiciables de la méthode de Riemann. De même encore, dans le problème actuel (problème III), l'arc $\beta\gamma$ peut se réduire à un segment de caractéristique sur lequel z seul sera donné.

3. Nous présenterons ce calcul sous une forme différente, en partant, non des extrémités β et γ , mais du point quelconque O où nous nous proposons de calculer z .

Par ce point menons les deux caractéristiques OP, OQ. En supposant (comme il est représenté sur les figures 1 et 2) :

Fig. 2.



1° Que $\frac{dy}{dx}$ est, comme nous l'avons déjà admis, toujours positif sur βB ou sur γC ;

2° Que x et y vont tous deux en croissant de β en B et aussi de γ en C;

3° Que le point β a une abscisse plus petite et une ordonnée plus grande que le point γ , ces deux caractéristiques devront être menées, l'une OP parallèlement à l'axe des x et dans le sens des x décroissants, l'autre OQ parallèlement à l'axe des y et dans le sens des y décroissants : la première jusqu'en son point d'intersection P avec βB , la seconde jusqu'en son point d'intersection Q avec γC .

De même, par le point P menons la caractéristique PP_1 parallèle à OQ jusqu'à sa rencontre en P_1 avec γC , et la caractéristique QQ_1 parallèle à OP, jusqu'à sa rencontre en Q_1 avec βB , le point d'intersection de PP_1 , QQ_1 étant désigné par O_1 . Par les points P_1 , Q_1 , nous mènerons les caractéristiques P_1P_2 , Q_1Q_2 , qui se coupent en O_2 et rencontrent en P_2 , Q_2 les arcs βB , γC , etc.

Nous considérerons alors :

1° La fonction u de Riemann relative au point O (solution de

l'équation donnée par rapport au point O et de l'équation adjointe, par rapport à un second point M);

2° La fonction u_1 , également solution de l'équation adjointe qui est nulle sur βP et égale, sur PP_1 , à $u - u_P e^{\int_P^M a dy}$.

Cette double condition définit u_1 dans l'espace compris entre l'arc βP , la droite PP_1 et la parallèle $\beta_1 \beta'_1$ à PP_1 menée par le point β .

3° La fonction v_1 , solution de l'équation adjointe, qui est nulle sur γQ et égale à $u - u_Q e^{\int_Q^M b dx}$ sur QQ_1 .

Cette double condition la définit dans l'espace compris entre γQ , QQ_1 et la parallèle $\gamma_1 \gamma'_1$ à QQ_1 menée par γ .

4° La fonction $w_1 = u_1 + v_1 - u$.

Puis, de même, les fonctions u_2 , v_2 qui se déduisent de w_1 à l'aide des droites $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, comme u_1 , v_1 se déduisent de u à l'aide des droites PP_1 , QQ_1 (ce qui définit u_2 dans l'aire comprise entre $\gamma'_1 \gamma$, γP_1 et $P_1 P_2$, v_2 dans l'aire comprise entre $\beta'_1 \beta$, βQ_1 et $Q_1 Q_2$), et la fonction $w_2 = u_2 + v_2 - w_1$.

Les fonctions u_3 , v_3 se déduiront de u_2 comme u_2 , v_2 de w_1 (à l'aide des caractéristiques $P_2 P_3$, $Q_2 Q_3$) et l'on aura

$$w_3 = u_3 + v_3 - w_2,$$

et ainsi de suite.

Enfin notre fonction U sera égale à u dans le rectangle OPO_1Q , à u_1 dans le triangle mixtiligne PO_1Q_1 , à v_1 dans le triangle QO_1P_1 , à w_1 dans le rectangle $O_1P_1O_2Q_1$, à u_2 dans le triangle $P_1O_2Q_2$, à v_2 dans le triangle $Q_1O_2P_2$, etc.

On voit que U s'annule sur les deux lignes βB , γC et que, d'autre part, il est discontinu sur chacune des lignes $P_i P_{i+1}$, $Q_i Q_{i+1}$, la discontinuité étant proportionnelle à $e^{\int b dx}$ pour celles

qui sont parallèles à l'axe des x , et à $e^{\int a dy}$ pour celles qui sont parallèles à l'axe des y . La valeur de cette discontinuité ne subit d'ailleurs aucune variation brusque lorsque la ligne correspondante est traversée (en un point O_{i+1}) par une autre de système opposé.

On voit aussi que les fonctions u_{2i+1} , v_{2i} s'annulent sur βB , les fonctions u_{2i} , v_{2i+1} sur γC .

4. Posons

$$(3) \quad u_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \varphi_i,$$

la fonction w_0 , qui intervient dans la définition de φ_1 , étant prise égale à u .

Si, dans la relation que nous venons d'écrire, nous remplaçons w_{i-1} par sa valeur, elle devient

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - u_{i-1} - v_{i-1} + w_{i-2} = u_i - v_{i-1} - (-1)^i \varphi_{i-1},$$

et, comme u_i et v_{i-1} sont tous deux nuls sur un même arc de βB ou de γC (suivant la parité de i), on a, sur cet arc,

$$(4) \quad \varphi_i = \varphi_{i-1},$$

pendant que, sur la caractéristique $P_{i-1} P_i$, φ_i est proportionnel à $e^{\int b dx}$ ou à $e^{\int a dy}$, le facteur de proportionnalité étant tel que la relation (4) soit vérifiée au point P_{i-1} .

De même, en posant

$$(3') \quad v_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \psi_i,$$

on aura, sur un arc de βB ou de γC ,

$$(4') \quad \psi_i = \psi_{i-1},$$

pendant que, sur $Q_{i-1} Q_i$, ψ_i sera égal à une exponentielle de la forme précédemment indiquée ayant la valeur ψ_{i-1} au point Q_{i-1} .

Ces conditions définissent les fonctions φ_i *indépendamment* des ψ_i , et inversement.

Comme on a, d'autre part, en vertu de la définition de w_i ,

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - w_{i-1} = w_i - v_i,$$

la différence $w_i - w_{i-1}$ est égale à $(-1)^{i+1} (\varphi_i + \psi_i)$, de sorte qu'on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \\ u_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_{i-1}, \\ v_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_{i-1} \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \end{array} \right.$$

en un mot

$$(6) \quad U(M, O) = U = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i + \psi_1 - \psi_2 + \dots - \psi_k,$$

où i et k (qui diffèrent entre eux au plus d'une unité) sont respectivement les nombres de lignes $P_{h-1}P_h$ et $Q_{h-1}Q_h$ qu'il faut traverser pour aller de O en M .

On peut encore écrire

$$(7) \quad U = u + \Phi - \Psi,$$

où

$$(8) \quad \begin{cases} \Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i, \\ \Psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots \pm \psi_k. \end{cases}$$

§. La fonction U ainsi définie est celle qui donne la solution du problème précédemment posé. Il suffit d'appliquer à cette fonction et à la fonction z la formule fondamentale dans l'aire $OP\beta\gamma QO$.

L'arc $\beta\gamma$ coupe toujours deux (exactement) des lignes P_iP_{i+1} , Q_iQ_{i+1} : soient I son point d'intersection avec un arc P_iP_{i+1} , K son point d'intersection avec un arc Q_kQ_{k+1} (k étant égal à $i-1$, à i ou à $i+1$); on aura

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \sum_{h=0}^i (\omega_h z)_{P_h} + \sum_{h'=0}^k (\omega_{h'} z)_{Q_{h'}} + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_I \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^k (\psi_{k+1} z)_K + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dv} ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dv} ds \\ &+ \int_{\beta}^{\gamma} \left[\frac{1}{2} \left(U \frac{dz}{dv} - z \frac{dU}{dv} \right) ds + U z (b dx - a dy) \right], \end{aligned} \right.$$

où s désigne, comme dans l'article : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, l'arc de contour et v la conormale à ce contour, définie comme dans l'article en question (1).

§ bis. En substituant à l'arc $\beta\gamma$, comme limite de l'aire d'inté-

(1) Cette formule est relative à la disposition de figure admise dans le texte, c'est-à-dire suppose que OP est parallèle à l'axe des x et OQ à l'axe des y . Dans le cas contraire, il faudrait changer les signes des termes intégraux.

gration, deux caractéristiques menées (dans le sens des x et des y croissants, cette fois) par un second point O' , on reconnaîtra, absolument comme nous l'avons fait pour le problème II, dans l'article cité ⁽¹⁾, que notre fonction U ne change pas quand on permute les deux points dont elle dépend, en même temps que l'équation donnée avec son adjointe.

U , considéré comme fonction du point O , satisfait donc à l'équation donnée. Il a la forme u_i , v_i ou w_i suivant que, considéré comme fonction de O' , il avait la forme v_i , u_i ou w_i .

6. La situation de l'arc $\beta\gamma$ par rapport aux lignes de discontinuité de U est, de même, liée très simplement à la position du point O dans l'une ou l'autre des régions énumérées au n° 2. Les deux caractéristiques $P_i P_{i+1}$, $Q_k Q_{k+1}$ rencontrées par $\beta\gamma$ sont parallèles entre elles si O est dans une des régions latérales, perpendiculaires s'il est dans une des régions médianes.

Dans ce dernier cas, il est vrai (où $k = i$), deux dispositions sont possibles; l'arc $\beta\gamma$ pouvant laisser le point O_{i+1} en deçà (c'est-à-dire du même côté que O) ou au delà; et cette disposition dépend d'autre chose que des régions précédemment énumérées. Il pourrait sembler, au premier abord, qu'elle intervient d'une façon essentielle dans la solution, si l'on se bornait à définir U comme nous l'avons fait au n° 3. Les résultats du n° 4 et la formule (9) montrent qu'il n'en est rien, les termes introduits respectivement par les deux séries de discontinuités étant totalement indépendants les uns des autres.

7. De la solution qui vient d'être développée on passe très simplement à celle du problème de M. Goursat pour la figure formée par les deux arcs AB , AC , situés dans un même angle formé par les caractéristiques issues de A . Il suffit de supposer que l'on prenne sur AB , AC respectivement deux points β , γ , qu'on les joigne par un chemin quelconque (incliné, par rapport aux caractéristiques, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède), puis que cet arc $\beta\gamma$ devienne infiniment petit, ses deux extrémités tendant simultanément vers le point A . Dans ces conditions, les

⁽¹⁾ Sur un problème mixte aux dérivées partielles, n° 5.

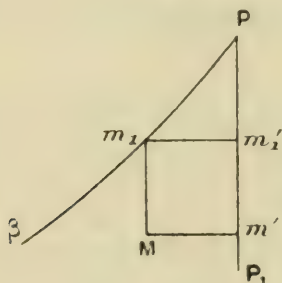
points P_i , Q_i seront évidemment en nombre infini ainsi que les fonctions φ_i , ψ_i et les sommes qui figurent dans la formule (9) seront transformées en séries.

8. Il reste à savoir comment les fonctions U , φ_i , ψ_i se comporteront à la limite. Nous remonterons, pour cela, à la formation de ces fonctions par la méthode d'approximation employée par M. Picard pour résoudre le problème dont nous avons parlé plus haut.

En appelant PP_1 et $P\beta$ deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque ⁽¹⁾, se coupant à angle aigu, et sur lesquelles on donne les valeurs de l'inconnue z (concordantes en P), cette méthode consiste, on le sait, à déterminer tout d'abord, par ces données aux limites, une solution z_0 de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, c'est-à-dire une quantité de la forme $X + Y$ (où X ne dépend que de x et Y de y).

Supposons, comme nous l'avons fait, que PP_1 soit parallèle à l'axe des y : alors Y sera la valeur donnée z au point m' , projection du point considéré $M(x, y)$ sur PP_1 . Quant à X , on l'obtiendra en menant par M une parallèle à PP_1 , jusqu'à rencontre en m_1 (*fig. 3*) avec $P\beta$, et projetant à son tour le point m_1 en m'_1

Fig. 3.



sur PP_1 . X est alors la différence (nulle en P) des valeurs de z en m_1 et m'_1 .

⁽¹⁾ M. Picard prend, pour équation de $P\beta$, $y = x$. La méthode est la même pour le cas de $P\beta$ quelconque, les deux cas se déduisant d'ailleurs l'un de l'autre par un changement de variable évident opéré sur x ou sur y .

z_0 étant ainsi défini, on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = - \int \int \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 \right) dx dy, \\ z_2 = - \int \int \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1 \right) dx dy, \\ \dots\dots\dots, \\ z_k = - \int \int \left(a \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{k-1}}{\partial y} + c z_{k-1} \right) dx dy, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

les intégrales doubles étant étendues au rectangle $Mm_1m'm'_1$; puis

$$(11) \quad z = z_0 + z_1 + \dots + z_k + \dots$$

L'intégrale double

$$I = \int \int f dx dy,$$

étendue au rectangle $Mm_1m'm'_1$, considérée comme fonction des coordonnées x, y du point M , a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y} &= - \int_M^{m'} f dx, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= - \int_M^{m_1} f dy + p \int_{m_1}^{m'_1} f dx. \end{aligned}$$

en désignant par p le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à la ligne $P\beta$ au point m_1 .

Nous supposerons que ce coefficient p est inférieur en valeur absolue à un nombre fixe K ⁽¹⁾. Cette condition est vérifiée pour pour nos deux lignes AB et AC si, ayant une courbure déterminée, elles ne sont tangentes en A à aucune des caractéristiques issues de ce point. Nous ferons donc, dans ce qui suit, cette hypothèse restrictive.

Soient, dans ces conditions, M le maximum du module de z_0 ; M_1 celui de la dérivée X' ; M_2 celui de la dérivée Y' ; H celui des coefficients de l'équation ; $\xi = Mm'$ et $\tau_1 = Mm_1$ les deux dimen-

⁽¹⁾ Le calcul actuel subsiste donc pour le cas où la ligne $P\beta$ est normale à PP_1 , mais non pour celui où elle lui est tangente.

sions du rectangle d'intégration, dans les formules (10). On aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| &\leq \xi H(M + M_1 + M_2), \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &\leq (p\xi + \tau_1) H(M + M_1 + M_2), \\ |z_1| &\leq \left(p \frac{\xi^2}{2} + \xi \tau_1 \right) H(M + M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est d'ailleurs, avec la précédente, dans un rapport que l'on peut limiter *a priori*, connaissant des limites supérieures de ξ et de τ_1 , et qui est même aussi petit qu'on le veut si ces limites sont suffisamment petites. On peut donc en faire abstraction pour majorer l'expression $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$, sous condition d'augmenter convenablement H.

De la limitation ainsi obtenue pour $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$, on déduit par intégration de 0 à ξ par rapport à ξ , ou de 0 à τ_1 par rapport à τ_1 , des limites supérieures pour z_2 et ses dérivées premières; en poursuivant ce calcul, on voit sans difficulté que z_p et ses dérivées sont inférieurs à la quantité

$$(M + M_1 + M_2) \frac{H_1^k (\xi + \tau_1)^k}{k!},$$

H_1 ne dépendant que des coefficients de l'équation et de la quantité désignée précédemment par K (autrement dit, de la forme de la ligne P β).

$z = z_0$ et ses dérivées premières sont donc inférieurs à $(M + M_1 + M_2)[e^{H_1(\xi + \tau_1)} - 1]$, ou (du moment qu'on a limité ξ et τ_1) à

$$(12) \quad H_2(M + M_1 + M_2)(\xi + \tau_1),$$

H_2 ne dépendant que des coefficients de l'équation, de la quantité K et des limites supérieures de ξ , τ_1 .

9. Nous ne nous servons toutefois de cette première évaluation que pour l'appliquer à la fonction U qui figure dans l'article cité : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (autrement dit à celle que nous appelons u_1 ou v_1 dans notre nota-

tion actuelle). Cette fonction étant définie par ses valeurs sur l'arc de courbe et celles qu'elle prend sur un segment de caractéristique (valeurs dont les premières sont nulles et les secondes immédiatement liées à la fonction de Riemann), nous voyons, par ce qui précède, que l'on connaît des limites supérieures de U et de ses dérivées premières par rapport aux coordonnées du point M , si l'on a limité les coordonnées des deux points et le coefficient angulaire de la tangente à la ligne $P\beta$. Des calculs tout semblables étendraient cette conclusion aux dérivées d'ordre supérieur.

D'autre part, nous verrons plus loin qu'elle subsiste également lorsqu'on différencie, non seulement par rapport aux coordonnées du point M , mais aussi par rapport à celles du point O .

Ces résultats relatifs à la fonction U nous permettent d'assigner, à la fonction z que nous avons considérée au numéro précédent, une limite supérieure plus avantageuse que la première. Il suffit pour cela partir de la formule (1)

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} z_M &= (uz)_{m_1} + (uz)_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx} z_{m'_1} \\ &\quad - \int_P^{m'} z \left(\frac{\partial U}{\partial y} - aU \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{ds} ds, \end{aligned} \right.$$

qui peut s'écrire

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} z_M &= (uz)_{m_1} + u_{m'}(z_{m'} - z_{m'_1}) + z_{m'_1} \left(u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx} \right) \\ &\quad - \int_P^{m'} z \left(\frac{\partial U}{\partial y} - aU \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{ds} ds. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $u_{m_1} - 1$, $u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx}$, $\frac{\partial U}{\partial y} - aU$, $\frac{dU}{ds}$ ont toutes des limites supérieures de la forme $H_3 \eta$ (où H_3 est limité de la même façon que H_1 et H_2). Cela résulte, pour les deux premières, de la forme de la fonction de Riemann; pour les deux dernières (moyennant les limitations obtenues au numéro précédent) de ce que les valeurs (2) de U sont nulles sur Pm_1 et proportionnelles à η

(1) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 4.

(2) *Ibid.*, n° 2.

sur $m_1 m'_1$. Si l'on remarque que $z_{m'} = z_{m_1}$ est le produit de τ_1 par une valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur PP_1 , on peut écrire

$$(14) \quad |z_M - z_{m_1}| \leq H_4 \tau_1 (|z_{m_1}| + M)$$

ou

$$(14') \quad |z_M| \leq (1 + H_4 \tau_1) |z_{m_1}| + H_4 \tau_1 M.$$

H_4 étant une quantité analogue à H_1, H_2, H_3 ; M , une limite supérieure des modules de z et de sa dérivée sur PP_1 ; m_2, m_3 , des points de l'arc Pm_1 .

La formule (13) fournit également des limites supérieures des dérivées de z , savoir :

Pour $\frac{\partial z}{\partial y}$, une combinaison linéaire à coefficients finis de M et du maximum de $|z|$ sur Pm_1 ;

Pour $\frac{\partial z}{\partial x}$, une combinaison des mêmes quantités et de la dérivée $\frac{dz}{dx}$ prise en m_1 suivant la courbe Pm_1 . On a

$$(15) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz_{m_1}}{dx} e^{\int_M^{m_1} a dy} + H_5 z_{m_1} + H_6 M.$$

où la dérivée $\frac{dz_{m_1}}{dx}$ est prise le long de la ligne Pm_1 , m_1 étant un point de cette ligne; H_5, H_6 des nombres finis.

10. Cela posé, revenons aux fonctions φ_i et ψ_i . Nous pouvons en indiquer immédiatement les valeurs sur les lignes de discontinuité correspondantes. On a, évidemment, sur une ligne $P_i P_{i+1}$,

$$(16) \quad \varphi_i = -e^{\int_0^P b dx + \int_P^{P_1} a dy + \int_{P_1}^{P_2} b dx + \dots}.$$

Il est clair que la série des intégrales est absolument convergente si les coefficients restent finis. Donc les valeurs considérées des φ_i tendent vers une limite λ différente de zéro, et même la série $\sum [\varphi_{i+1}(P_{i+1}) - \varphi_i(P_i)]$ converge absolument.

Ceci nous permet, tout d'abord, de voir ce que devient, lorsque i

augmente indéfiniment, la somme

$$\sum_0^i (w_h z) p_h$$

qui figure dans la formule (9) et peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$(17) \quad \sum_0^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z) p_h = \sum_0^i (-1)^{h+1} (\varphi_{h+1} z) p_h.$$

Pour $i = \infty$, on a une série, laquelle est divergente, puisque le terme général ne tend pas vers zéro. Mais, en groupant les termes deux à deux, on obtient au contraire les deux séries

$$(18) \quad -[(z \varphi_0) p - (z \varphi_1) p_1] - [(z \varphi_2) p_2 - (z \varphi_3) p_3] - \dots,$$

$$(18') \quad -(z \varphi_0) p + [(z \varphi_1) p_1 - (z \varphi_2) p_2] + [(z \varphi_3) p_3 - (z \varphi_4) p_4]$$

qui sont toutes deux convergentes. Du moins, il en est ainsi si les valeurs de z sur chacun des deux arcs donnés tendent, lorsqu'on s'approche du sommet de l'angle, vers une même limite z_A , et cela de manière que la série $\sum (z_{p_{i+1}} - z_{p_i})$ soit absolument convergente.

Dans ces conditions, en un mot, la série (17) a deux sommes, suivant qu'on s'arrête à un terme de rang pair ou à un terme de rang impair.

La différence de ces deux sommes étant λz_A , la quantité

$$(19) \quad \sum_0^i (w_h z) p_h + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_1$$

qui figure dans la formule (9), tend vers une limite parfaitement déterminée, à savoir la moyenne des deux sommes en question ⁽¹⁾. Cette limite [somme généralisée de la série (17) au sens de Leibniz-Borel] sera désignée par S.

(1) Nous admettons ici, comme nous serons conduits à le faire plus loin, que les valeurs de z tendent vers z_A lorsqu'on s'approche de A d'une manière quelconque à l'intérieur de l'angle BAC.

De même les quantités $\varphi_i(Q_i)$ tendront vers une limite $(1) \mu$, et la quantité

$$\sum_0^k (w_h, z) q_h = \frac{1}{2} (-1)^k (\varphi_{k+1} z)_R,$$

vers une limite S' .

11. Les valeurs (16) d'une fonction quelconque φ_i jouent, dans sa détermination, le rôle de la fonction que nous appelions tout à l'heure Y : il est donc certain que cette fonction et sa dérivée ont une limite supérieure indépendante de i .

Nous allons montrer que les valeurs des $|\varphi_i|$ (mais non, cette fois, de leurs dérivées) sur les arcs AP, AQ, et, par conséquent, aussi dans toute la région qui nous intéresse, sont aussi inférieures à un nombre fixe.

Appelons, pour abrégé, *conséquent* d'un point de l'arc AB, le point de l'arc AC qui a même abscisse, et *conséquent* d'un point de l'arc AC, le point de AB qui a même ordonnée, le premier point étant, dans l'un et l'autre cas, appelé *l'antécédent du second*. L'antécédent et le conséquent occupent, l'un par rapport à l'autre, la situation des points m_1 et M, considérés au n° 9; c'est, en particulier, l'antécédent de M qui joue le rôle du point m_1 lorsqu'on calcule une fonction φ_i en M à l'aide des fonctions précédentes par la formule (13). Le segment désigné, au n° 9, par γ est parallèle tantôt à l'axe des x (si le point M est sur AB), tantôt à l'axe des y (si M est sur AC).

Cela posé, la valeur d'une fonction φ_{2i} (par exemple) en un point M de l'arc AP est liée, par l'inégalité (14'), à la valeur de cette même fonction, ou, ce qui revient au même, de φ_{2i-1} en un point m_3 de AQ plus éloigné de A que l'antécédent de M. Cette dernière valeur est liée d'une manière analogue à la valeur de φ_{2i-2} en un point de AP plus éloigné de A que l'antécédent de m_3 , le

(1) Cette limite est égale à la précédente lorsque l'équation est à invariants égaux. Alors, en effet, $b dx + a dy$ est une différentielle exacte, et l'on a

$$\lambda = \mu = -e^{\int_0^{\lambda} b dx + a dy}.$$

nouveau segment γ_i étant, cette fois, celui qui joint m_3 à son antécédent, et ainsi de suite.

Il est clair que les différents segments γ_i forment une série convergente, dont la somme est toujours inférieure à la somme σ des deux coordonnées du point O, rapportées aux axes $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il en résulte sans difficulté ⁽¹⁾ que les φ_i sont finis, comme nous l'avions annoncé.

12. On peut même aller plus loin. Considérons les conséquents successifs d'un point quelconque M_0 de AB ou de AC et la valeur que prend, au $i^{\text{ème}}$ de ces conséquents, la fonction φ_i . On a ainsi, en faisant varier i , une série de quantités qui tendent vers une limite l . C'est ce qu'on voit immédiatement en partant non plus de l'inégalité (14'), mais de l'inégalité (14), le second membre de cette inégalité étant le terme général d'une série convergente. La différence entre l et le terme initial $\varphi_0(M_0)$ est au plus de l'ordre de la somme de cette série, c'est-à-dire de $2H_4 \mathfrak{M} \sigma_0$, $\mathfrak{M}$ étant le maximum des $|\varphi_i|$ et σ_0 la somme des deux coordonnées de M_0 .

Mais, quoique les conséquents successifs tendent toujours vers le point A, la limite l est variable avec le point M_0 . En effet, lorsque M_0 coïncide avec P, l est donné par la formule (16); et, d'autre part, lorsque M_0 tend vers A, l tend vers $-u_A$ [puisqu'il en est ainsi pour $\varphi_0(M_0)$ et que σ_0 tend vers zéro]. Or ces deux valeurs de l sont évidemment différentes en général.

13. Passons aux dérivées premières des φ_i . Ces dérivées sont de deux sortes. Nous appellerons *dérivées parallèles* les dérivées des φ_{2i} par rapport à x , ou des φ_{2i+1} par rapport à y , qui jouent le rôle de ce qui était, au n° 9, une dérivée par rapport à y ; *dérivées perpendiculaires*, les dérivées des φ_{2i} par rapport à y , ou des φ_{2i+1} par rapport à x .

Les dérivées parallèles restent finies, en vertu de l'évaluation obtenue au n° 9 pour $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(1) En effet, soit Π_i le produit des i premières valeurs de $1 + \Pi_1 \tau_i$. Ce produit est toujours inférieur à $e^{\Pi_1 \sigma}$. Il en résulte [en divisant l'inégalité (14') par Π_i] que φ_i est inférieur à

$$\mathfrak{M} < e^{\Pi_1 \sigma} \left(1 + \Pi_1 \mathfrak{M} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau_i}{\Pi_i} \right) < e^{\Pi_1 \sigma} (1 + \Pi_1 \mathfrak{M} \sigma).$$

Il ne saurait évidemment en être de même pour les dérivées perpendiculaires, d'après ce que nous venons de trouver au n° 12.

On peut, d'ailleurs, vérifier directement que ces dérivées augmentent indéfiniment. Partons, par exemple, de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$, en supposant que AB et AC soient deux droites, de coefficients angulaires $\alpha > 1$ et $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$. Les φ_i successifs sont tous égaux à 1 sur les segments correspondants de la ligne brisée $OPP_1P_2\dots$, et leurs dérivées parallèles sont nulles dans les mêmes conditions. Soient p_0, q_1 les dérivées perpendiculaires $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ au point P; p_1, q_2 les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$ au point P_1 ; etc. On a

$$\begin{aligned} p_0 &= \overline{OP}, \\ q_1 &= \alpha p_0, \\ p_1 &= \alpha p_0 + \overline{PP_1}, \\ p_2 &= \alpha p_1 + \overline{P_1P_2}, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

en général :

$$p_{i+1} = \alpha p_i + \overline{P_iP_{i+1}} = \frac{\overline{PP_1}}{\alpha^i},$$

d'où

$$p_i = k \alpha^i = \frac{k'}{\alpha^i}$$

avec

$$k' = \frac{\alpha \cdot \overline{PP_1}}{\alpha^2 - 1}, \quad k = k' + \overline{OP}.$$

p_i croît donc indéfiniment comme α^i .

Nous pouvons, par contre, limiter la croissance de ces dérivées perpendiculaires à l'aide de l'inégalité (15) (n° 9). Supposons que les deux lignes données AB et AC ne soient pas tangentes entre elles, de sorte que leurs coefficients angulaires soient α et $\alpha' < \alpha$. L'inégalité en question montre (1) que le maximum de la dérivée perpendiculaire de φ_i croît au plus comme $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\right)^i$.

(1) Le nombre par lequel il faut multiplier la dérivée perpendiculaire de φ_i en un point pour obtenir [abstraction faite d'un terme additif provenant des termes $\Pi_3 z_{m_3} + \Pi_5 M$ qui figurent dans la formule (15)] celle de φ_{i+2} au deuxième con-

Des évaluations ainsi faites sur les φ_i résultent celles qui concernent U, savoir :

1° U croît au plus comme l'indice i ;

Puis, en supposant toujours que nos deux lignes ont des tangentes distinctes :

2° Les dérivées premières de U croissent au plus comme $\left(\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right)^i$.

Considérons un segment de caractéristique tracé entre AB et AC. S'il est compris dans la région d'existence de φ_i , sa longueur est au plus de l'ordre de $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{i}{2}}$. Donc la variation totale (JORDAN, *Cours d'Analyse*) de U le long de ce segment est finie.

14. Dans ces conditions, nous sommes en mesure de passer à la limite dans la formule (9). Nous prendrons à cet effet, pour $\beta\gamma$, un segment de caractéristique, de sorte que l'intégrale suivant $\beta\gamma$ peut s'écrire (1)

$$(20) \quad \int_{\beta}^{\gamma} U z (b dx - a dy) \pm \frac{1}{2} (U dz - z dU),$$

le signe + devant être pris si $\beta\gamma$ est parallèle à l'axe x , le signe — dans le cas contraire. Le terme $\pm \frac{1}{2} U dz$ sera intégré par parties, ce qui donnera un terme tout intégré

$$(21) \quad \pm \frac{1}{2} \int d(Uz) = \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_1 + \frac{1}{2} (-1)^k (\varphi_{k+1} z)_K$$

séquent de ce point peut être un peu plus grand que $\frac{\alpha'}{\alpha}$ en raison : 1° du facteur exponentiel $e^{\int a dy}$; 2° de la courbure des lignes données. Mais il est aisé de voir que les facteurs supplémentaires qu'il serait nécessaire d'introduire pour tenir compte de cette circonstance donnent un produit convergent, si AB et AC ont une courbure finie, et même si ces lignes ont en A une singularité algébrique. Il suffit même (on s'en convainc aisément); pour que le produit du maximum de la dérivée perpendiculaire de φ_i par le segment $P_i P_{i+1}$ reste fini, que la courbure de chacune des lignes AB, AC garde un sens invariable au voisinage de A; plus généralement, encore, que le coefficient angulaire de la tangente soit à variation bornée.

(1) La conormale v est définie, rappelons-le, par les relations

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{dy}{ds}.$$

(puisque U est nul aux extrémités), terme qui viendrait doubler le terme semblable de la formule (9), et un terme intégral

$$(21') \quad \int_{\beta}^{\gamma} U z (b dx - a dy) \mp z dU.$$

Nous imposerons à la fonction inconnue z la condition d'être parfaitement continue au voisinage de A , de sorte que $z = z_A + \varepsilon$, ou ε est infiniment petit. Alors dans l'intégrale (21'), la partie provenant de ε tend vers zéro, puisque la variation totale de U est finie. Le reste de l'intégrale se réduit à $\mp z_A \int_{\beta}^{\gamma} du$. Il change donc le signe des termes (21). (Tout se passe, en somme, comme si nous avions intégré par parties, non le terme $U dz$, mais le terme $z dU$, sauf que le détour employé nous dispense de faire des hypothèses sur l'ordre de grandeur des dérivées de z .)

On voit donc que, si l'équation (1) admet une solution z satisfaisant aux conditions aux limites données et continue en A , cette solution est forcément donnée par la formule

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 = \lim_{i,k \rightarrow \infty} & \left\{ \sum_{h=0}^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z)_{P_h} \right. \\ & \left. + \sum_{h'=0}^k (-1)^{h'+1} (\psi_{h'} z)_{Q_{h'}} + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{d\sigma} ds - \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{d\sigma} ds \right\}, \end{aligned} \right.$$

les termes $(-1)^i (\varphi_{i+1} z)_I + (-1)^k (\psi_{k+1} z)_K$ ayant disparu comme nous venons de le voir.

15. Il y a lieu de se demander si la restriction que nous venons d'imposer à z n'est pas purement artificielle. Il n'en est rien : cette restriction (ou, du moins, une restriction de cette espèce) est imposée par la nature des choses. On pourrait rechercher des fonctions z satisfaisant à notre équation et tendant (quoique non uniformément au voisinage de A) vers les valeurs données lorsqu'on s'approcherait d'un point quelconque de AB ou de AC ; mais le problème ainsi posé est tout à fait indéterminé.

Il suffit en effet, pour obtenir une telle solution z , de la déterminer par les valeurs données sur AB , AC et par des données de Cauchy *arbitraires* sur une ligne BC reliant les arcs donnés : c'est

le problème posé au n° 2 et résolu aux n°s 2-6, l'arc BC jouant, cette fois, le rôle de $\beta\gamma$.

On peut, d'ailleurs, imposer à z la condition d'être continu (ailleurs qu'en A) ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé quelconque, pourvu que des conditions de continuité correspondantes (supposées vérifiées sur AB et sur AC) soient aussi imposées en B, en C et le long de l'arc BC.

16. Si le second membre de la formule (22) ne tend pas vers une limite déterminée, le problème est impossible.

Nous allons voir que la limite existera si les maxima de $|z - z_A|$ sur les arcs $P_i Q_{i+1}$, $Q_i P_{i+1}$ forment deux séries convergentes. C'est ce qui arrivera, en particulier (puisque, dans nos hypothèses, les segments AP_i , AQ_i décroissent en progression géométrique) si les valeurs données vérifient la condition de Lipschitz ou même la condition moins restrictive

$$(23) \quad |z_M - z_A| < \overline{AM}^\rho \quad (\rho > 0).$$

Pour établir la conclusion que nous venons d'énoncer, nous aurons à étudier les intégrales

$$\int_{\beta}^P z \frac{dU}{d\gamma} ds, \quad \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{d\gamma} ds.$$

U étant donné par la relation (7), nous pouvons, par exemple, nous borner à l'étude de

$$\int_{\beta}^P \frac{d\Phi}{d\gamma} ds.$$

Posons

$$\Phi = \Phi' - \Phi'',$$

Φ' désignant [dans le second membre de la première formule (8)] la somme des termes pris avec le signe + (c'est-à-dire d'indice impair) et Φ'' , la somme des termes pris avec le signe —. On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi'}{d\gamma} ds &= \frac{\partial\Phi'}{\partial x} dx - \frac{\partial\Phi'}{\partial y} dy = d\Phi' - 2 \frac{\partial\Phi'}{\partial \gamma} d\gamma, \\ \frac{d\Phi''}{d\gamma} ds &= -d\Phi'' + 2 \frac{\partial\Phi''}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

la transformation étant, chaque fois, dirigée de manière à faire

apparaître, au second terme, une dérivée parallèle. Les dérivées de cette espèce croissant, pour Φ' et pour Φ'' , au plus comme i , les intégrales correspondantes sont évidemment finies. Dans l'intégrale

$$\int_{\beta}^{\cdot P} z d \frac{\Phi' + \Phi''}{2},$$

nous remplacerons z par $(z - z_A) + z_A$, et la partie correspondant à $z - z_A$ sera finie (puisque la variation totale de $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$ sur chacun des arcs $P_i Q_{i+1}$, $Q_i P_{i+1}$ est finie) moyennant l'hypothèse faite il y a un instant. Si l'on tient compte des termes analogues en $\frac{dV}{ds}$ et de ceux qui sont relatifs à l'arc AC, — en remarquant que, la fonction $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$, par exemple, s'augmente de φ_i chaque fois qu'on traverse (en se dirigeant vers A) un point P_i , — la formule (22) s'écrira

$$(22') \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \sum_0^{\infty} (1)^{h+1} [\varphi_h(z - z_A)]_{P_h} + \sum_0^{\infty} (-1)^{h'+1} [\psi_{h'}(z - z_A)]_{Q_{h'}} \\ &+ \int_{QAP} z \left[\frac{1}{2} \frac{du}{dv} ds - \frac{\partial(\Phi' - \Psi'')}{\partial x} dx - \frac{\partial(\Phi'' - \Psi')}{\partial y} dy \right] \\ &+ \int_{QAP} (z - z_A) d \frac{\Phi' + \Phi'' - \Psi' - \Psi''}{2}, \end{aligned} \right.$$

formule dont tous les termes ont un sens.

17. Nous avons ainsi établi l'unicité de la solution et la convergence de l'expression (22), moyennant les hypothèses suivantes : 1° aucune des lignes AB, AC n'est tangente à une caractéristique; 2° ces lignes ont, en A, des tangentes distinctes; 3° la variation totale du coefficient angulaire de la tangente sur chacune d'elles est finie (n° 13, note); 4° la valeur de z sur chacune d'elles satisfait à l'inégalité (23).

Il y aurait, sans doute, lieu d'examiner ce qui se passerait si l'on renonçait à quelques-unes de ces conditions, qui ne sont probablement pas toutes nécessaires, surtout la première. Je laisserai toutefois cette question de côté et m'occuperai seulement d'établir que la fonction formée comme nous venons de l'indiquer remplit bien les conditions de l'énoncé.

En premier lieu, si le point O est sur AB ou AC, il est aisé de voir que tous les termes de (22) se détruisent, à l'exception d'un seul, égal à la valeur donnée en ce point.

Ceci, il est vrai, ne serait pas suffisant pour affirmer que z prend cette valeur, ceci impliquant la continuité. Nous établirons cette dernière en calculant les dérivées de z .

18. Reprenons pour cela, comme nous l'avons fait au n° 8, une fonction z , solution d'une équation de la forme (1), déterminée par ses valeurs suivant les deux lignes PP_1 , $P\beta$. Supposons que ces valeurs dépendent continûment (ainsi que les dérivées premières X' , Y') d'un paramètre t . Si les quantités M , M_1 , M_2 du n° 8 sont toujours finies, z sera une fonction continue de t . Cela est, en effet, vrai, pour chaque terme de la série (11), laquelle est uniformément convergente.

Cette conclusion reste vraie si [la courbe $P\beta$ restant fixe (1)] l'abscisse de la verticale PP_1 dépend (continûment) de t .

On déduit aisément de là que, si les données sont dérivables par rapport à t , il en est de même de z (pourvu que les M , M_1 , M_2 relatifs à $\frac{\partial z}{\partial t}$ soient finis). Si l'abscisse de PP_1 est indépendante de t , cette dérivée sera la solution de (1) qui prend, sur PP_1 et $P\beta$, les valeurs $\frac{\partial z}{\partial t}$. Si, au contraire, l'abscisse de PP_1 a, par rapport à t , une dérivée égale à τ , la dérivée de z sera la fonction qui prend, sur $P\beta$, les valeurs $\frac{\partial z}{\partial t}$ et, sur PP_1 , les valeurs

$$(24) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - \tau \frac{\partial z}{\partial x},$$

dans laquelle la dérivée $\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)$ s'obtient en prenant pour variables indépendantes t et z (x étant constamment égal à l'abscisse de PP_1).

19. Dans le cas qui nous intéresse actuellement, t désigne l'une ou l'autre des coordonnées du point O.

(1) Rien n'empêcherait, bien entendu, d'établir un théorème analogue en faisant varier la courbe. Mais ce théorème ne nous sera pas utile.

La dérivation de la valeur de z_0 introduira évidemment les dérivées de z par rapport à l'arc s du contour donné et il est manifestement nécessaire que ces dérivées existent. Nous supposons de plus que (le point M tendant vers A) elle ne croissent pas plus vite que $\frac{1}{AM^{1-\rho}}$; ce qui entraîne l'inégalité (23).

Dans ces conditions, la série

$$\sum (-1)^{h+1} \left(\varphi_h \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{r_h} = \sum (-1)^{h+1} \left(\varphi_h \frac{dz}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} \right)_{r_h}$$

sera convergente (et cela uniformément pour toute position du point O non infiniment voisine de A) parce que $\frac{\partial s}{\partial t}$ tendra vers zéro comme $\left(\frac{x'}{x} \right)^{\frac{h}{2}}$, tandis que $\frac{dz}{ds}$ n'augmentera indéfiniment que comme $\left(\frac{x}{x'} \right)^{\frac{h}{2}(1-\rho)}$.

Les autres termes de $\frac{\partial}{\partial t}(z_0)$ ne contiennent que les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$. Or ces dernières quantités sont finies ainsi que leurs dérivées parallèles.

Sur la ligne $P_{i-1} P_i$, en effet, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ a l'expression (24), où le second terme peut être nul. $\frac{\partial z}{\partial x}$ est une dérivée perpendiculaire, qui croît comme $\left(\frac{x}{x'} \right)^{\frac{i}{2}}$; mais τ (s'il n'est pas nul) tend vers zéro d'une manière précisément inverse. D'ailleurs, les dérivées de cette expression (24) par rapport à y (dérivées partielles) sont également finies, grâce à ce fait que $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}$ s'exprime linéairement en fonction de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$, φ_i .

D'autre part, sur BAC, les relations $\varphi_i = \varphi_{i-1}$ donnent

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial t}.$$

Donc on peut faire, sur les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, les mêmes évaluations que sur les φ_i (nos 11-13).

En un mot, les séries obtenues en différentiant la formule (22) convergent uniformément et représentent, par conséquent, les dérivées premières de z au point O.

20. D'autre part, en ce qui concerne le problème II, ou le problème posé au n° 2 du présent travail, on sait que la fonction z obtenue [formule (9) du travail actuel, ou *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, formule (4)] vérifie l'équation aux dérivées partielles. Cela résulte de ce que la possibilité des deux problèmes en question est acquise, et cela se voit d'ailleurs sans aucune difficulté en se servant de la remarque du n° 5 bis.

Comme on est ramené à notre problème du n° 2 en limitant AB, AC par le segment $\beta\gamma$, il résulte de là : 1° qu'en différentiant la formule (22) par rapport à x et à y simultanément, on obtient encore une série uniformément convergente, puisqu'elle est une combinaison linéaire de l'expression (22) et de ses dérivées par rapport à x et à y ; 2° que, par conséquent, cette série représente la dérivée, par rapport à x et à y , de la fonction z , laquelle est bien solution de l'équation (1).

21. Je terminerai par une remarque relative aux résultats exposés aux n°s 3-6.

Ces résultats concernent un problème déjà résolu, comme nous l'avons expliqué, au n° 2. Mais il ne faudrait pas en conclure qu'ils ne nous apprennent rien de nouveau.

Si, en effet, les opérations indiquées au n° 2 permettent de calculer la valeur de l'inconnue dans chacune de nos régions successives I, 1, 1', II, 2, 2', ..., ce but n'est atteint que par une série d'applications de la méthode générale, c'est-à-dire *par une série de quadratures superposées*.

Au contraire, si nous avons pu calculer, une fois pour toutes, les fonctions u_i , v_i , w_i , la formule (9) donnera z par des quadratures différentes, comme cela est dans la nature de la question, pour les différents arcs que nous avons été conduits à distinguer, mais portant directement sur les données.

Or il est des cas intéressants au point de vue des applications et pour lesquels on connaît la forme des fonctions en question. Tel est, en particulier, le problème dont nous avons parlé au

n° 2, celui de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

L'équation du problème est alors

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x \partial y} - \bar{z} = 0,$$

et donne pour u une fonction de Bessel bien connue.

Les lignes βB , γC sont alors deux droites parallèles à $x - y = 0$; l'arc $\beta\gamma$, un segment de droite parallèle à $x + y = 0$.

Nous avons établi précédemment (1) que, dans ces conditions, la fonction u_1 s'obtenait en retranchant de $u(M, O)$ la quantité tout analogue $u(M, \omega_1)$, où ω_1 est l'image du point O par rapport à βB . De même, on aura

$$v_1 = u(M, O) - u(M, \omega'_1)$$

en désignant par ω'_1 l'image de O par rapport à γC .

Il est aisé maintenant de voir que le calcul des fonctions suivantes n'offre pas plus de difficulté. Soient ω_2 l'image de ω_1 par rapport à γC , ω_3 l'image de ω_2 par rapport à βB , ...; soient, de même, ω'_2 l'image de ω'_1 par rapport à βB ; ω'_3 , l'image de ω'_2 par rapport à γC , ... Les fonctions

$$\varphi_h = -u(M, \omega_h), \quad \psi_{h'} = -u(M, \omega'_{h'})$$

satisfont à toutes les conditions que nous avons imposées aux quantités désignées par ces notations, dans les raisonnements qui précèdent. En particulier, ces quantités φ_h , $\psi_{h'}$ sont égales à 1 sur les lignes de discontinuité correspondantes. *Ce sont elles qu'il faudra substituer dans les formules (6), (9), pour obtenir la solution cherchée.*

Soit, par exemple, $2l$ la longueur du câble. Adoptons les mêmes notations que dans l'article *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (n°s 6 et suivants), à ceci près que nous désignerons par $-l$ et $+l$ les abscisses des extrémités de ce câble, l'abscisse ξ d'un de ses points devant ainsi être comprise entre

(1) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 8.

— l et $+l$. Si l'on veut calculer la valeur de z pour l'abscisse ξ' et à l'instant t' , on devra prendre les images successives du point (ξ', t') par rapport aux lignes $\xi = \pm l$. Toutes ces images correspondront à la même valeur t' de t ; mais leurs abscisses seront

$$\begin{aligned} \text{pour les points } \omega_{2i+1}, \quad & \xi = \xi_{2i+1} = (4i+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega_{2i}, \quad & \xi = \xi_{2i} = -4il + \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2i+1}, \quad & \xi = \xi'_{2i+1} = -(4i+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2i}, \quad & \xi = \xi'_{2i} = 4il + \xi'; \end{aligned}$$

après quoi, on aura [en désignant, comme dans l'article cité, par $j(X)$ la fonction $J_0(2\sqrt{-X})$, où J_0 est la fonction de Bessel, et par t, ξ les coordonnées courantes]

$$\varphi_h = -j\left\{\frac{1}{4}[(t-t')^2 - (\xi - \xi_h)^2]\right\}, \quad \psi_{h'} = -j\left\{\frac{1}{4}[(t-t')^2 - (\xi - \xi'_{h'})^2]\right\}.$$

Les lignes $\beta B, \gamma C$ seront $\xi = \pm l$ et l'on aura, sur elles,

$$\frac{dU}{dv} ds = - \frac{\partial U}{\partial \xi} dt.$$

La ligne $\beta\gamma$ sera $t = 0$; on aura, sur elle,

$$\frac{d}{dv} ds = - \frac{\partial}{\partial t} d\xi.$$

Enfin, les points P_h correspondront à

$$\xi = (-1)^h l, \quad t = t' + \xi' - (2h+1)l,$$

les points $Q_{h'}$, à

$$\xi = -(-1)^{h'} l, \quad t = t' - \xi' - (2h'+1)l,$$

les entiers h, h' devant prendre toutes les valeurs positives qui donnent $t \geq 0$. a et b étant nuls, on a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer les formules (5), (6), (9).

SUR UNE CERTAINE CLASSE DE CUBIQUES GAUCHES
ET SUR DES SYSTÈMES ARTICULÉS QUI S'Y RATTACHENT;

Par M. R. BRICARD.

1. J'ai signalé, dans un travail antérieur ⁽¹⁾, certaines relations entre les cubiques *focales* (cubiques planes circulaires qui contiennent leur foyer singulier) et le quadrilatère articulé. Ces résultats s'appliquent en particulier à la strophoïde, qui est une cubique focale à point double.

Je me propose d'étudier ici une classe de cubiques gauches, auxquelles je donne le nom de *cubiques strophoïdales*, parce que leurs propriétés généralisent celles de la strophoïde, qu'elles comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Le principal intérêt de ces courbes me paraît résider dans le fait qu'on peut y rattacher divers systèmes articulés gauches : en premier lieu, *l'octaèdre aplatissable* auquel j'ai été conduit autrefois par des considérations toutes différentes ⁽²⁾ et c'est l'obtention de ces systèmes articulés qui constituera l'objet essentiel de cette Note. J'attirerai cependant l'attention sur un résultat d'un caractère analogue au théorème de Poncelet, qui se trouve énoncé au n° 7.

2. Voici la définition des *cubiques gauches strophoïdales* (ou, plus simplement, des *strophoïdales*). J'appelle ainsi une cubique gauche jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle rencontre l'ombilicale en deux points i et i' ;

2° Sa projection orthogonale sur un plan (II) ayant pour droite de l'infini $i i'$ a son point double à tangentes rectangulaires : cette projection, qui contient les points cycliques du plan (II), est donc une strophoïde ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 39.

⁽²⁾ *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé* (*Journal de Math. pures et appl.*, 1897).

⁽³⁾ Il existe une corde unique de la strophoïdale, perpendiculaire au plan (II) : si les deux extrémités de cette corde viennent à se confondre, la strophoïdale se réduit à une cubique plane circulaire, ayant un point double à tangentes rectangulaires, c'est-à-dire à une strophoïde.

Une cubique gauche, pour être strophoïdale, est assujettie, on le voit, à trois conditions. La strophoïdale la plus générale dépend donc de $12 - 3 = 9$ paramètres, dont *trois* seulement sont des paramètres de grandeur, les six autres étant des paramètres de position.

3. Soient Γ une strophoïdale, et, conservant les désignations précédentes, i et i' les points où elle rencontre l'ombilicale, (Π) un plan dont la droite à l'infini est ii' . Il existe une corde unique de Γ perpendiculaire au plan (Π) . Soient α et β les extrémités de cette corde.

Les points α, β, i, i' forment une division harmonique sur la strophoïdale Γ (les deux premiers points étant conjugués).

Soient, en effet, αt et βu les tangentes à Γ , en α et β . Les plans $(\alpha\beta t)$ et $(\alpha\beta u)$ sont rectangulaires, d'après la définition même des strophoïdales. Autrement dit, les quatre plans $(\alpha\beta t)$, $(\alpha\beta u)$, $(\alpha\beta i)$, $(\alpha\beta i')$ forment un faisceau harmonique (les deux premiers plans étant conjugués); mais le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à celui des points α, β, i, i' ; donc, etc.

La plupart des propriétés ultérieures se rattachent à l'involution définie sur Γ par cette condition que α et β sont ses points doubles. Je dirai que deux points de Γ qui se correspondent dans cette involution sont *associés*.

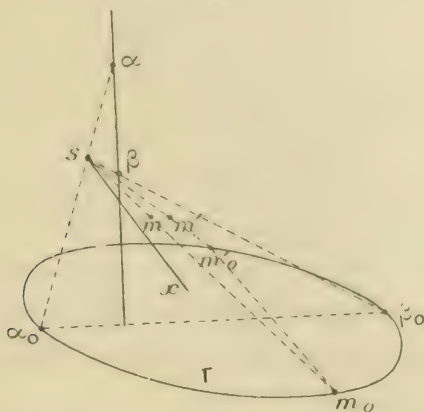
Le théorème précédent apprend que les points i et i' sont associés.

4. Considérons deux points associés variables, m et m' . La corde mm' engendre une quadrique (P) qui, ayant une génératrice ii' rejetée tout entière à l'infini, est un parabolôïde. Je dirai que les cordes mm' sont, dans ce parabolôïde, *les génératrices* (1). Les autres génératrices seront dites : *génératrices* (2); chacune de ces dernières ne rencontre Γ qu'en un seul point.

Soient alors s un point quelconque de Γ , sx la génératrice (2) de (P) qui passe en ce point. Cette génératrice sx est un *axe principal du cône* (S) qui a son sommet en s et qui a pour directrice Γ .

Considérons en effet (fig. 1) la trace T du cône (S) sur le plan (Π) . T , qui contient les points cycliques i et i' de ce plan, est un cercle. Menons sz et $s\beta$ et soient α_0 et β_0 les traces de ces droites sur le plan (Π) ; i et i' doivent être conjugués, sur le cercle T , dans une involution $\mathfrak{S}_0$ qui a pour points doubles α_0 et β_0 ; cela exige que les points α_0 et β_0 soient diamétralement opposés sur T .

Fig. 1.



Cela posé, soient m et m' deux points associés de Γ ; sm et sm' ont pour traces sur le plan (Π) les points m_0 et m'_0 , qui appartiennent au cercle T et sont conjugués dans l'involution $\mathfrak{S}_0$; la corde $m_0m'_0$ est donc perpendiculaire au diamètre $\alpha_0\beta_0$. On voit ainsi que tous les plans tels que $(sm_0m'_0)$ contiennent la droite sx , menée par le point s perpendiculairement au plan $(sz\beta)$: toutes les cordes mm' rencontrent cette droite sx , qui est par conséquent la génératrice (2) de (P) , issue de s .

Mais le plan $(sz\beta)$ est un plan principal de (S) ; sx est donc bien un axe principal de ce cône. C. Q. F. D.

Les considérations précédentes mettent encore en évidence les faits suivants, dont il suffit d'énoncer les deux premiers :

Si m et m' sont deux points associés de Γ , les droites sm et sm' qui joignent ces deux points à un point quelconque s de Γ sont également inclinées sur le plan (Π) et font, par conséquent, des angles égaux avec $\alpha\beta$.

Tout point de $\alpha\beta$ est équidistant des droites sm et sm' .

Enfin, si (m, m') , (n, n') sont deux couples quelconques de

points associés, s un point quelconque de Γ , les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles $\widehat{m'sn}$, $\widehat{msn'}$.

Cela résulte immédiatement de ce que la droite sx est bissectrice, intérieure ou extérieure, de chacun des angles $\widehat{msm'}$, $\widehat{nsn'}$. Ce dernier énoncé peut, d'ailleurs être précisé.

Remarquons, à cet effet, que la cubique Γ ayant deux asymptotes imaginaires, n'a qu'une seule branche réelle, et que (m, m') , (n, n') , formant sur Γ deux couples de points conjugués harmoniques par rapport aux points réels α, β , se succèdent nécessairement dans un ordre tel que les arcs mm' , nn' n'aient aucune partie commune, ou bien que l'un de ces deux arcs soit entièrement contenu dans l'autre. On peut évidemment supposer les notations tellement choisies que l'ordre dans lequel les quatre points en question se succèdent sur Γ soit l'un des deux suivants :

$$m, n, n', m' \quad \text{ou} \quad m, m', n, n'.$$

Considérons, par exemple, la première hypothèse; si le point s est très éloigné sur Γ , les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont tous deux très voisins de zéro et sont, par suite, égaux; il en est ainsi, par raison de continuité, jusqu'au moment où le point s franchit le point m pour entrer dans l'arc mn . Alors l'angle $\widehat{msn}$ passe brusquement d'une valeur à la valeur supplémentaire tandis que l'angle $\widehat{m'sn'}$ varie toujours d'une façon continue. On a donc, à partir de ce moment, et tant que le point s reste dans l'arc mn ,

$$\widehat{msn} = \pi - \widehat{m'sn'},$$

et ainsi de suite. On raisonnera de même sur la seconde hypothèse, et l'on se rend aisément compte que l'énoncé suivant s'applique à tous les cas possibles : les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont égaux si le point s appartient à la fois aux arcs mm' , nn' ou s'il n'est sur aucun de ces arcs; les mêmes angles sont supplémentaires si le point s est sur un seul des arcs mm' , nn' .

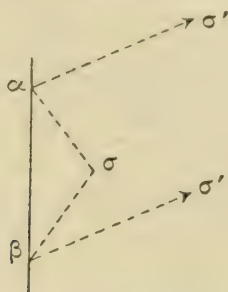
5. Outre les points i et i' , la strophoïdale Γ possède un point à l'infini σ' . Soit σ le point de Γ associé à σ' . Je vais montrer que :

Le cône (Σ) , qui a pour sommet σ et pour directrice Γ , est de révolution; son axe est parallèle à $\alpha\beta$.

Joignons, en effet (fig. 2), chacun des points α et β au point σ et au point σ' .

D'après un résultat précédent, $\alpha\sigma$ et $\alpha\sigma'$ sont également incli-

Fig. 2.



nées sur $\alpha\beta$, de même $\beta\sigma$ et $\beta\sigma'$; mais $\alpha\sigma'$ et $\beta\sigma'$ sont parallèles : le triangle $\sigma\alpha\beta$ est donc isocèle ($\sigma\alpha = \sigma\beta$).

Par conséquent, si l'on construit à nouveau la figure 1, en remplaçant le point s par le point σ , on voit que le triangle $\sigma\alpha_0\beta_0$ est aussi isocèle ($\sigma\alpha_0 = \sigma\beta_0$), et que le point σ se projette, sur le plan (Π) , au centre du cercle T . Le cône (Σ) est donc de révolution, et son axe est parallèle à $\alpha\beta$.

C. Q. F. D.

Tous les cônes du second ordre qui contiennent Γ ont, comme on l'a vu, une série de plans cycliques perpendiculaires à $\alpha\beta$. On est donc conduit à la nouvelle définition que voici des cubiques strophoïdales :

Une telle cubique est l'intersection incomplète d'un cône de révolution et d'un cône du second ordre ayant une série de plans cycliques parallèles à l'axe du premier cône, les deux cônes ayant, d'ailleurs, une génératrice commune.

Un cas particulier remarquable est celui où le sommet du cône de révolution est rejeté à l'infini : la strophoïdale est alors le *cercle cubique* dont M. Schœnflies a signalé l'intérêt pour l'étude du déplacement infiniment petit d'une figure de grandeur inva-

riable (¹). M. Schœnflies avait reconnu l'existence des couples de points associés sur le cercle cubique, et démontré, relativement à ces couples, le théorème obtenu plus haut, à la fin du n° 4.

6. Soient (m, m') , (n, n') deux couples de points associés de Γ .

Le quadrilatère $mn m' n'$ est circonscrit à une infinité de sphères dont chacune a son centre sur $\alpha\beta$.

En effet, comme on l'a vu au n° 4, tout point ω de $\alpha\beta$ est équidistant de mn et de $m'n'$. Il existe donc une sphère de centre ω qui touche les quatre côtés du quadrilatère $mn m' n'$.

On peut dire aussi que *le quadrilatère $mn m' n'$ est tracé sur un hyperboloïde de révolution ayant pour axe $\alpha\beta$.*

En rapprochant ce résultat du théorème obtenu à la fin du n° 4, on voit que :

Étant donné un quadrilatère $mn m' n'$ tracé sur un hyperboloïde de révolution (ou, ce qui revient au même, circonscriptible à une infinité de sphères), le lieu des points s tels que les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ soient égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles $\widehat{msn'}$, $\widehat{m'sn}$, comprend une strophoïdale Γ qui passe par les points m, m', n, n' (²).

Ce théorème ne peut encore être considéré comme démontré en toute rigueur : on pourrait craindre, en effet, que le quadrilatère $mn m' n'$, ayant pour sommets deux couples de points associés d'une strophoïdale, ne possède quelque propriété autre que celle d'être circonscriptible à une infinité de sphères. Il faut montrer qu'il n'en est pas ainsi et, à cet effet, établir directement le théorème énoncé.

Soient donc (H) l'hyperboloïde dont il est question dans l'énoncé, X son axe. Effectuons une projection orthogonale sur le

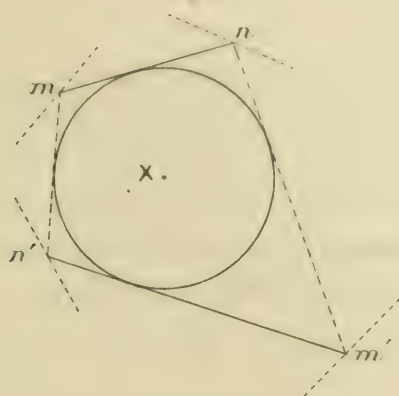
(¹) Voir la *Géométrie du mouvement*, de M. Schœnflies, pp. 119-122 de la traduction française.

(²) Le lieu complet comprend, outre la strophoïdale Γ , une courbe dont il y aurait peut-être lieu de faire l'étude.

plan équatorial (Π) de (H) , supposé horizontal, pour simplifier le langage (*fig. 3*).

Le quadrilatère $mn m' n'$ est circonscrit, en projection, au cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Fig. 3.



Menons, dans l'espace, les tangentes en m, m', n, n' , aux parallèles de (H) qui passent par ces points respectifs. Les quatre droites ainsi obtenues sont celles des bissectrices des angles m, n, m', n' , qui ne rencontrent pas X .

Elles appartiennent à un même parabolôide (P) : en effet, toutes sont parallèles à (Π) et rencontrent les deux droites de l'espace mm', nn' .

Menons les perpendiculaires communes à X et aux diverses génératrices horizontales du parabolôide (P) . Le lieu des pieds de ces perpendiculaires sur les génératrices de (P) est, comme l'on sait, une cubique gauche Γ , qui contient évidemment les points m, m', n, n' . *Je dis que c'est une strophoïdale.*

En effet, et tout d'abord, Γ contient les points cycliques du plan (Π) : ce sont les points qui correspondent aux génératrices horizontales isotropes de (P) . En outre, X est une corde de Γ , parce qu'il existe deux génératrices horizontales D et D' , rencontrant X , en des points α et β qui appartiennent visiblement à Γ . Les plans tangents menés à Γ par X sont respectivement perpendiculaires à D et à D' . *Je dis que ces plans tangents ou, ce qui revient au même, que les génératrices D et D' sont rectangulaires.*

En effet, les droites mm', nn' sont conjuguées par rapport à (H) , puisque l'une de ces droites est l'intersection des plans tangents à

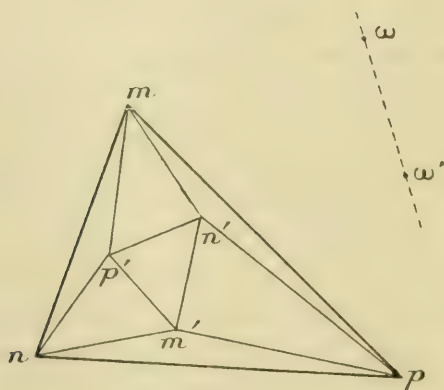
l'hyperboloïde aux points où l'autre droite le rencontre. Il en résulte que D et D' sont aussi conjuguées par rapport à Π . En effet, D rencontre mm' , nn' , X et la droite à l'infini du plan (Π). Sa conjuguée doit rencontrer les conjuguées de ces droites, qui sont respectivement nn' , mm' , la droite à l'infini du plan Π , et X : ce ne peut être que D' .

D' doit donc contenir en particulier le pôle du plan (D , X). Or, ce pôle est rejeté à l'infini dans la direction horizontale perpendiculaire à celle de D . D et D' sont donc bien rectangulaires.

Il résulte de là que Γ a bien les caractères d'une strophoïdale; (m, m') et (n, n') sont, sur cette courbe, deux couples de points associés, puisque mm' et nn' sont deux génératrices non horizontales de (P), et tout point s de Γ est tel que $\widehat{msn} = \widehat{m'sn'}$ ou $\pi - \widehat{m'sn}$, $\widehat{m'sn} = \widehat{msn'}$ ou $\pi - \widehat{msn'}$. La proposition que nous avons en vue est ainsi complètement établie.

7. Considérons maintenant sur Γ trois couples de points associés (m, m') , (n, n') , (p, p') . Joignons ces six points deux à deux, en évitant de joindre les points d'un même couple. On forme ainsi un octaèdre à faces triangulaires : je l'appellerai l'*octaèdre* $(mnpmm'n'p')$.

Fig. 4.



Cet octaèdre est circonscrit à deux sphères dont les centres ω et ω' appartiennent à Γ .

Soient, en effet (fig. 4), ω et ω' les deux points où les plans bissecteurs du dièdre $\widehat{mn}$ de l'octaèdre rencontrent la droite $x\beta$. Consi-

dérons, par exemple, le point ω : il est équidistant des plans (mnp) , (mnp') . D'autre part, le plan $(m\alpha\beta)$ qui, on l'a vu, est un plan bissecteur de chacun des angles $\widehat{nmn'}$, $\widehat{pmp'}$, est un plan de symétrie pour l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. Le point ω , qui appartient à ce plan, est donc équidistant des faces (mnp) et $(mn'p')$, ainsi que des faces (mnp') et $(mn'p)$. En résumé, le point ω est équidistant des quatre faces de l'octaèdre qui se rencontrent au sommet m , et il existe une sphère (Ω) , de centre ω , et tangente à ces quatre faces. En appliquant le même raisonnement aux autres angles tétraèdres, on voit que (Ω) est tangente aux quatre autres faces de l'octaèdre. On reconnaîtra de même qu'il existe une sphère (Ω') , de centre ω' , tangente aux huit faces de l'octaèdre $(mnpmp'n'p')$.

Remarque I. — Toute face de l'octaèdre, étant tangente aux deux sphères (Ω) et (Ω') , doit contenir un de leurs centres de similitude. Or, deux faces qui ont en commun une arête de l'octaèdre, mn par exemple, ne peuvent, en général, contenir un même centre de similitude : il faudrait en effet que mn rencontrât $\alpha\beta$, ce qui n'a pas lieu, si m et n sont arbitraires sur Γ . On en conclut l'énoncé suivant :

Les faces de l'octaèdre peuvent être réparties en deux groupes de quatre faces, deux faces quelconques d'un même groupe ayant en commun un sommet et un seul de l'octaèdre ; les quatre faces d'un même groupe contiennent un même centre de similitude des deux sphères (Ω) et (Ω') , et les quatre autres faces contiennent l'autre centre de similitude.

Remarque II. — Il existe ∞^3 octaèdres ayant pour sommets opposés des couples de points associés de Γ . Les sphères qui leur sont inscrites, en vertu du théorème démontré plus haut, ont toutes leurs centres sur $\alpha\beta$, elles ne sont par conséquent qu'en nombre ∞^2 . On en conclut le théorème suivant :

Soit (Ω) une sphère ayant son centre sur $\alpha\beta$: il existe ∞^4 octaèdres inscrits à Γ et circonscrits à (Ω) .

On peut rapprocher ce résultat, dont le caractère est analogue à

celui du théorème de Poncelet, de ceux que MM. Humbert et Fontené ont obtenus dans des travaux récents.

8. J'arrive maintenant aux propriétés métriques et aux relations avec certains systèmes articulés qui, ainsi que je l'ai dit, me paraissent donner aux strophoïdales leur principal intérêt.

Soient encore (m, m') , (n, n') , (p, p') trois couples de points associés sur Γ , et $(mnp m' n' p')$ l'octaèdre considéré au n° 7.

Imaginons que les arêtes $mn, mp, mn', mp', np, pn', n'p', p'n$ (marquées en traits plus forts sur la figure 4) soient réalisées par des tiges rigides, articulées en leur point de rencontre. Les quatre triangles $mnp, mpn', mn'p', mp'n$ sont invariables, mais leur ensemble constitue un angle tétraèdre $m.npn'p'$, évidemment déformable (la déformation dépendant d'un paramètre).

Le quadrilatère $npn'p'$ étant, comme on l'a vu, circonscriptible à une infinité de sphères, on sait qu'il existe entre les longueurs de ses quatre côtés une relation de la forme

$$(1) \quad np \pm pn' \pm n'p' \pm p'n = 0.$$

Imaginons que l'on déforme d'une façon continue l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. La relation (1) étant constamment satisfaite, le quadrilatère $npn'p'$ sera, à un moment quelconque, circonscrit à une infinité de sphères. D'autre part, on aura toujours

$$\widehat{mnp} = \widehat{n'mp'} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{n'mp'}$$

et

$$\widehat{nmp'} = \widehat{n'mp} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{n'mp};$$

par conséquent, le point m appartient toujours à la strophoïdale, lieu partiel des points d'où l'on voit les côtés opposés du quadrilatère $npn'p'$, sous des angles égaux ou supplémentaires (le point m ne peut appartenir à une branche de ce lieu autre que la strophoïdale, parce qu'il était sur cette dernière courbe, dans les conditions initiales, et que l'on suppose continue la déformation).

Cela posé, construisons, à un moment quelconque, le point m' , associé à m sur la strophoïdale dont il s'agit. On a

$$\widehat{p'n m'} = \widehat{pnm} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{pnm}.$$

et, toujours à cause de la continuité de la déformation, la relation à choisir est celle qui se trouve satisfaite dans les conditions initiales.

Autrement dit, l'angle $\widehat{p'n'm'}$ conserve une grandeur constante.

On reconnaît qu'il en est de même pour tous les angles des quatre triangles, faces de l'angle tétraèdre $m'.n.p.n'p'$: ces quatre triangles sont donc invariables, et il est démontré que l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ peut être déformé avec conservation de ses faces.

9. Cet octaèdre prend un aspect particulièrement remarquable, quand l'un de ses dièdres, $\widehat{mn}$ par exemple, devient égal à 0 ou à π . On se rend immédiatement compte que tous ses autres dièdres devront prendre en même temps l'une ou l'autre de ces valeurs; autrement dit, l'octaèdre est complètement aplati. Cette circonstance pouvant se présenter de deux manières, suivant que l'on a

$$\widehat{mn} = 0 \quad \text{ou} \quad \widehat{mn} = \pi,$$

on voit que l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ peut être aplati de deux manières.

Considérons-le dans une de ces positions d'aplatissement. La cubique Γ est alors une strophoïde, et les quadrilatères $m.n.m'.n'$, $n.p.n'.p'$, $m.p.m'.p'$ sont chacun circonscrits à un cercle ayant pour centre le point double de la strophoïde.

Réciproquement, donnons-nous deux cercles concentriques et deux points quelconques m, m' . Construisons les quadrilatères $m.n.m'.n'$, $m.p.m'.p'$, circonscrits respectivement à ces deux cercles. Il est facile de voir que les (m, m') , (n, n') , (p, p') constituent trois couples de points associés sur une strophoïde ayant pour point double le centre commun des deux cercles; le quadrilatère $n.p.n'.p'$ est donc circonscrit à un cercle concentrique aux deux premiers. On a ainsi construit simplement un octaèdre articulé, dans l'une de ses formes aplaties, et il est évident que la construction est aussi générale que possible.

10. On peut établir la déformabilité de l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ par une autre méthode, qui présente l'avantage de conduire à la connaissance de nouveaux systèmes articulés.

La courbe Γ étant unicursale, on peut faire correspondre, d'une façon univoque, un paramètre à un point variable de cette courbe, et cette correspondance peut être établie de manière qu'à trois points donnés de Γ soient attachées trois valeurs quelconques, données *a priori*, du paramètre. Supposons la correspondance telle qu'aux points α, β et au point réel à l'infini de Γ soient attachées respectivement les valeurs 0, ∞ et 1 du paramètre. Deux points associés m et m' étant conjugués harmoniques sur Γ par rapport à α et β , leurs paramètres μ et μ' satisfont à la relation

$$(1) \quad \mu + \mu' = 0.$$

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° Soient m, n, n' , trois points de Γ , les deux derniers étant associés. On a, entre les longueurs mn et mn' , la relation

$$(2) \quad \frac{mn}{mn'} = \frac{(\mu - \nu)(1 - \nu')}{(\mu - \nu)(1 - \nu)} = \frac{(\mu - \nu)(1 + \nu)}{(\mu + \nu)(1 - \nu)},$$

μ et ν étant les paramètres des points m et n .

En effet, mn et mn' sont, comme on l'a vu, également inclinées sur la droite $\alpha\beta$. Si donc l'on désigne par m_1, n_1, n'_1 les projections orthogonales des points m, n, n' , sur $\alpha\beta$, on a

$$\frac{mn}{mn'} = \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1}.$$

Or, il est clair que, lorsqu'un point parcourt Γ , sa projection orthogonale sur mn lui correspond homographiquement. Soit donc σ'_1 le point à l'infini de $\alpha\beta$ (projection du point à l'infini σ' de Γ). On a l'égalité entre rapports anharmoniques

$$(m_1 n_1 n'_1 \sigma'_1) = (m n n' \sigma') \quad \text{ou} \quad \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1} = \frac{(\mu - \nu)(1 - \nu')}{(\mu - \nu')(1 - \nu)},$$

d'où résulte bien l'égalité (2).

Cette relation, on le voit, conduit à attribuer un signe au rapport $\frac{mn}{mn'}$. Ce rapport est positif quand le point m est extérieur à l'arc nn' , et négatif dans le cas contraire.

2° Soient m, n, p trois points quelconques de Γ ; μ, ν, ϖ leurs paramètres respectifs. On a, entre les longueurs np, pm, mn ,

la relation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(1+\mu)(\nu+\varpi)}{(1-\mu)(\nu-\varpi)} \overline{np}^2 + \frac{(1+\nu)(\varpi-\mu)}{(1-\nu)(\varpi+\mu)} \overline{pm}^2 \\ & + \frac{(1+\varpi)(\mu+\nu)}{(1-\varpi)(\mu-\nu)} \overline{mn}^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient, en effet, n' et p' les points de Γ , associés respectivement à n et à p . Les angles $\widehat{npm}$, $\widehat{n'mp'}$ étant égaux ou bien supplémentaires, écrivons que leurs cosinus sont égaux ou bien égaux en valeur absolue et de signes contraires; on a ainsi l'une des deux relations

$$\frac{\overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2}{|mn| |mp|} = \pm \frac{\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2}{|mn'| |mp'|},$$

ou

$$\overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2 = \pm \frac{|mn| |mp|}{|mn'| |mp'|} (\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2);$$

les longueurs des segments mn , mp , etc., sont écrites entre traits verticaux pour montrer que, dans la relation précédente, elles ne figurent que par leurs valeurs absolues. Mais, d'après la discussion qui termine le n° 4, les angles $\widehat{npm}$, $\widehat{n'mp'}$ sont égaux si le point m appartient à la fois aux arcs np , $n'p'$, ou bien s'il est extérieur à tous les deux; les mêmes angles sont supplémentaires si le point m est sur un seul de ces arcs; d'autre part, le rapport

$$\frac{mn \cdot mp}{mn' \cdot mp'}$$

est positif dans le premier cas, négatif dans le second. On a donc, dans tous les cas, *en grandeur et en signe* :

$$(4) \quad \overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2 = \frac{mn \cdot mp}{mn' \cdot mp'} (\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2).$$

Cela posé, on a

$$mn' = \frac{(\mu+\nu)(1-\nu)}{(\mu-\nu)(1+\nu)} mn,$$

$$mp' = \frac{(\mu+\varpi)(1-\varpi)}{(\mu-\varpi)(1+\varpi)} mp,$$

$$n'p' = \frac{(-\nu+\varpi)(1-\varpi)}{(-\nu-\varpi)(1+\varpi)} n'p, \quad n'p = \frac{(\varpi+\nu)(1-\nu)}{(\varpi-\nu)(1+\nu)} np.$$

d'où

$$n'p' = - \frac{(1-\nu)(1-\omega)}{(1+\nu)(1+\omega)} np.$$

En remplaçant, dans la relation (4), mn' , mp' , $n'p'$ par les valeurs précédentes, on trouve, toutes réductions faites, la relation (3).

11. Cela posé, considérons, sur une strophoïdale Γ , variable, trois points m , n , p , de paramètres fixes μ , ν , ω . Comme on l'a remarqué au début, Γ dépend de trois paramètres de grandeur; on peut donc déformer cette cubique en l'assujettissant à deux conditions; je choisirai les suivantes: mn et mp restent de longueurs constantes.

Il résulte alors de la relation (3) que np reste aussi de longueur constante, et de la relation (2), que toutes les autres arêtes de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$) sont aussi de longueurs constantes; par exemple, il en est ainsi pour les arêtes mn' , $n'm'$, $m'n$, à cause de

$$\frac{mn'}{mn} = \text{const.}, \quad \frac{n'm'}{n'm} = \text{const.}, \quad \frac{m'n}{m'n'} = \text{const.}$$

On a donc bien retrouvé que l'octaèdre ($mnp m'n'p'$) est déformable avec conservation de ses arêtes.

Mais ce n'est pas tout. Soit l un nouveau point de Γ , de paramètre fixe λ . On a

$$A_1 \overline{lm}^2 + B_1 \overline{ln}^2 + C_1 \overline{mn}^2 = 0$$

ou

$$A_1 \overline{lm}^2 + B_1 \overline{ln}^2 = \text{const.},$$

A_1 et B_1 étant des constantes. Il en résulte (théorème de Stewart) que le point l reste à distance constante d'un certain point de mn ; je dirai, plus brièvement, que le point l est lié à un certain point de mn .

Le même raisonnement peut se répéter, en considérant, au lieu de mn , les diverses arêtes de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$).

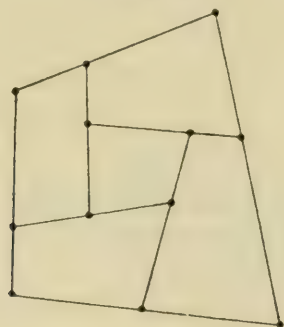
En résumé :

On peut, sans gêner la déformation de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$),

lier un point l à douze points convenablement choisis sur les arêtes de l'octaèdre, et cela d'une infinité de manières.

Les points des arêtes de l'octaèdre, qui sont liés au point l , forment une configuration qu'il faut signaler : les trois points qui appartiennent aux trois arêtes limitant une même face, par exemple aux arêtes np , pm , mn , sont nécessairement en ligne droite, sans quoi la figure formée par le triangle mnp et le point l seraient évidemment rigides. En partant de cette remarque, on reconnaît aisément que les douze points en question sont répartis trois par trois sur huit droites formant deux quadrilatères, tels que chaque côté de l'un rencontre un côté de l'autre, ainsi que l'indique le schéma suivant (fig. 5) :

Fig. 5.



Ces douze droites forment donc un système articulé gauche, analogue à celui que MM. Hart et Kempe ont étudié dans le plan ⁽¹⁾.

12. On peut, pour l'obtention de nouveaux systèmes articulés, tirer un autre parti des relations (2) et (3), et du fait que Γ dépend de trois paramètres de grandeur. Par exemple, considérons sur Γ quatre couples de points associés (m, m') , (n, n') , (m_1, m'_1) , (n_1, n'_1) , et supposons que, les paramètres μ, ν, μ_1, ν_1 des points m, n, m_1, n_1 ayant des valeurs fixes, on déforme Γ de telle manière que les longueurs $mn, m_1 n_1$ soient constantes. On voit, par

⁽¹⁾ M. FONTENÉ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1904, p. 105) a déjà déterminé les cas où le système articulé représenté par le schéma de la figure 5 est déformable, avec deux paramètres.

le raisonnement du n° 11, que les deux quadrilatères $mn m' n'$, $m_1 n_1 m'_1 n'_1$ conservent tous deux des côtés de longueurs constantes; en outre, chaque sommet de l'un reste lié à un point de chaque côté de l'autre quadrilatère.

Considérons, par exemple, le côté mn du premier quadrilatère et le côté $m_1 n_1$ du second; le point m et le point n sont liés chacun à un certain point de $m_1 n_1$, le point m_1 et le point n_1 sont liés chacun à un certain point de mn ; en définitive, quatre points de mn se trouvent liés à autant de points de $m_1 n_1$; mais on sait que si deux droites sont en déplacement relatif tel que *trois* points de l'une soient liés à trois points de l'autre, *tout* point de l'une est lié à un point de l'autre; les deux droites sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde articulé. Les considérations qui précèdent conduisent donc à une combinaison de *seize* hyperboloïdes articulés, sur laquelle je ne m'étendrai pas davantage.

SUR

L'EXTENSION DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET A L'ESPACE, PAR DES POLYÈDRES DE GENRE un ;

Par M. G. FONTENÉ.

L'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace peut être tentée avec des polygones gauches ou avec des polyèdres. M. Darboux a donné pour le premier point de vue le théorème des routes de lumière; je donne ici pour le second point de vue une prévision générale, dont je démontre l'exactitude dans un cas particulier, suffisant pour inspirer confiance.

Je tiens à dire que la première idée de l'emploi de polyèdres de genre un pour l'objet indiqué ici s'est présentée au cours d'une conversation avec M. R. Bricard.

I.

Ce premier paragraphe est, à peu de chose près, la reproduction d'une Note qui a paru dans les *Nouvelles Annales* en 1904.

1. Appelons polyèdre *homogène* un polyèdre dont toutes les

faces ont le même nombre x de côtés, dont tous les angles solides ont le même nombre y d'arêtes. Un polyèdre homogène *de genre un* donne lieu aux trois relations

$$\begin{aligned} F + S &= A, \\ Fx &= Sy = 2A, \end{aligned}$$

homogènes par rapport à F, S, A. L'élimination de ces trois quantités donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \quad \text{ou} \quad (x-2)(y-2) = 4.$$

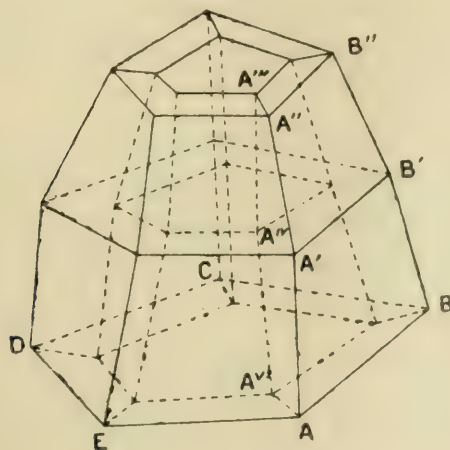
On peut donc avoir

$$\begin{array}{llll} x = 4, & y = 4 & \text{avec} & F = S, \\ x = 3, & y = 6 & \text{avec} & F = 2S, \\ x = 3, & y = 6 & \text{avec} & S = 2F, \end{array}$$

c'est-à-dire trois classes de polyèdres, que l'on peut appeler respectivement *tétraonaux*, *trigonaux*, *hexagonaux*.

Parmi les polyèdres tétraonaux sont des polyèdres à un trou ou polyèdres *toriques* (*fig. 1*), dont les faces sont des quadrilatères

Fig. 1.



assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet. Si p est le nombre des sommets sur un contour tel que ABCD... et si q se rapporte au contour AA'A''A'''..., le nombre des sommets ou des faces est

$p \geq 3, q \geq 3$. [M. Bricard a envisagé (*Nouvelles Annales*, 1904) un polyèdre tétragonal à 8 sommets.]

Möbius, qui paraît s'être occupé le premier de polyèdres de genre *un*, a indiqué une construction du polyèdre trigonal à 7 sommets (¹). M. Bricard en a indiqué une autre, qui a été étendue par M. Deltour (*Nouvelles Annales*, 1904) au cas de S quelconque.

2. De combien de paramètres dépendent les polyèdres considérés? Les sommets donneraient lieu à $3S$ paramètres, si les faces étaient nécessairement des triangles; mais il faut défalquer $x - 3$ paramètres pour chaque face lorsque les faces ont x côtés; le nombre des paramètres restant est

$$3S - F(x - 3),$$

ou

$$3(F + S) - 2A,$$

ou

$$F + S.$$

Si donc le polyèdre doit être *circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre*, ce qui forme $F + S$ conditions, il est déterminé, au moins en apparence. Il y a lieu de se demander si la recherche d'un tel polyèdre n'est pas un problème généralement impossible, qui ne devient possible qu'en devenant indéterminé.

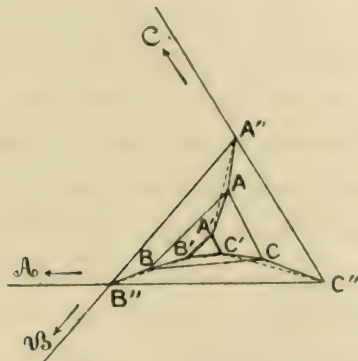
Les choses pourront d'ailleurs se passer un peu différemment, et l'on en aura un exemple dans le cas traité plus loin. Les $F(x - 3)$ conditions indiquées ci-dessus peuvent n'être pas distinctes; si k d'entre elles sont les conséquences des autres, le polyèdre dépend de paramètres en nombre $F + S + k$; quand on l'astreint à être circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre, il paraît dépendre encore de k paramètres. Il est possible que les deux quadriques doivent satisfaire à une condition invariante, et que le polyèdre dépende alors de $k + 1$ paramètres.

(¹) Voir l'Ouvrage de M. MAX BRÜCKNER (*Vielecke und Vielflache*, Leipzig, 1900, p. 221).

II.

3. Considérons le polyèdre tétragonal torique qui correspond aux valeurs $p = 3$, $q = 3$ (fig. 2).

Fig. 2.



Il a 9 faces quadrangulaires

$$\begin{array}{lll} B'C'C'B'', & C'A'A''C'', & A'B'B''A'', \text{ ou } a, b, c, \\ B''C''CB, & C''A''AC, & A''B''BA, \text{ ou } a', b', c', \\ BCC'B', & CAA'C', & ABB'A', \text{ ou } a'', b'', c''. \end{array}$$

assemblées 4 par 4 autour de 9 sommets

$$\begin{array}{l} A, B, C, \\ A', B', C', \\ A'', B'', C'': \end{array}$$

à chaque face correspond un sommet.

Nous appellerons D le point commun aux trois plans a, b, c , ou encore le point de concours des trois droites $A'A'', B'B'', C'C''$, et l'on aura de même les points D' et D'' ; les plans $ABC, A'B'C', A''B''C''$ seront désignés par d, d', d'' .

L'arête (a', a'') ou BC correspond à l'arête $A'A''$, etc. Nous appellerons $\mathfrak{A}$ le point commun aux trois plans a, a', a'' , ou encore le point de concours des trois droites $BC, B'C', B''C''$, et l'on aura de même $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$; les trois points $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sont sur une même droite, intersection des plans d, d', d'' , ou $ABC, \dots$. On peut de même désigner par α le plan $AA'A''$, etc.: les trois plans α, β, γ passent par la droite $DD'D''$.

Le polyèdre en question semble dépendre de paramètres en nombre $3 \times 9 = 9$, ou 18, chaque face quadrangulaire donnant lieu à une condition; il dépend en réalité de 19 paramètres, l'une des 9 conditions étant une conséquence des 8 autres. En effet, si l'on se donne une droite, 3 points $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sur cette droite, 3 plans d , d' , d'' passant par cette droite, et si l'on trace dans le plan d un triangle ABC dont les côtés passent respectivement en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc., on a les 9 sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée; or la figure ainsi construite dépend de 19 paramètres.

Je montrerai que la quadrique S inscrite à ce polyèdre et la quadrique S' qui lui est circonscrite sont liées par une relation invariante. Dès lors, si l'on se donne deux quadriques, la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée, circonscrit à l'une et inscrit à l'autre, est un problème indéterminé en apparence, impossible en réalité si les quadriques sont quelconques, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé.

4. Pour ne pas interrompre dans la suite le développement du calcul, je dirai immédiatement ceci :

La quadrique inscrite S se présentera par son équation tangentielle, et la quadrique circonscrite S' par son équation ponctuelle :

$$(\Sigma) \quad au^2 + \dots + 2fvw + \dots + 2lur + \dots = 0,$$

$$(S') \quad a'x^2 + \dots + 2f'yz + \dots + 2l'xt + \dots = 0.$$

Soit pour un instant

$$(S) \quad \bar{a}x^2 + \dots + 2\bar{f}yz + \dots + 2\bar{l}xt + \dots = 0$$

l'équation ponctuelle de S; l'équation en λ pour la combinaison

$$\lambda S + S' = 0$$

est

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0;$$

Δ se rapporte à $\bar{a}$, $\bar{b}$, ..., et l'on a avec les notations habituelles

$$\Theta = a'\bar{\Lambda} + \dots + 2f'\bar{F} + \dots + 2l'\bar{L} + \dots,$$

$$\Phi = (\bar{b}\bar{c} - \bar{f}^2)(a'd' - l'^2) + \dots$$

sans qu'il soit utile pour le moment d'écrire tous les termes de Φ .

Pour introduire les coefficients de l'équation (Σ), rappelons que $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ sont les premiers mineurs $A, B, \dots$ du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

mineurs affectés de signes convenables. On a donc d'abord

$$\Delta = \delta^3.$$

Ensuite, les premiers mineurs affectés de signes $\bar{A}, \bar{B}, \dots$ sont simplement les produits de $a, b, \dots$ par δ^2 , et l'on a

$$\theta = \delta^2(aa' + \dots + 2ff' + \dots + 2ll' + \dots) = \delta^2\theta,$$

en désignant par θ la quantité placée dans la parenthèse. Enfin, l'on a

$$(\bar{b}\bar{c} - \bar{f}^2) = \delta(ad - l^2), \dots$$

et, par suite,

$$\Phi = \delta[(ad - l^2)(a'd' - l'^2) + \dots] = \delta\varphi,$$

en posant (SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, p. 254),

$$\begin{aligned} \varphi = & (ad - l^2)(a'd' - l'^2) + \dots \\ & + (bc - f^2)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(gm - hn)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(lc - ng)(\dots\dots\dots) + \dots \} \\ & + 2(mh - lb)(\dots\dots\dots) + \dots \} \\ & + 2(gh - af)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(fd - mn)(\dots\dots\dots) + \dots \end{aligned}$$

§. Par analogie avec ce qui a lieu dans le plan pour les triangles de Poncelet, on peut s'attendre (et cette précision se confirme) à ce que la relation invariante annoncée au n° 3 soit

$$\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} \pm \sqrt{\lambda'''} = 0,$$

ou, S_1 désignant la somme des $\lambda, \dots$,

$$(S_1^2 - 4S_2)^2 - 64\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = 0,$$

ou

$$\theta^2 - 4\Delta\Phi = \pm 8\Delta\sqrt{\Delta\Delta'}.$$

En introduisant δ , θ , φ , et en mettant alors δ' au lieu de Δ' , on a enfin

$$\frac{1}{4} \theta^2 - \varphi = \pm 2 \sqrt{\delta \delta'}.$$

III.

6. Nous prendrons comme tétraèdre de référence le tétraèdre $D'ABC$, D' étant, comme on l'a dit, le point de concours des droites AA' , BB' , CC' ; les plans des faces sont d , a'' , b'' , c'' ; on passe donc du point de vue ponctuel au point de vue tangentiel en remplaçant, par exemple, A , A' , A'' par a'' , a' , a .

Les neuf sommets du polyèdre sont :

- 1° A , B , C , sommets de référence;
- 2° A' , B' , C' , sur les arêtes de référence DA , DB , DC ;
- 3° A'' , B'' , C'' .

Les neuf plans des faces du polyèdre sont :

- 1° a'' , b'' , c'' , plans de référence;
- 2° a' , b' , c' , passant par les arêtes de référence (d, a) , ...;
- 3° a , b , c .

7. On a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (d') \text{ ou } (A'B'C'), & \quad ax + by + cz + dt = 0, \\ (d'') \text{ ou } (A''B''C''), & \quad ax + by + cz + \delta t = 0, \\ (D''AB''C''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{a} x = 0, \\ (D''\backslash B''C''A''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{b} y = 0, \\ (D''\oslash A''B''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{c} z = 0; \end{aligned}$$

outre les douze paramètres du tétraèdre de référence, on a les sept paramètres a , b , c , δ , a' , b' , c' .

On a, pour le point A'' ,

$$\frac{ax}{-bb' - cc' - d'\delta} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'},$$

comme on le vérifie aisément; nous définirons une constante δ'

par la relation

$$(R) \quad aa' + bb' + cc' - dd' - (d' \delta + d \delta') = 0,$$

et nous aurons

$$(A'') \quad \frac{ax}{aa' + d(\delta' - d')} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ou encore, l'équation tangentielle de ce point est

$$(A'') \quad a'u + b'v + c'w + d'r + \frac{d}{a}(\delta' - d')u = 0.$$

8. Après avoir considéré les sommets du polyèdre, considérons les plans de ses faces.

Les trois plans $BCB''C''$, ... ont pour équations

$$\frac{x}{a'} = \frac{t}{d'}, \quad \frac{y}{b'} = \frac{t}{d'}, \quad \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ces trois plans se coupent au point D' dont les coordonnées sont a' , b' , c' , d' , et l'équation tangentielle de ce point est

$$(D') \quad a'u + b'v + c'w + d'r = 0.$$

Les trois plans $B''C''B'C'$, ... ont pour équations

$$(a) \text{ ou } (B''C''B'C') \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{a}(\delta - d)x = 0,$$

$$(b) \text{ ou } (C''A''C'A') \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{b}(\delta - d)y = 0,$$

$$(c) \text{ ou } (A''B''A'B') \quad \dots\dots\dots;$$

le second plan, par exemple, passe au point A' pour lequel on a $y = 0$, $z = 0$, $ax + dt = 0$, et il passe de même au point C' ; il passe au point A'' , car on a

$$(aa' + d\delta' - dd') + bb' + cc' + dd' + d'\delta - dd' = 0$$

en vertu de la relation qui définit la constante δ' .

Ces trois plans se coupent au point

$$(D) \quad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{\delta'},$$

comme on le vérifie par cette même relation; l'équation tangen-

tielle de ce point est

$$(D) \quad a'u + b'v + c'w + \delta'r = 0.$$

On voit que l'on passe des sommets aux faces du polyèdre en échangeant x et u , ..., a et a' , ..., δ et δ' .

9. Considérons la quadrique S' circonscrite au polyèdre considéré. Comme elle passe aux points A, B, C, A', B', C' , son équation est de la forme

$$(ax + by + cz + dt)t + Ayx + Bzx + Cxy = 0.$$

La section de cette conique par le plan $A''B''C''$ est sur le cône

$$(d - \delta) \frac{(ax + by + cz)^2}{\delta^2} + Ayx + Bzx + Cxy = 0.$$

En écrivant que ce cône contient le point A'' , on a

$$(d - \delta) d'^2 + Ab'c' + Bc'a' + Ca'b' + \frac{d}{a}(\delta' - d') \left[a' + \frac{d}{a}(\delta' - d') \right] + Cb' \left[a' + \frac{d}{a}(\delta' - d') \right] = 0$$

ou

$$(d - \delta) d'^2 + Ab'c' + Bc'a' + Ca'b' + \frac{d}{a}(\delta' - d')(Bc' + Cb') = 0;$$

les points B'' et C'' donnent deux relations analogues, que l'on peut remplacer par celles-ci :

$$\frac{Bc' + Cb'}{a} = \frac{Ca' + Ab'}{b} = \frac{Ab' + Ba'}{c};$$

on conclut de là, en tenant compte de (R),

$$\frac{A}{a'(bb' + cc' - aa')} = \frac{B}{b'(cc' + aa' - bb')} = \frac{C}{c'(aa' + bb' - cc')} = \frac{\lambda'}{a'b'c'},$$

$$\lambda' = \frac{d'^2(d - \delta)}{(dd' + d'\delta - d\delta')}.$$

Si l'on pose

$$p = bb' + cc' - aa', \quad q = \dots, \quad r = \dots,$$

l'équation de la quadrique S' est donc, en doublant,

$$(S') \quad 2a'b'c'(ax + by + cz + dt)t + 2\lambda'(a'p yz + b'q zx + c'r xy) = 0,$$

λ' ayant la valeur ci-dessus.

La quadrique S inscrite au polyèdre a de même pour équation tangentielle

$$(\Sigma) \quad 2abc(a'u + b'v + c'w + d'r)r + 2\lambda(apcw + bqwu + cruv) = 0,$$

avec

$$\lambda = \frac{d^2(d' - \delta')}{dd' + d\delta' - d'\delta}.$$

10. Comme les constantes δ et δ' , liées aux autres par la relation (R), n'entrent que dans λ et λ' , cette relation (R) équivaut à une relation entre λ , λ' et les autres constantes $a, \dots, d, a', \dots, d'$. Les expressions de λ' et de λ donnent

$$\begin{aligned} (\lambda' + d').d'\delta - \lambda'.d\delta' &= dd'(d' - \lambda'), \\ -\lambda.d'\delta + (\lambda + d).d\delta' &= dd'(d - \lambda), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} d'\delta &= dd' \frac{-2\lambda\lambda' + d'\lambda + dd'}{d\lambda' + d'\lambda + dd'}, \\ d\delta' &= dd' \frac{-2\lambda\lambda' + d\lambda + dd'}{d\lambda' + d'\lambda + dd'}; \end{aligned}$$

la relation (R) devient

$$(R') \quad 4dd'\lambda\lambda' - (d\lambda' + d'\lambda)\Sigma aa' = dd'(dd' + \Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a, b, c , ou encore

$$(R'') \quad (4d\lambda' - \Sigma aa')(4d'\lambda - \Sigma aa') = (2dd' + \Sigma aa')^2.$$

IV.

11. Il s'agit de vérifier la relation

$$\frac{1}{4} \theta^2 - \varphi = \pm 2\sqrt{\delta\delta'}.$$

On a d'abord

$$\delta' = \begin{vmatrix} 0 & \lambda'c'r & \lambda'b'q & a'b'c'a \\ \lambda'c'r & 0 & \lambda'a'p & a'b'c'b \\ \lambda'b'q & \lambda'a'p & 0 & a'b'c'c \\ a'b'c'a & a'b'c'b & a'b'c'c & 2a'b'c'd \end{vmatrix}.$$

Divisons les trois premières lignes par $\lambda'b'c'$, $\lambda'c'a'$, $\lambda'a'b'$, la

dernière par $a'b'c'$, et multiplions les trois premières colonnes par a' , b' , c' , la dernière par $2\lambda'$; il vient

$$\frac{\hat{\sigma}'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q & 2aa' \\ r & 0 & p & 2bb' \\ q & p & 0 & 2cc' \\ aa' & bb' & cc' & 4d\lambda' \end{vmatrix}.$$

A cause de $q + r = 2aa'$, retranchons de la dernière colonne la somme des trois premières; nous avons

$$\frac{\hat{\sigma}'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a , b , c . Finalement :

$$\hat{\sigma} = a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2 \times pqr \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

On a pour $\hat{\sigma}$ une expression analogue. Par suite, en tenant compte de la relation (R''), le produit $\hat{\sigma}\hat{\sigma}'$ est un carré, comme cela est nécessaire :

$$\sqrt{\hat{\sigma}\hat{\sigma}'} = abc.a'b'c'.\lambda\lambda'.pqr \times (2dd' + \Sigma aa').$$

12. On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta &= abc.a'b'c'(2dd' + \Sigma aa') \\ &\quad + \lambda\lambda'(aa'p^2 + bb'q^2 + cc'r^2). \end{aligned}$$

13. Reste le polynome φ . L'équation (S') manquant de terme en x^2 , y^2 , z^2 , l'équation (Σ) manquant de termes en u^2 , v^2 , w^2 , on a (fin du n° 4)

$$\begin{aligned} \varphi &= l^2 l'^2 + \dots \\ &\quad + f^2 f'^2 + \dots \\ &\quad + 2(gm - hn)(g'm' - h'n') + \dots \\ &\quad + 2ll'(gg' + hh') + \dots \\ &\quad + 2gh.g'h' + \dots \\ &\quad + 2(fd - mn)(f'd' - m'n') + \dots; \end{aligned}$$

la quatrième ligne contient les termes qui proviennent de la quatrième et de la cinquième ligne dans l'expression générale de φ .

On trouve, en développant,

$$\varphi = (ll' + mm' + nn' + ff' + gg' + hh')^2 + 2K,$$

avec

$$\begin{aligned} K = & -f'l'(gm + hn - fl) - \dots - \dots \\ & + dd'(ff' + gg' + hh') \\ & - mnf'd' - \dots - \dots \\ & - m'n'fd - \dots - \dots, \end{aligned}$$

d représentant ici le coefficient de r^2 dans l'équation (Σ) , c'est-à-dire $2abcd'$, etc; on en déduit

$$\varphi = [abc.a'b'c'\Sigma aa' + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)]^2 + 2K,$$

ou

$$\varphi = \left(\frac{1}{2} \theta - 2abc.a'b'c'.dd' \right)^2 + 2K.$$

14. La relation à vérifier devient, en prenant le signe $+$ devant le radical,

$$\begin{aligned} 2abc.a'b'c'.dd'.\theta - 4a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2.d^2d'^2 - 2K \\ = 2abc.a'b'c'.\lambda\lambda'.pqr \times (2dd' + \Sigma aa'), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} &= dd'(\theta - 2abc.a'b'c'.dd') - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa') \\ &= 2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)] \\ &\quad - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa'). \end{aligned}$$

Or on a, d'après l'expression de K donnée au n° 13,

$$\begin{aligned} K = & -\lambda\lambda'.abc.a'b'c'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \dots + \dots] \\ & + 4\lambda\lambda'.abc.a'b'c'.dd'[aa'p^2 + \dots + \dots] \\ & - 2a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2(d\lambda' + d'\lambda)(p + q + r), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $p + q + r$ par $\Sigma aa'$, et en tenant compte de (R') ,

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} &= -\lambda\lambda'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \dots + \dots] \\ &\quad + 4\lambda\lambda'.dd'(aa'p^2 + \dots + \dots) \\ &\quad - 2abc.a'b'c'[4dd'.\lambda\lambda' - dd'(dd' + \Sigma aa')]; \end{aligned}$$

il faut donc vérifier que le second membre de cette égalité ne diffère pas de l'expression

$$2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)] - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa').$$

Les termes indépendants du produit $\lambda\lambda'$ sont d'abord identiques.
Il reste à vérifier :

$$-aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) - \dots - \dots \\ + 2dd'(aa'p^2 + \dots + \dots - 4abc.a'b'c') = -pqr(2dd' + \Sigma aa').$$

Pour les termes indépendants du produit dd' , si l'on pose

$$aa' = \alpha, \quad bb' = \beta, \quad cc' = \gamma,$$

d'où

$$p = \beta + \gamma - \alpha, \quad \dots, \quad \dots,$$

on a, par exemple,

$$bb'q + cc'r - aa'p = \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma) - \alpha(\beta + \gamma - \alpha) \\ = \alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma),$$

et l'on doit vérifier

$$-\alpha(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) - \dots - \dots = -pqr \Sigma \alpha,$$

ce qui est une identité.

Pour les termes en dd' , on doit vérifier

$$\alpha(\beta + \gamma - \alpha)^2 + \beta(\gamma + \alpha - \beta)^2 + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta\gamma = -pqr;$$

or, le premier membre admet le facteur p , comme on le voit en y faisant $\alpha = \beta + \gamma$, etc.; il est donc divisible par pqr , et les deux membres de l'égalité ne peuvent différer que par une constante; ils ne diffèrent pas, puisque les termes en α^3 par exemple sont les mêmes.

SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE p^6 ;

Par M. M. POTRON.

Cette Note a pour but de rectifier et de compléter les résultats obtenus dans ma Thèse de Doctorat touchant les g_{p^6} (groupes d'ordre p^6), et de réparer en particulier une omission de quelque importance, commise dans la détermination des types de figure (11) (1111) dans le cas de $p > 2$ (Thèse, p. 94, 95).

Il s'agit des types de $g_{p^6}G$ ayant pour commutant le central et ne contenant pas de g_{p^5} de figure (111) (11). Leurs équations

peuvent toujours (Thèse, p. 92) être mises sous la forme

$$a^p = b^p = 1, \quad c^p = b\beta a^\alpha, \quad d^p = b\beta', \quad e^p = b\beta'', \quad f^p = b\beta''', \\ (\alpha = 0, 1),$$

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^N, \\ f^{-1}df = da, \quad f^{-1}ef = e.$$

Nous n'avons à nous occuper ici que du cas (Thèse, p. 93) $\alpha = 1$, β' ou β'' ou $\beta''' \neq 0$.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme (Thèse, p. 76)

$$a_1 = b\eta a\xi, \quad b_1 = b\eta' a\xi', \\ c_1 = f^u e^z dy^x c^x b^k a^h, \quad d_1 = f^{u'} e^{z'} dy' c^{x'} b^{k'} a^{h'}, \\ e_1 = f^{u''} e^{z''} dy'' c^{x''} b^{k''} a^{h''}, \quad f_1 = f^{u'''} e^{z'''} dy''' c^{x'''} b^{k'''} a^{h'''},$$

avec les conditions (Thèse, p. 89, 90, 91, N désigne un non carré arbitraire) :

$$\xi' \equiv \omega\eta, \quad \eta' \equiv \omega N\xi, \quad \omega N = \pm 1, \\ x' \equiv \omega N^2 y, \quad y' \equiv \omega N x, \quad z' \equiv \omega N \alpha, \quad u' \equiv \omega N^2 z, \\ x'' \equiv \omega N y'', \quad y'' \equiv \omega x'', \quad z'' \equiv \omega u'', \quad u'' \equiv \omega N z'', \\ \xi \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', \quad \eta \equiv xu'' - ux'' + N(yz'' - zy''), \\ (\xi^2 - N\eta^2) [(x^2 - Ny^2)(Nz''^2 - u''^2) \\ + (x''^2 - Ny''^2)(Nz^2 - u^2) + 2N(xy'' - yx'')(zu'' - uz'')] \neq 0,$$

et il opère sur les exposants des équations de G une transformation définie (Thèse, p. 94) par

$$\xi + \beta_1 \omega \eta \equiv x, \quad \eta + \beta_1 \omega N \xi \equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u, \\ \beta'_1 \eta \equiv N^2 y, \quad \beta'_1 \xi \equiv \beta N y + \beta' x + \beta'' u + \beta''' N z, \\ \beta''_1 \omega \eta \equiv x'', \quad \beta''_1 \omega N \xi \equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \beta''' u'', \\ \beta'''_1 \eta \equiv N y'', \quad \beta'''_1 N \xi \equiv \beta N y'' + \beta' x'' + \beta'' u'' + \beta''' N z''.$$

Si l'on fait $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$, il vient

$$x'' \equiv y'' \equiv \beta'' z'' + \beta''' u'' \equiv \beta'' u'' + \beta''' N z'' \equiv 0,$$

donc $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$; ainsi on peut faire $\beta'_1 = \beta'''_1 = 0$ toujours et seulement si $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$.

Supposons d'abord β'' ou $\beta''' \neq 0$; en prenant

$$\eta = y = x'' = y'' = u'' = 0, \quad \xi = x = z'' = 1, \\ \beta + \beta'' z + \beta''' u \equiv \beta + N \beta''' z + \beta'' u \equiv 0,$$

on peut faire $\beta_1 = \beta'_1 = 0$, et le calcul s'achève comme dans la Thèse (p. 94, 95).

Supposons maintenant $\beta''_1 = \beta'''_1 = \beta'' = \beta''' = 0$ donc $\beta' \beta'_1 \neq 0$ et

$$\begin{aligned} x'' &\equiv y'' \equiv 0, & \xi &\equiv xz'' + yu'', & \eta &\equiv xu'' + Nyz'', \\ (\xi^2 - N\eta^2)(Nz''^2 - u''^2)(x^2 - Ny^2) &\neq 0, \\ \xi + \beta_1 \omega \eta &\equiv x, & \eta + \beta_1 \omega N\xi &\equiv \beta x + \beta' y, \\ \beta'_1 \eta &\equiv N^2 y, & \beta'_1 \xi &\equiv \beta N y + \beta' x. \end{aligned}$$

L'élimination de ξ, η puis de x, y entre les quatre dernières équations donne

$$(b) \quad N(\beta' \beta_1^2 - \beta^2 \beta'_1) + (N^2 - \beta' \beta'_1)(\beta'_1 - \beta') \equiv 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que (β_1, β'_1) fournisse le même type de G que (β, β') .

Considérée comme une équation en β'_1 , l'équation (b) a des solutions rationnelles toujours et seulement si

$$(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 + 4N\beta'^2(\beta_1^2 - N)$$

est carré ou $\equiv 0$. On pourra donc faire $\beta_1 = 0$ toujours et seulement si $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ que l'on peut écrire

$$[(\beta' + N)^2 - N\beta^2][(\beta' - N)^2 - N\beta^2]$$

est carré ou $\equiv 0$.

Supposons d'abord cette condition remplie et soit $\beta_1 = \beta = 0$, la condition (b) qui devient $(\beta'_1 - \beta')(\beta' \beta'_1 - N^2) \equiv 0$ montre qu'il y a pour G $\frac{p+1}{2}$ types qui, en prenant pour N une racine primitive i de p , correspondent à (Cf. Thèse, p. 94)

$$\beta = 0, \quad \beta' = i, i^2, \dots, i^{\frac{p+1}{2}}, \quad \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons maintenant $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ non carré, donc $\beta \beta_1 \neq 0$, les types distincts de G correspondent aux systèmes (β, β') vérifiant cette condition et tels que

$$N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \neq 0, \quad h \neq k.$$

Pour trouver le nombre des types de G , cherchons d'abord le

nombre des systèmes (β_1, β'_1) solutions de (b). En posant

$$x = \beta_1 - \frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2\beta'}, \quad y = \beta_1,$$

(b) devient

$$x^2 - Ny^2 = \frac{1}{4\beta'^2} [(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2]$$

et l'on sait ⁽¹⁾ que cette équation admet $p + 1$ systèmes de solutions. Cherchons ensuite le nombre des systèmes (β, β') tels que $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ soit non carré, c'est-à-dire tels que $\left(\frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2N\beta'}\right)^2$ soit précédé d'un non carré. L'équation

$$\beta'^2 - N\beta^2 - 2cN\beta' + N^2 = 0,$$

où $c^2 - 1$ désigne un non carré et qui, en posant

$$x = \beta' - cN, \quad y = \beta,$$

devient

$$x^2 - Ny^2 = N^2(c^2 - 1),$$

a comme précédemment $p + 1$ systèmes de solutions pour une valeur donnée de c . Comme $c^2 - 1$ parcourt ⁽²⁾ $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$ (ε désignant le caractère quadratique de -1) valeurs distinctes auxquelles il faut ajouter la valeur -1 si $\varepsilon = -1$, il en résulte que c parcourt toujours $\frac{p-1}{2}$ valeurs distinctes. Les $\frac{p-1}{2}$ systèmes (β, β') que nous avons à considérer se répartissant en catégories de $p + 1$ qui fournissent pour G le même type, il y a exactement pour G $\frac{p-1}{2}$ types distincts.

Dans la liste des g_{p^6} (Thèse, p. 164) il faut donc supprimer dans les types (27) celui qui correspond à $\beta' = 0$ et ajouter les $\frac{p-1}{2}$ types pour lesquels les seconds membres des équations sont

$$1, \quad 1, \quad b\beta_h a, \quad b\beta'_h, \quad 1, \quad 1, \quad c, \quad ca, \quad cb, \quad db^N, \quad da, \quad e,$$

⁽¹⁾ DE SÉQUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 44.

⁽²⁾ Il y a $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$ non carrés $\neq 0$ suivis d'un carré $\neq 0$ (DE SÉQUIER, *loc. cit.*).

β_h et β'_h parcourant pour $h = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ les $\frac{1}{2}(p-1)$ systèmes de valeurs telles que l'on ait

$$\begin{aligned} & (\beta_h^2 N \beta_h^2 + N^2)^2 - 4 N^2 \beta_h'^2 \quad \text{non carré,} \\ & N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \not\equiv 0 \text{ pour } h \neq k \\ & \left(h, k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right). \end{aligned}$$

LES G_{p^m} (p PREMIER) DONT TOUS LES $G_{p^{m-2}}$ SONT ABÉLIENS;

Par M. POTRON.

1. Ayant rencontré dans ma Thèse de doctorat quelques types de g_{p^m} (p premier) caractérisés par cette propriété, j'ai été amené ⁽¹⁾ à chercher tous les g_{p^m} (p premier) qui la possèdent; je me suis toutefois restreint aux groupes métabéliens. De nouvelles recherches m'ont permis de m'affranchir de cette restriction et d'arriver à la détermination complète des g_{p^m} (p premier) caractérisés par la propriété énoncée. Je les expose dans le présent travail, me bornant à rappeler ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ les résultats partiels obtenus dans ma Thèse, afin de les relier ⁽¹²⁾ au résultat général.

2. Outre les théorèmes de la théorie des groupes employés et cités dans ma Thèse ⁽²⁾, je me servirai principalement des suivants :

I ⁽³⁾. Si C désigne le commutant et P le p. p. c. m. des p^i èmes puissances des éléments de G , le groupe CP est p. g. c. d. des $g_{p^{m-1}}$ de G . $G \mid CP$ est d'ailleurs abélien principal.

II ⁽⁴⁾. Soit a_{ij_i} ($i = 1, \dots, \nu; j = 1, \dots, n_i$) une base d'un g_{p^m} abélien G ; pour qu'un système d'éléments $b_{kl_k} \equiv \Pi_{ij_i} a_{ij_i}^{x_{ij_i} k_l_k}$ forme

⁽¹⁾ *Thèse*, nos 17-24, p. 30-69, 159, 160, 162. (Paris, Gauthier-Villars, 1904.) Pour la terminologie et les notations, voir ma *Thèse* et DE SÉGUIER, *Éléments de la Théorie des groupes abstraits*.

⁽²⁾ *Thèse*, n° 2.

⁽³⁾ BAGNERA, *R. A. L. R.*, 1898, *A. D. M.* (III^e série), t. II, p. 264.

⁽⁴⁾ *Thèse*, n° 14, p. 24, 35.

un système de générateurs de G , il faut et suffit que la matrice des x soit mod p de rang $\sum n_i$.

III (1). Pour que tout diviseur d'un g_{p^m} non abélien G soit abélien, il faut et suffit que $G|A$ soit principal d'ordre p^2 et que, en désignant par $\{\Lambda d, \Lambda e\}$ une base de $G|A$, c'est-à-dire par d, e deux éléments non permutables de G , on ait $A = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$. En appliquant le théorème II, la deuxième condition s'exprime ainsi : d et e désignant deux éléments non permutables de G , la matrice des exposants des générateurs d'une base de A dans les expressions $d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de$ est mod p de rang égal au nombre des générateurs d'une base de A . On a d'ailleurs évidemment $G = \{d, e\}$.

3. Parmi les g_{p^m} dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens figurent évidemment les g_{p^4} et les g_{p^m} dont tous les diviseurs sont abéliens. Ces groupes ayant été déterminés (2), je les laisserai ici de côté et je désignerai toujours par G un g_{p^m} (p premier, $m > 4$) dont tout $g_{p^{m-2}}$ est abélien et dont un $g_{p^{m-1}}$ au moins n'est pas abélien. Soit alors Az_j ($j = 1, \dots, \mu$) un système de générateurs indépendants de $G|A$, je distinguerai les deux cas : $\mu > 2, \mu = 2$.

4. Soit d'abord $\mu > 2$. Quel que soit j , les

$$G_{jk} = \{\Lambda, z_j, z_k\} \quad (k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, \mu)$$

sont tous $< G$ et ne peuvent être tous abéliens sans quoi z_j serait dans A . Soit G' un G_{jk} non abélien ; G' est d'indice p dans G et a tous ses diviseurs abéliens, G' peut donc (n° 2, théorème III) être engendré par deux générateurs d, e ; son central A' est

$$\{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$$

(on a d'ailleurs $A' \geq A$), et G s'obtient en adjoignant à G' un élément f tel que f^p soit dans G' . On a donc

$$G' = \{d, e\} = \{\Lambda, d, e\}, \quad G = \{d, e, f\} = \{\Lambda, d, e, f\}.$$

En considérant les trois groupes $\{\Lambda, d, e\}, \{\Lambda, d, f\}, \{\Lambda, e, f\}$

(1) Thèse, n° 13, p. 24.

(2) Thèse, nos 13-16, p. 23-30.

dont tous les diviseurs sont abéliens, on voit que d^p, e^p, f^p sont permutable à d, e, f , donc dans A ; f^p qui appartient à G' appartient donc à A' ; or A' d'indice p^2 dans G' est d'ordre p^{m-3} ; f étant hors de G' et par suite de A' , $\{A', f\}$ est d'ordre p^{m-2} donc abélien, donc $A' \leq A$. On a donc $A' = A$ et $\{G, A\} = p^3$.

Les groupes $\{A, d, e\}$ et $\{A, d, f\}$ sont abéliens ou métabeliens; dans ce dernier cas leurs centraux respectifs contenant A et étant d'ordre p^{m-3} sont égaux à A . Les trois groupes $\{A, d, e\}$, $\{A, d, f\}$, $\{A, e, f\}$ étant ou abéliens ou métabeliens de central A , G est métabelien. L'hypothèse $\mu > 2$ ne fournit donc que des types déterminés dans ma Thèse ⁽¹⁾.

5. Soit désormais $\mu = 2$, $G = \{A, e, f\}$; le groupe non abélien $\{e, f\}$ est dans G d'indice $\leq p$. Laisant de côté le cas $\{e, f\} < G$ traité dans ma Thèse ⁽²⁾, je supposerai $\{e, f\} = G$, d'où $CP = \{C, e^p, f^p\}$, donc $(G, CP) \leq p^2$; comme d'autre part il faut $(G, CP) > p$ sans quoi G serait cyclique ⁽³⁾, on a $(G, CP) = p^2$ et CP est abélien. Soit alors $e^{-1}f^{-1}ef = c$; si A contient c , le commutant est $\{c\}$ et G est métabelien; ce cas étant traité dans ma Thèse ⁽⁴⁾, je supposerai que A ne contient pas c et je distinguerai deux cas suivant que le commutant C est cyclique ou non.

6. Supposons C cyclique $= \{d\}$; soit

$$f^{-1}ef = ed^{\delta} \quad (d^{\delta} \text{ hors de } A), \quad e^{-1}de = d^{\alpha}, \quad f^{-1}df = d^{\beta};$$

on en tire

$$e^{-x}d^xe^x = d^{\alpha x}, \quad f^{-z}d^zf^z = d^{\beta z}, \quad f^{-z}e^xf^z = e^x d^{\frac{(2x-1)(\beta z-1)}{(x-1)(\beta-1)}}.$$

Comme CP est abélien, il faut que d soit permutable à e^p, f^p ; donc

⁽¹⁾ Ces types sont de figure (s1) (111) ou (s11) (111). Leurs équations seront données au n° 12.

⁽²⁾ Thèse, n° 17, p. 30-31. Cette hypothèse conduit à des produits directs et à un type de figure (rs2) (11) dont les équations seront données au n° 12.

⁽³⁾ BURNSIDE, *Theory of groups*, nos 62, 63; DE SÉGUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 137, p. 115. Le théorème complet est : un $g_p^m G$ ayant un seul g_p^s est cyclique, sauf si l'on a à la fois $p = 2, s = 1, m \geq 3$, auquel cas G est cyclique ou dicyclique. L'exception ne peut se présenter ici où $s = m - 1 > 3$.

⁽⁴⁾ Thèse, n° 17, p. 32. Ces types sont de figure (rs) (22). Leurs équations seront données au n° 12.

que $d^{\alpha^p} = d^{\beta^p} = d$. Comme les groupes $\{CP, e\} = \{d, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{d, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, il faut que d^p (et non d^{δ}), e^{p^2} , f^{p^2} soient permutables à e, f ; donc que

$$d^p \alpha = d^p \beta = d, \quad d^{\delta \frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1}} = d^{\delta \frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1}} = 1, \quad \delta \neq 0,$$

en sorte que l'on peut supposer $\delta = 1$. En désignant par p^γ l'ordre de d il faut donc

$$\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{p^{\gamma-1}}, \quad \alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1 \pmod{p^\gamma}, \quad \frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1} \equiv \frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1} \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Il faut donc d'abord $\gamma > 1$, car, en supposant $\gamma = 1$, les conditions $\alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1$ exigeraient $\alpha \equiv \beta \equiv 1$ et d serait normal contrairement à l'hypothèse. Posons alors

$$\alpha = 1 + hp^{\gamma-1}, \quad \beta = 1 + kp^{\gamma-1}, \quad h \text{ ou } k \neq 0;$$

on en tire ⁽¹⁾ (sauf si $p^{\gamma-1} = 2$, auquel cas $\gamma = 2$)

$$\alpha^{p^2} = 1 + h'p^{\gamma+1}, \quad \beta^{p^2} = 1 + k'p^{\gamma+1}, \quad h' \text{ ou } k' \neq 0;$$

les conditions $\frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1} \equiv \frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1} \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$ exigent donc $\gamma \leq 2$. On a donc toujours $\gamma = 2$ et d est d'ordre p^2 .

Un élément quelconque de G étant de la forme $f^z e^y d^x$ est dans A toujours et seulement si

$$(\alpha-1)x - \frac{\beta^z-1}{\beta-1} \equiv (\beta-1)y + \frac{\alpha^y-1}{\alpha-1} \equiv 0 \pmod{p^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha^y-1}{\alpha-1} \equiv \frac{\beta^z-1}{\beta-1} \equiv 0,$$

et par suite $y \equiv z \equiv 0$; tout élément de A est donc de la forme $f^{p^z} e^{p^y} d^x$, donc A divise CP . D'ailleurs le p. p. c. m. des commu-

(¹) Si $g^{\gamma} = 1 + hp^2$ (p premier ne divisant pas h , $p \geq 1$), on aura

$$g^{\gamma x p^s} = 1 + p^{s+\gamma+\tau_1}(hx + kp)$$

(x premier à p , $\tau_1 = 0$ sauf si l'on a à la fois $p = 2$, $\gamma = 1$, $s \geq 1$ auquel cas τ_1 est l'exposant de la plus haute puissance de 2 divisant $h+1$). [DE SEGUIER, *Éléments*, n° 25, p. 28, note (²).]

tateurs de e^p, f^p, d avec e, f divise $\{d^p\}$ et par suite A ; $CP|A$ divise donc le central de $G|A$; comme $CP|A$ est d'indice p^2 dans le groupe non abélien $G|A$, $CP|A$ est exactement le central de $G|A$ et CP est la deuxième central de G .

7. Cherchons à déterminer $G|A$. Soit d'abord $p > 2$. On a toujours $\frac{(\alpha^p - 1)(\beta^p - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, donc e^p et f^p ne sont pas normaux; ils sont d'ailleurs indépendants mod A , car, si

$$f^p \equiv e^p \pmod{A},$$

f^p permutable à e et f serait normal; ainsi A est d'indice p^2 dans $\{A, e^p, f^p\}$; je dis que A est aussi d'indice p^2 dans

$$CP = \{A, e^p, f^p, d\},$$

c'est-à-dire que d est dans $\{A, e^p, f^p\}$. Dans l'hypothèse contraire en effet A est d'indice p^5 dans G , on a mod A

$$\begin{aligned} c_1^p &\equiv c_2^p \equiv d^p \equiv 1, & e^p &\equiv c_1, & f^p &\equiv c_2, \\ d^{-1}c_1d &\equiv e^{-1}c_1e \equiv f^{-1}c_1f \equiv c_1, & d^{-1}c_2d &\equiv e^{-1}c_2e \equiv f^{-1}c_2f \equiv c_2, \\ e^{-1}de &\equiv f^{-1}df \equiv d, & f^{-1}ef &\equiv ed; \end{aligned}$$

et l'on a dans G , en tenant compte de toutes les conditions et hypothèses,

$$\begin{aligned} a^p &= 1, & d^p &= a, & e^p &= c_1, & f^p &= c_2, \\ d^{-1}c_1d &= e^{-1}c_1e = c_1, & f^{-1}c_1f &= c_1a, \\ d^{-1}c_2d &= c_2, & e^{-1}c_2e &= c_2a^{-1}, & f^{-1}c_2f &= c_2, \\ e^{-1}de &= da^\lambda, & f^{-1}df &= da^{\lambda'}, & f^{-1}ef &= ed, & (\lambda \text{ ou } \lambda' \not\equiv 0). \end{aligned}$$

Tout élément de G est donc mod A de la forme $f^v e^u d^z c_2^y c_1^x$; A étant d'indice p^5 dans G il faut que l'égalité $f^v e^u d^z c_2^y c_1^x \equiv 1 \pmod{A}$ entraîne $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv v \equiv 0$. Or cette condition n'est pas remplie, car $dc_2^\lambda c_1^{-\lambda'}$ est normal. Ainsi $G|A$ est de figure (11)(11); comme e^p et f^p sont indépendants mod A , un seul des types d'ailleurs connus ⁽¹⁾ des g_p convient, et les équations de $G|A$ peuvent s'écrire

$$\left. \begin{aligned} c^p &\equiv d^p \equiv 1, & e^p &\equiv c, & f^p &\equiv d \\ d^{-1}cd &\equiv e^{-1}ce \equiv f^{-1}cf \equiv c, & e^{-1}de &\equiv f^{-1}df \equiv d, & f^{-1}ef &\equiv ed \end{aligned} \right\} \pmod{A}.$$

⁽¹⁾ DE SÉGUIER. *Éléments*, n° 148, p. 130.

Soit maintenant $p = 2$. On a

$$f^{-1}e^2f = e^2d^{\alpha+1}, \quad f^{-2}ef^2 = ed^{\beta+1}, \quad (\alpha, \beta = 1, 3).$$

On ne peut avoir $\alpha = \beta = 1$, car d serait normal. Si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = 3$, f^2 est normal et $CP = \{A, e^2, d\}$. Le g_2^{m-1}

$$\{CP, f\} = \{e^2, f, d\}$$

ayant tous ses diviseurs abéliens, on a $\{e^2, f, d\} = \{f, d\}$, donc e^2 est de la forme $f^z d^x$; la condition de permutabilité $e^{-1}e^2e = e^2$ exige $z \equiv 0$, et la condition $f^{-1}e^2f = e^2d^2$ exige $x \equiv 1$; e^2 est donc dans $\{A, d\}$ et A est d'indice 2 dans $CP = \{A, d\}$. $G|A$ est donc de figure (1) (11) et a des équations de la forme

$$d^2 \equiv 1, \quad e^2 \equiv d^6, \quad f^2 \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed, \quad \text{mod } A,$$

que l'on peut toujours ramener à la forme (obtenue dans l'hypothèse $\alpha = \beta = 3$)

$$d^2 \equiv e^2 \equiv f^2 \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed.$$

8. Achéons de déterminer G . Soit d'abord $p > 2$. Les conditions d'ordre et de figure, jointes aux conditions nécessaires déjà trouvées, donnent

$$\begin{aligned} c^{-1}d^{-1}cd &= c^{-1}e^{-1}ce = d^{-1}f^{-1}df = 1, \\ dp &= c^{-1}f^{-1}cf = e^{-1}d^{-1}ed \neq 1, \quad dp^2 = 1. \end{aligned}$$

Un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est

$$G_{zu} = \{CP, f^u e^z\} = \{A, c, d, f^u e^z\} \quad (z \text{ ou } u \neq 0);$$

on voit directement que G_{zu} (z ou $u \neq 0$) n'est pas abélien et a pour central $\{A, d^u c^z\}$. Alors pour que tout $g_{p^{m-2}}$ de G soit abélien il faut et suffit que tout G_{zu} (z ou $u \neq 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait pour tout système de valeurs non simultanément $\equiv 0$ de z, u

$$\begin{aligned} \{A, d^u c^z\} &= \{c^p, d^p, f^{pu} e^{pz}, d^{-pz}, d^{pu}\} \\ &= \{c^p, d^p, f^{pu} e^{pz}\} = \{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}, \end{aligned}$$

a_{zu} étant dans A . Comme A est d'indice p dans $\{A, d^u c^z\}$, comme $\{c^p, d^p, d^{pu} e^{pz} a_{zu}^p\}$ ou $\{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$ divise A et est d'indice p dans

$\{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$, l'égalité $\{\Lambda, d^u c^z\} = \{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$ équivaut à $\Lambda = \{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$, exige que a_{zu} soit dans $\{c^p, d^p\}$ et équivaut par suite à $\Lambda = \{c^p, d^p\}$. Ainsi pour que tout $g_{p^{m-2}}$ de G soit abélien il faut et suffit maintenant que $\Lambda = \{c^p, d^p\}$; Λ étant par suite de figure (s) ou $(s1)$, G est de figure $(s)(11)(11)$ ou $(s1)(11)(11)$.

Parmi les types tous connus ⁽¹⁾ de figure $(s)(11)(11)$ un et un seul satisfait aux conditions énoncées; ses équations sont (type II 2) ⁽²⁾.

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= 1, & b^p &= a, & c^p &= a^{p^{s-1}}, & d^p &= b, & e^p &= c, \\ c^{-1}bc &= d^{-1}bd = b, & e^{-1}be &= ba^{p^{s-1}}, \\ d^{-1}cd &= ca^{-p^{s-1}}, & e^{-1}ce &= c, & e^{-1}de &= dc. \end{aligned}$$

Si G est de figure $(s1)(11)(11)$, ses équations peuvent s'écrire, en tenant compte des conditions d'ordre et de figure et changeant un peu les notations,

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= b^p = 1, & c^p &= b^{\beta} a^{\alpha}, & d^p &= b^{\beta'} a^{\alpha' p^{s-1}}, \\ e^p &= c, & f^p &= d^{\beta''} a^{\alpha''}, \\ d^{-1}cd &= e^{-1}ce = c, & f^{-1}cf &= cb^{\beta'} a^{\alpha' p^{s-1}}, \\ e^{-1}de &= db^{-\beta'} a^{-\alpha' p^{s-1}}, & f^{-1}df &= d, & f^{-1}ef &= ed. \end{aligned}$$

La condition $\Lambda = \{c^p, d^p\}$ qui équivaut à $\alpha\beta' - \beta\alpha' p^{s-1} \not\equiv 0$ montre que l'on peut prendre c^p pour a et d^p pour b , c'est-à-dire faire $\alpha = \beta' = 1$, $\beta = \alpha' = 0$; en prenant ensuite $a^{1-p\beta''}$ pour a , $ca^{-\beta''}$ pour c , $ec^{-\beta''}$ pour e , $fd^{-\beta''}c^{-\alpha''}$ pour f , on peut faire $\alpha'' = \beta'' = 0$. Donc pour chaque valeur de s un $g_{p^{s+5}}$ et un seul de figure $(s1)(11)(11)$ a tous ses diviseurs d'indice p^2 abéliens; ses équations sont

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= b^p = 1, & c^p &= a, & d^p &= b, & e^p &= c, & f^p &= d, \\ d^{-1}cd &= e^{-1}ce = c, & f^{-1}cf &\equiv cb, & e^{-1}de &= db^{-1}, \\ f^{-1}df &= d, & f^{-1}ef &= ed. \end{aligned}$$

Soit maintenant $p = 2$. Les conditions d'ordre et de figure de G jointes aux conditions nécessaires précédemment trouvées

⁽¹⁾ Thèse, n° 11, p. 17-21, 157; DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 158.

⁽²⁾ Ce type présente par erreur l'équation $d^p = 1$ au lieu de $d^p = c$.

donnent

$$d^2 = d^{-1} e^{-1} d e = d^{-1} f^{-1} d f \neq 1, \quad d^3 = 1.$$

Un $g_{2^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \langle \Lambda, d, f^z e^y \rangle$ (y ou $z \equiv 1$); G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv z$, et en ce cas G_{yz} a pour central Λ . Alors, pour que tout $g_{2^{m-1}}$ de G soit abélien, il faut et suffit que tout G_{yz} ($y \not\equiv z$) ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait, pour tout système y, z vérifiant $y + z \equiv 1$,

$$\Lambda = \langle d^2, (f^z e^y)^2, d^{-1} (f^z e^y)^{-1} d f^z e^y \rangle = \langle d^2, f^{2z} e^{2y} \rangle.$$

Donc, pour que tout $g_{2^{m-1}}$ de G soit abélien, il faut et suffit maintenant

$$\Lambda = \langle d^2, e^2 \rangle = \langle d^2, f^2 \rangle.$$

Λ étant par suite de figure (s) ou $(s1)$, G est de figure $(s) (1)$ (11) ($s > 1$) ou $(s1) (1) (11)$.

Les $g_{2^{s+3}}$ de figure $(s) (1) (11) (1)$ et les $g_{2^{s+4}}$ de figure $(s1) (1) (11) (2)$ sont tous connus. Les conditions trouvées montrent que, pour chaque valeur de s , un $g_{2^{s+3}}$ de figure $(s) (1) (11)$ et un seul ($s > 1$) dont les équations sont

$$a^{2^s} = 1, \quad b^2 = a^{2^{s-1}}, \quad c^2 = d^2 = a, \quad c^{-1} b c = d^{-1} b d = b a^{2^{s-1}}, \quad d^{-1} c d = c b$$

ainsi que deux $g_{2^{s+4}}$ de figure $(s1) (1) (11)$ et seulement deux dont les équations sont (types 22)

$$a^{2^s} = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad d^2 = a^{(3)}, \quad e^2 = b \beta'' a \quad (\beta'' = 0, 1), \\ d^{-1} c d = e^{-1} c e = c b, \quad e^{-1} d e = d c$$

ont tous leurs diviseurs d'indice 4 abéliens.

9. Supposons maintenant G non cyclique, et soit

$$e^{-1} d e = d b, \quad f^{-1} d f = d c, \quad f^{-1} e f = e d, \quad e^{-1} c e = c c', \quad f^{-1} b f = b b'.$$

L'égalité $f^{-1} e^{-1} d e f = f^{-1} d b f$ donne

$$b' = c';$$

(1) DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 150, p. 130-132.

(2) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 159.

(3) Dans ma Thèse, l'équation indiquée (p. 156) pour le type 22 de la figure $(s1) (1) (11)$ est par erreur $d^2 = 1$.

soit donc

$$b' = c' = a.$$

Les deux groupes $\{CP, e\} = \{C, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{C, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, donc a, b, c^p, d^p, f^{p^2} sont permutables à e , et a, b^p, c, d^p, e^{p^2} sont permutables à f , en sorte que $a, b^p, c^p, d^p, e^{p^2}, f^{p^2}$ sont normaux; on trouve d'ailleurs par récurrence

$$\begin{aligned} e^{-u} c^x e^u &= c^x a^{xu}, & f^{-v} b^x f^v &= b^x a^{xv}, \\ e^{-u} d^z e^u &= d^z b^{zu}, & f^{-v} d^z f^v &= d^z c^{zv}, & f^{-v} e^u f^v &= e^u d^{uv} c^{(v)} b^{(u)}; \end{aligned}$$

il faut donc

$$a^p = b^p = c^p = d^{p^2} = 1.$$

Comme d n'est pas normal on peut supposer par exemple $b \neq 1$, il faut donc $\{CP, e\} = \{d, e\}$, donc c est dans $\{d, e\}$; soit

$$c = e^x d^\beta b^\alpha,$$

l'égalité $e^{-1} c e = c a$ donne $b^\beta = a$, d'où

$$b^\beta = a = 1$$

(si $a \neq 1$, b ne serait pas normal et il faudrait $\beta \neq 0$, en sorte que b^β ne pourrait être normal). Ainsi b et c sont normaux et $C = \{b, c, d\}$, d non normal ne pouvant être dans $\{b, c\}$. Tout élément de G peut s'écrire $f^v e^u d^z c^x b^x$; cet élément sera normal toujours et seulement si

$$d^{-v} c^{-(v)} b^{z-uv} = d^u c^z b^{(u)} = 1,$$

ce qui exige $u \equiv v \equiv 0$, donc A divise CP .

Pour la suite de la discussion, je distinguerai deux cas, suivant que G contient ou non hors de CP un élément $f^z c^x$ permutable à tout élément de C .

10. Dans la première de ces deux hypothèses, on peut prendre cet élément pour f , c'est-à-dire supposer $c = 1$. Alors $C = \{b, d\}$ et tout élément de G peut s'écrire $f^u e^z d^x b^x$. De $\{CP, e\} = \{d, e\}$ on tire

$$f^p = e^x d^\beta b^\alpha$$

et la formule $f^{-p} e f^p = e d^p$ donne

$$b^{-\beta} = d^p,$$

ce qui (C n'étant pas cyclique) exige $b^{-\beta} = d^p = 1$. Ainsi $d^p = 1$, et C est un g_{p^3} principal. Il faut $p > 2$; car, si $p = 2$, on a $f^{-1} e^2 f = e^2 b$, le $g_{2^{m-1}} \{CP, f\}$ contient le diviseur non abélien $\{e^2, f\}$, et l'on a $\{e^2, f\} < \{CP, f\}$; si, en effet, $\{e^2, f\} = \{CP, f\}$, d serait dans $\{e^2, f\}$ donc de la forme $f^\gamma e^{2\beta} b^\alpha$ et permutable à e^2 et à f , ce qui exige $\beta = \gamma = 0$, d serait donc normal contrairement à l'hypothèse.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G pouvant s'écrire mod A $f^a d^z e^y$, G/A est engendré par Ad , Ae , Af , et comme on a

$$d^p = e^p = f^p = 1, \quad e^{-1} d e = f^{-1} d f = d, \quad f^{-1} e f = e d \quad \text{mod A},$$

G/A est de figure (1) (11). On a

$$CP = \{b, d, e^p, f^p\};$$

mais $f^p = e^\gamma b^\alpha$, et, la formule $f^{-1} d f^p = d$ exigeant $\gamma = 0$, f^p est dans $\{e^p, b\}$; ainsi $CP = \{b, d, e^p\}$; un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{b, d, e^p, f^z e^y\}$ (y ou $z \not\equiv 0$); G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv 0$, et en ce cas G_{yz} a pour central A, car $G_{yz} > A$ et $(G_{yz}, A) = p^2$. Pour que tout $g_{p^{m-2}}$ de G soit abélien il faut et suffit que tout G_{yz} ($y \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$A = \{(f^z e^y)^p, d^{-1} (f^z e^y)^{-1} d f^z e^y\} = \{f^{p^2} e^{py}, b^y\}$$

on, en tenant compte de $f^p = e^{p\gamma} b^\alpha$, que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$A = \{e^{p(\gamma + \gamma z)}, b^y\}.$$

Il faut donc $A = \{e^p, b\}$, en sorte que G est de figure (s) (1) (11) ($s > 1$) ou (s1) (1) (11). Je laisse de côté le cas où e^p est dans b , donc A d'ordre p et G d'ordre p^4 . Alors, pour que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$\{e^p, b\} = \{e^{p(\gamma + \gamma z)}, b^y\}$$

il faut et suffit que $\gamma \equiv 0$, c'est-à-dire que f^p soit dans $\{e^{p^2}, b\}$.

Les $g_{p^{s+3}}$ de figure (s) (1) (11) (4) et les $g_{p^{s+4}}$ de figure (s1) (1) (11) (2) sont tous connus. En tenant compte de toutes les conditions, on voit que, pour chaque valeur de s , un $g_{p^{s+3}}$ ($p > 2$) de figure (s) (1) (11) et un seul ($s > 1$) dont les équations sont

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= 1, & b^p &= 1, & c^p &= a, & d^p &= 1, \\ c^{-1}bc &= ba^{p^{s-1}}, & d^{-1}bd &= b, & d^{-1}cd &= cb, \end{aligned}$$

ainsi que trois $g_{p^{s+4}}$ ($p > 2$) de figure (s1) (1) (11) et seulement trois dont les équations sont (3)

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= b^p = 1, & c^p &= 1, & d^p &= a, & e^p &= b^\beta & (\beta = 0, 1, N), \\ d^{-1}cd &= cb, & e^{-1}ce &= c, & e^{-1}de &= dc \end{aligned}$$

ont tous leurs diviseurs d'indice p^2 abéliens.

41. Supposons maintenant qu'aucun élément de G hors de CP n'est permutable à tous les éléments de $C = \{b, c, d\}$. Comme b et c sont normaux (9), il faut et suffit pour cela que G n'ait aucun élément hors de CP permutable à d , c'est-à-dire, comme $e^{-x}f^{-z}df^ze^x = dc^zbx$, que b et c soient indépendants. A n'est donc pas cyclique.

Comme $\{CP, e\}$ et $\{CP, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens il faut $\{CP, e\} = \{d, e\}$, $\{CP, f\} = \{d, f\}$; ainsi e^p est dans $\{d, f\}$ et par suite de la forme $f^\gamma d^\beta c^\alpha$, f^p est dans $\{d, e\}$ et par suite de la forme $e^{\gamma'} d^{\beta'} b^{\alpha'}$. En tenant compte des formules

$$e^{-p}de^p = f^{-p}df^p = d, \quad f^{-1}e^pf = e^p d^p b^z, \quad f^{-p}ef^p = ed^p c^z$$

et des conditions de permutabilité

$$e^{-1}e^pe = e^p, \quad f^{-1}f^pf = f^p,$$

on voit qu'il faut

$$\gamma \equiv \gamma' \equiv 0, \quad (d^p c^z)^{-\gamma p^{-1}} b^\beta = (d^p b^z)^{\gamma' p^{-1}} c^{\beta'} = 1, \quad c^\beta = d^p b^z, \quad b^{-\beta'} = d^p c^z,$$

d'où en éliminant d^p ,

$$c^{\beta+z} b^{\beta'+z} = 1, \quad \text{donc} \quad \beta + z = \beta' + z = 0.$$

(1) DE SÉGUIER, *Éléments*, n° 150, p. 130-132.

(2) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 156.

(3) Ces types ont été par erreur omis dans ma *Thèse*, p. 13, 156.

Si donc $p > 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 0$, $d^p \equiv 1$; le commutant est un $\mathfrak{g}_p$ abélien principal. Si $p = 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 1$, $d^2 \equiv bc$; mais G a toujours des diviseurs non abéliens d'indice 4, on a en effet $\{d, fe\} < \{CP, fe\}$, car, si $\{d, fe\} = \{CP, fe\}$, e^2 serait dans $\{d, fe\}$, donc de la forme $(fe)^z dx (cb)^x$, la condition $e^{-2} de^2 = d$ exigerait $z \equiv 0$, et, $(fe)^2$ étant normal, la condition $f^{-1} e^2 f = e^2 d^2 b = e^2 c$ exigerait $b^x = c$, ce qui ne se peut.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G peut s'écrire mod A $f^z e^y d^x$, donc G/A est engendré par Ad , Ae , Af ; on a d'ailleurs mod A

$$d^p \equiv e^p \equiv f^p \equiv 1, \quad e^{-1} de \equiv f^{-1} df \equiv d, \quad f^{-1} ef \equiv ed,$$

donc G/A est de figure (1) (11). Un $\mathfrak{g}_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{CP, f^z e^y\}$, y ou $z \not\equiv 0$; d'après les hypothèses faites, G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) n'est jamais abélien et a pour central A , car $G_{yz} > CP > A$, $(G_{yz}, A) = p^2$. Alors, pour que tout $\mathfrak{g}_{p^{m-2}}$ de G soit abélien, il faut et suffit que tout G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc que l'on ait pour tout système de valeurs de y , z non simultanément $\equiv 0$

$$A = \{(f^z e^y)^p, d^{-1} (f^z e^y)^{-1} df^z e^y\} = \{f^p z e^p y, c^z b^y\}.$$

Il faut donc $A = \{e^p, b\} = \{f^p, c\}$; A , n'étant pas cyclique, est de figure (s 1) et G est de figure (s 1) (1) (11). En tenant compte des diverses conditions trouvées et changeant un peu les notations, les équations de G peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a^{p^s} &= b^p = 1, & c^p &= 1, & d^p &= b^{\beta} a^{\alpha}, & e^p &= b^{\beta'} a^{\alpha'}, \\ d^{-1} cd &= cb^{\mu} a^{\lambda p^{s-1}}, & e^{-1} ce &= cb^{\mu'} a^{\lambda' p^{s-1}}, & e^{-1} de &= dc, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} (\lambda \mu' - \mu \lambda') &\not\equiv 0, \\ \{a, b\} &= \{b^{\beta y + \beta' z} a^{\alpha y + \alpha' z}, b^{\mu y + \mu' z} a^{(\lambda y + \lambda' z) p^{s-1}}\} \quad (y \text{ ou } z \not\equiv 0); \end{aligned}$$

la deuxième équivaut (n° 2) à

$$(\alpha y + \alpha' z)(\mu y + \mu' z) - (\beta y + \beta' z)(\lambda y + \lambda' z) p^{s-1} \not\equiv 0 \quad (y \text{ ou } z \not\equiv 0)$$

et exige $s = 1$; G est donc de figure (11) (1) (11); la première

condition montre que l'on peut prendre $b^{\mu}a^{\lambda}$ pour a , $b^{\mu'}a^{\lambda'}$ pour b , c'est-à-dire supposer $\lambda = \mu' = 1$, $\lambda' = \mu = 0$; la deuxième condition devient alors

$$\beta y^2 + (\beta' - \alpha) y z - \alpha' z^2 \neq 0 \quad (y \text{ ou } z \neq 0)$$

et équivaut à

$$(\alpha - \beta')^2 + 4\beta\alpha' \text{ non carré.}$$

Ainsi les $\frac{1}{2}(p+1) g_{p^5}$ ($p > 2$) de figure (11) (1) (11) vérifiant cette condition, dont les équations sont (1)

$$\begin{aligned} a^p = b^p = 1, \quad c^p = 1, \quad d^p = b, \quad e^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \\ d^{-1}cd = ca, \quad e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc, \\ \left[\beta' = 1, \alpha' = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1) \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right); \beta' = 0, \alpha' = N \right] \end{aligned}$$

et ceux-là seuls ont tous leurs g_{p^3} abéliens.

12. Ainsi l'ensemble des g_{p^m} (p premier, $m > 4$) dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens sans que tous les $g_{p^{m-1}}$ le soient et qui ne sont pas produits directs comprend :

un type de figure (rs2) (11) ($r \geq s \geq 1$) (2)

$$(1) \quad a^{p^r} = b^{p^s} = c^{p^2} = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b, \quad e^{-1}de = ec^p;$$

un type de figure (s1) (111) ($m > 5$, donc $s > 1$) (3)

$$(2) \quad \begin{cases} a^{p^s} = b^p = 1, & c^p = b, & d^p = 1, & e^p = a, \\ d^{-1}cd = c, & e^{-1}ce = ca^{p^{s-1}}, & e^{-1}de = db; \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(p+3)$ types de figure (11) (111) ($m = 5$, $p > 2$) (4)

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} c^p = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b^{-1}, \\ c^p = b, \quad d^p = a^N, \quad e^p = 1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = c, \\ e^{-1}ce = ca, \\ e^{-1}de = db; \end{array} \right. \\ (4) \quad & a^p = b^p = 1, \\ (5) \quad & \left\{ \begin{array}{l} c^p = b, \quad d^p = ba^{\frac{1}{4}i^{2n-1}-1}, \quad e^p = 1, \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = c, \\ e^{-1}ce = ca, \\ e^{-1}de = db; \end{array} \right. \end{aligned}$$

(1) DE SÉGUIER, *Éléments*, n° 157, p. 141.

(2) *Thèse*, n° 17.

(3) *Thèse*, n° 19, type (7) de la figure (s1) (111) ($s > 1$), p. 160.

(4) *Thèse*, n° 19.

deux types de figure (11) (111) $(m = 5, p = 2)$ ⁽¹⁾

$$(6) \quad \alpha^2 = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2 = a, \quad e^2 = a, \\ d^2 = ba, \quad e^2 = 1, \end{array} \right\} \quad d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad e^{-1}de = db;$$

(7)

$\frac{1}{2}(p+1)$ types de figure (s 11) (111) $(p > 2)$ ⁽²⁾

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{p^s} = b^p = c^p = 1, \quad d^p = c, \quad e^p = c\gamma b\beta, \\ \left[\beta = N, \gamma = 0; \beta = \frac{1}{4}(i^{2n-1}-1), \gamma = 1 \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \right], \\ e^{-1}de = d, \quad f^{-1}df = db, \quad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.$$

un type de figure (s 11) (111) $(p = 2)$ ⁽³⁾

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{2^s} = b^2 = c^2 = 1, \quad d^2 = c, \quad c^2 = cb, \quad f^2 = a, \\ e^{-1}de = d, \quad f^{-1}df = db, \quad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.$$

un, deux ou trois types de figure (rs) (22) $(r \geq s \geq 2)$ ⁽⁴⁾

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = cb^{p^{s-2}}, \quad (r \geq s); \\ d^{-1}cd = cb^{p^{s-1}}\alpha^{p^{r-2}}, \quad (r-1 \geq s); \\ d^{-1}cd = ca^{p^{r-2}}, \quad (r-1 > s); \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \alpha^{p^r} = b^{p^s} = 1, \quad c^{p^s} = b, \quad d^{p^2} = a$$

$$(12)$$

un type de figure (s) (1) (11) $(s > 1, p > 2)$ (n° 10)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{p^s} = b^p = 1, \quad c^p = a, \quad d^p = 1, \\ c^{-1}bc = ba^{p^{s-1}}, \quad d^{-1}bd = b, \quad d^{-1}cd = cb; \end{array} \right.$$

un type de figure (s) (1) (11) $(s > 1, p = 2)$ (n° 8)

$$(14) \quad \alpha^{2^s} = b^2 = 1, \quad c^2 = d^2 = a, \quad c^{-1}bc = d^{-1}bd = ba^{2^{s-1}}, \quad d^{-1}cd = cb;$$

trois types de figure (s 1) (1) (11) $(p > 2)$ (n° 10)

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{p^s} = b^p = c^p = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b\beta \quad (\beta = 0, 1, N), \\ d^{-1}cd = cb, \quad e^{-1}ce = c, \quad e^{-1}de = dc, \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Thèse, n° 19, p. 40.

⁽²⁾ Thèse, n°s 20-23, types (1) et (2) de la figure (s 11) (111) $(s > 1)$, p. 161, types (26) et (27) de la figure (111) (111), p. 162.

⁽³⁾ Thèse, n°s 20-23, type (3) de la figure (s 11) (111) $(s > 1)$, p. 161, type (30) de la figure (111) (111), p. 162.

⁽⁴⁾ Thèse, n° 24, types (1), (2), (3) de figure (rs) (22), p. 163

$\frac{1}{2}(p+1)$ types de figure (11) (1) (11) $(p > 2, m = 5) (n^o 11)$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^p = b^p = c^p = 1, \quad d^p = b, \quad e^p = b^2 a^2, \\ \left[\alpha = N, \beta = 0; \alpha = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1), \beta = 1, \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \right], \\ d^{-1}cd = ca, \quad e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc; \end{array} \right.$$

deux types de figure (s1) (1) (11) $(p = 2) (n^o 8)$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{2^s} = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad d^2 = a, \quad e^2 = b^{\beta''} a \quad (\beta'' = 0, 1), \\ d^{-1}cd = e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc, \end{array} \right.$$

un type de figure (s) (11) (11) $(p > 2) (n^o 8)$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p^s} = 1, b^p = a, c^p = a^{p^{s-1}}, d^p = b, e^p = c, \\ c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, e^{-1}be = ba^{p^{s-1}}, d^{-1}cd = ca^{-p^{s-1}}, \\ e^{-1}ce = c, e^{-1}de = dc; \end{array} \right.$$

un type de figure (s1) (11) (11) $(p > 2) (n^o 8)$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p^s} = b^p = 1, c^p = a, d^p = b, e^p = c, f^p = d, \\ d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, f^{-1}cf = cb, e^{-1}de = db^{-1}, f^{-1}df = d, \\ f^{-1}ef = ed. \end{array} \right.$$

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE FINI;

Par M. GEORGES REMOUNDOS.

1. Dans un travail, qui a paru récemment dans les *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utgifvet af k. svenska Vetenskapsakademien* (Band 1) sous le titre *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières*, M. A. Wiman a signalé un certain défaut dans le complément apporté par M. Maillet ⁽¹⁾ au théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière. Ce défaut consiste en ce que les cercles décrits par M. Maillet autour des zéros avec un rayon constant, donné d'avance, peuvent recouvrir tout le plan dans le cas où le genre est supérieur à zéro, et alors le théorème n'aurait pas de sens.

⁽¹⁾ Voir *Journal de M. Jordan*, 1902. *Sur les fonctions entières et quasi-entières*

M. Wiman remplace le théorème de M. Maillet par le suivant :

Si l'on décrit autour de chaque zéro a_n un cercle de rayon égal à r_n^k , k étant un nombre aussi grand que l'on voudra, tous les points du plan, qui sont à l'extérieur de ces cercles, satisfont à l'inégalité

$$(1) \quad |F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

$F(z)$ étant la fonction entière et ρ son ordre.

M. Wiman ajoute l'énoncé suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r assez grand des parties dont la somme est inférieure à une partie quelconque (arbitrairement petite) des arcs restants, tous les autres points satisfont à l'inégalité (1).

En étudiant quelques propriétés ⁽¹⁾ des fonctions à croissance régulière j'ai eu l'occasion de me servir du théorème de M. Hadamard complété et j'ai constaté que la démonstration même que donne M. Maillet dans son Mémoire permet d'établir une proposition plus précise que celle de M. Wiman.

En effet, M. Maillet, suivant l'ordre d'idées de M. Borel, montre que si l'on décrit autour des zéros $a_1, a_2, \dots, a_m$ ⁽²⁾ des cercles de rayon η , l'inégalité

$$(2) \quad |F(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} \quad (\sigma = \rho + \varepsilon_1)$$

sera satisfaite, s'il en est de même de l'inégalité

$$(3) \quad 2\sigma \left(\log \frac{r}{\eta} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) < r^\varepsilon.$$

Or, cette dernière inégalité est satisfaite dès que l'on prend

$$\eta = e^{-r^{\varepsilon_2}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus*, 20 juin 1904 : *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes*.

⁽²⁾ Je conserve ici les notations de M. Maillet et je prie le lecteur de s'y reporter pour la signification de l'entier m .

Étudions maintenant les arcs qui seront mis à part, sur la circonférence de rayon r , par les cercles exclus de rayon $e^{-r^{\varepsilon_2}}$.

Chacun de ces arcs sera évidemment inférieur à la circonférence du cercle exclu, qui lui correspond, et dont la longueur est égale à $2\pi e^{-r^{\varepsilon_2}}$.

D'autre part, le nombre de ces arcs est égal à m , qui est inférieur à $(2r)^\sigma$; donc, la somme totale des arcs qui seront exclus est inférieure à

$$2^{\sigma+1} \pi r^\sigma e^{-r^{\varepsilon_2}} < e^{-r^{\varepsilon_3}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 < \varepsilon_2.$$

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r , assez grand, certains arcs de longueur totale inférieure à

$$e^{-r^\alpha},$$

α étant un nombre positif quelconque inférieur à ε , tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{\varepsilon+\varepsilon}}.$$

Ce théorème est visiblement plus précis que l'énoncé analogue de M. Wiman. C'est là, semble-t-il, la précision la plus extrême que l'on puisse exiger du théorème de M. Hadamard.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1904.

PRÉSIDENTE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. R. de Montessus : *Sur la résolution numérique des équations.*

M. Zervos : *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée.*

M. Remoundos : *Sur les points singuliers des équations différentielles.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Carvallo expose les grandes lignes d'un ouvrage sur l'Électricité qu'il va publier prochainement.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet, au moyen de polyèdres de genre UN.*

M. Bricard : *Sur une classe de cubiques gauches.*

M. Laisant : *Au sujet de l'enquête actuellement poursuivie sur la méthode de travail des mathématiciens.*

SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

M^{lle} Mantell, présentée par MM. Carvallo et Bricard ;

MM. K. Miwa, présenté par MM. Carvallo et Laisant ;

Sudria, » Carvallo et Bricard ;

Potron, » de Séguier et d'Ocagne ;

Van Deuren, » Appell et Kœnigs ;

K. Halberstadt, » Raffy et Grévy ;

Fréchet, » Painlevé et Borel ;

sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Touche : *Sur les travaux de Duchemin.*

M. Humbert : *Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet*

M. Bricard : *Sur un théorème de M. Fontené.*

SÉANCE DU 1^{er} DÉCEMBRE 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Painlevé : *Conférence sur la théorie moderne de l'irréductibilité des équations différentielles.*

SÉANCE DU 15 DÉCEMBRE 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Élections :

MM. Fatou, présenté par MM. André et Borel ;
Lemoyne, » Brocard et Bioche ;
Voronoi, » Autonne et Hadamard ;
sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Raffy : *Sur la double inversion singulière.*

M. Carvallo : *Sur le flux magnétique à travers le contour d'une surface unilatérale.*

ERRATA.

Dans le Mémoire de M. de Montcheuil : *Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis* (suite), inséré au présent Volume, p. 152, il faut lire : *demi-somme des rayons de courbure*, partout où il y a écrit *segment focal*.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1904.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[D1b]	Baire (R.). — Sur les séries à termes continus et tous de même signe.....	125
[M ₃ 5h, R1e]	Bricard (R.). — Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent.	
[H9d]	Clairin (J.). — Remarque sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre...	149
[X8]	Estanave (E.). — Sur un hyperbolographe à liquide.	58
[Q1a]	Fontené (G.). — Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive.....	128
[L ² e α]	Fontené (G.). — Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre <i>un</i>	284
[O6p]	Genty (E.). — Note de Géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux.....	211
[H9e]	Hadamard (J.). — Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique.....	242
[L ² 47e α, L ² 48b]	Humbert (G.). — Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques.....	135
[K6a]	Laisant (C.-A.). — Influence de la forme des équations en Géométrie analytique.....	56
[D1a]	Lebesgue (H.). — Une propriété caractéristique des fonctions de classe <i>un</i>	229
[R7a α]	Lecornu (L.). — Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide.....	59
[O8c]	Lévy (L.). — Sur les déplacements d'une figure plane	

		Pages.
	invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des lignes sphériques.....	203
[C 1 a]	Lucas (F.) . — Sur les dérivées modulaires des polynomes.....	185, 189
[D 4 c]	Mittag-Leffler (G) . — Sur le théorème de M. Jensen.	1
[O 7 b]	Montcheuil (M. de) . — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis (<i>suite</i>).....	152
[X 3]	Ocagne (M. d') . — Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques.....	196
[D 4 b]	Petrovitch (M.) . — Remarques sur les zéros des fonctions entières.....	65
[E 5]	Petrovitch (M.) . — Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies.....	67
[I 2 c]	Polignac (C. de) . — Recherches sur la divisibilité du nombre $\frac{1.2...n.x}{(1.2...x)^n}$ par les puissances de la factorielle $1.2...n$	5
[J 4 d]	Potron (M.) . — Sur quelques groupes d'ordre p^6	296
[J 4 d]	Potron (M.) . — Les g_p^m (p premier) dont tous les g_p^{m-2} sont abéliens.....	300
[D 3 f b]	Remoundos (G.) . — Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.....	44
[D 4 b α]	Remoundos (G.) . — Sur les fonctions entières de genre fini.....	314
[J 4 a α]	Séguier (J. de) . — Sur certains groupes de Mathieu.	116
[H 5 j α]	Suchar (P.-J.) . — Sur les équations différentielles réciproques du second ordre.....	103

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

Comptes rendus des séances.....	63, 145 et 316
Table des matières du Tome XXXII.....	319

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXII.

QA
1
S59

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

t. 31-32
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
